Annales

de mathématiques

du baccalauréat scientifique

Édition 2015

Sujets & corrigés détaillés

Éric Guirbal

Professeur indépendant, Toulouse

Éric GUIRBAL
Professeur indépendant de mathématiques
Toulouse
eric.guirbal@lecons-de-maths.fr
www.lecons-de-maths.fr

Ce document est disponible à l'adresse
http://www.lecons-de-maths.fr/ressources/cours-et-exercices#annales_bac_s

Version du 25 mai 2017

Sommaire

Avertissement

Ce texte est en cours de relecture. Soyez sûr qu'il contient des coquilles. La mise en page n'est pas définitive et une version destinée à l'impression est en préparation. Merci de patienter jusqu'à la mi-septembre.

En attendant, j'accueille avec plaisir vos remarques éventuelles et vous souhaite une bonne rentrée scolaire.

Éric GUIRBAL
le 2 septembre 2015
Toulouse

Sujet 1

Pondichéry

17 avril 2015

Exercice 1 (4 points)
Commun à tous les candidats.

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{3}{1+\mathrm{e}^{-2x}}.$$

Sur le graphique de la figure 1 page suivante, on a tracé, dans un repère orthogonal $(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f et la droite Δ d'équation $y = 3$.

1. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. Justifier que la droite Δ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.
3. Démontrer que l'équation $f(x) = 2{,}999$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.
   Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Partie B

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 3 - f(x)$.

1. Justifier que la fonction h est positive sur $\mathbb{R}$.
2. On désigne par H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\mathrm{H}(x) = -\frac{3}{2}\ln\left(1+\mathrm{e}^{-2x}\right).$$

   Démontrer que H est une primitive de h sur $\mathbb{R}$.
3. Soit a un réel strictement positif.

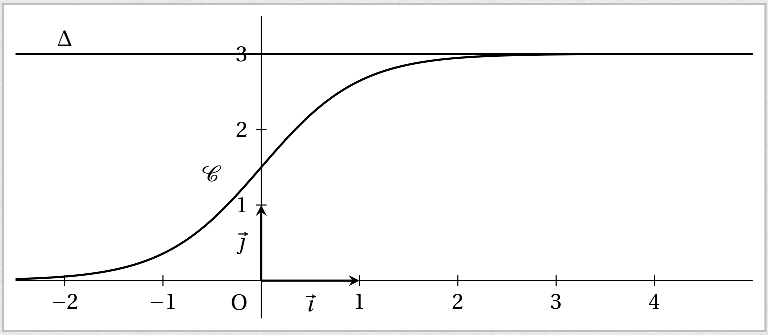


FIGURE 1

a. Donner une interprétation graphique de l'intégrale $\int_0^a h(x)\,\mathrm{d}x$.

b. Démontrer que

$$\int_0^a h(x)\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\ln\left(\frac{2}{1+\mathrm{e}^{-2a}}\right).$$

c. On note $\mathscr{D}$ l'ensemble des points $\mathrm{M}(x\,;y)$ du plan défini par

$$\begin{cases} x \geqslant 0 \\ f(x) \leqslant y \leqslant 3 \end{cases}.$$

Déterminer l'aire, en unité d'aire, du domaine $\mathscr{D}$.

Exercice 2 (5 points)
Commun à tous les candidats.

PARTIE A

Soit (u_n) la suite définie par son premier terme u_0 et, pour tout entier naturel n, par la relation

$$u_{n+1} = au_n + b \qquad (a \text{ et } b \text{ réels non nuls tels que } a \neq 1).$$

On pose, pour tout entier naturel n,

$$v_n = u_n - \frac{b}{1-a}.$$

1. Démontrer que, la suite (v_n) est géométrique de raison a.
2. En déduire que si a appartient à l'intervalle $]-1\,;1[$, alors la suite (u_n) a pour limite $b/(1-a)$.

PARTIE B

En mars 2015, Max achète une plante verte mesurant 80 cm. On lui conseille de la tailler tous les ans, au mois de mars, en coupant un quart de sa hauteur. La plante poussera alors de 30 cm au cours des douze mois suivants.

Dès qu'il rentre chez lui, Max taille sa plante.

1. Quelle sela la hauteur de la plante en mars 2016 avant que Max ne la taille ?
2. Pour tout entier naturel n, on note h_n la hauteur de la plante, avant sa taille, en mars de l'année $2015+n$.
   a. Justifier que, pour tout entier naturel n,
   $$h_{n+1} = 0{,}75h_n + 30.$$
   b. Conjecturer à l'aide de la calculatrice le sens de variations de la suite (h_n).
   Démontrer cette conjecture (on pourra utiliser un raisonnement par récurrence).
   c. La suite (h_n) est-elle convergente ? Justifier la réponse.

Exercice 3 (6 points)
Commun à tous les candidats.

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment.

PARTIE A. ÉTUDE DE LA DURÉE DE VIE D'UN APPAREIL ÉLECTROMÉNAGER

Des études statistiques ont permis de modéliser la durée de vie, en mois, d'un type de lave-vaisselle par une variable aléatoire X suivant une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ de moyenne $\mu = 84$ et d'écart-type σ. De plus, on a $\mathbb{P}(X \leqslant 64) = 0{,}16$.

La réprésentation graphique de la fonction densité de probabilité de X est donnée sur la figure 2 page suivante.

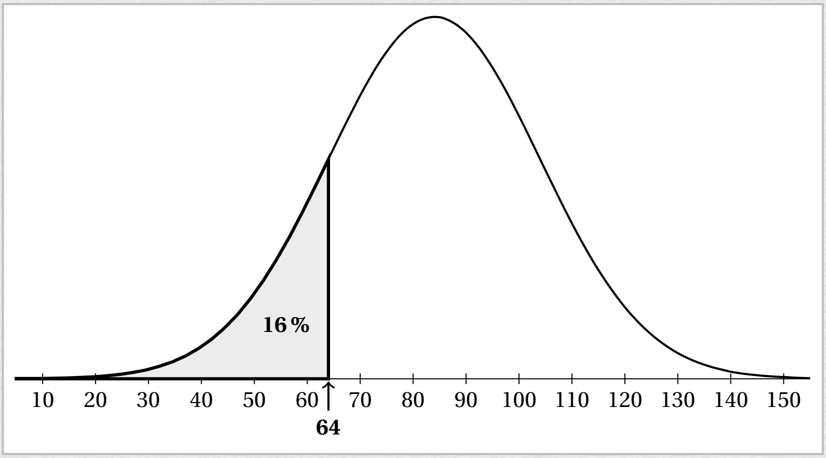


FIGURE 2

1. a. Exploitant le graphique, déterminer $\mathbb{P}(64 \leqslant X \leqslant 104)$.
   b. Quelle valeur approchée entière de σ peut-on proposer ?
2. On note Z la variable aléatoire définie par $Z = (X - 84)/\sigma$.
   a. Quelle est la loi de probabilité suivie par Z ?
   b. Justifier que $\mathbb{P}(X \leqslant 64) = \mathbb{P}(Z \leqslant -20/\sigma)$.
   c. En déduire la valeur de σ, arrondie à 10^{-3}.
3. Dans cette question, on considère que $\sigma = 20{,}1$. Les probabilités demandées seront arrondies à 10^{-3}.
   a. Calculer la probabilité que la durée de vie du lave-vaisselle soit comprise entre 2 et 5 ans.
   b. Calculer la probabilité que le lave-vaiselle ait une durée de vie supérieure à 10 ans.

PARTIE B. ÉTUDE DE L'EXTENSION DE GARANTIE D'EL'ECTRO

La lave-vaisselle est garanti gratuitement pendant les deux premières années. L'entreprise El'Ectro propose à ses clients une extension de garantie de 3 ans supplémentaires.

Des études statistiques menées *sur les clients qui prennent l'extension de garantie* montrent que 11,5 % d'entre eux font jouer l'extension de garantie.

1. On choisit au hasard 12 clients parmi ceux ayant pris l'extension de garantie (on peut assimiler ce choix à un tirage au hasard avec remise vu le grand nombre de clients).
   a. Quelle est la probabilité qu'exactement 3 de ces clients fassent jouer cette extension de garantie ? Détailler la démarche en précisant la loi de probabilité utilisée. Arrondir à 10^{-3}.
   b. Quelle est la probabilité qu'au moins 6 de ces clients fassent jouer cette extension de garantie ? Arrondir à 10^{-3}.
2. L'offre d'extension de garantie est la suivante : pour 65 euros supplémentaires, El'Ectro remboursera au client la valeur initiale du lave-vaisselle, soit 399 euros, *si une panne irréparable survient entre le début de la troisième année et la fin de la cinquième année*. Le client ne peut pas faire jouer cette extension de garantie si la panne est réparable.
   On choisit au hasard un client parmi les clients ayant souscrit l'extension de garantie, et on note Y la variable aléatoire qui représente le gain algébrique en euros réalisé sur ce client par l'entreprise El'Ectro, grâce à l'extension de garantie.
   a. Justifier que Y prend les valeurs 65 et -334 puis donner la loi de probabilité de Y.
   b. Cette offre d'extension de garantie est-elle financièrement avantageuse pour l'entreprise ? Justifier.

Exercice 4 (5 points)
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.

Soit un cube ABCDEFGH d'arête 1. Dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, on considère les points M, N et P de coordonnés respectives $M(1;1;3/4)$, $N(0;1/2;1)$, $P(1;0;-5/4)$.

1. Placer M, N et P sur la figure 3 page suivante.
2. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$. En déduire que les points M, N et P ne sont pas alignés.

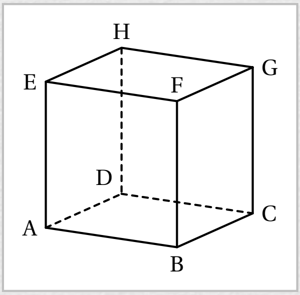


FIGURE 3

Saisir x_M, y_M, z_M, x_N, y_N, z_N, x_P, y_P, z_P
d prend la valeur $x_N - x_M$
e prend la valeur $y_N - y_M$
f prend la valeur $z_N - z_M$
g prend la valeur $x_P - x_M$
h prend la valeur $y_P - y_M$
i prend la valeur $z_P - z_M$
k prend la valeur $d \times g + e \times h + f \times i$
Afficher k

FIGURE 4 – *Algorithme 1*

3. On considère l'algorithme 1 de la figure 4.
   a. Exécuter *à la main* cet algorithme avec les coordonnées des points M, N et P données ci-dessus.
   b. À quoi correspond le résultat affiché par l'algorithme ? Qu'en déduire pour le triangle MNP ?
4. On considère l'algorithme 2 donné page ci-contre. Le compléter pour qu'il teste et affiche si un triangle MNP est un rectangle isocèle en M.
5. On considère le vecteur $\vec{n}(5; -8; 4)$ normal au plan (MNP).
   a. Déterminer une équation cartésienne du plan (MNP).

Saisir x_{M}, y_{M}, z_{M}, x_{N}, y_{N}, z_{N}, x_{P}, y_{P}, z_{P}
d prend la valeur $x_{\text{N}} - x_{\text{M}}$
e prend la valeur $y_{\text{N}} - y_{\text{M}}$
f prend la valeur $z_{\text{N}} - z_{\text{M}}$
g prend la valeur $x_{\text{P}} - x_{\text{M}}$
h prend la valeur $y_{\text{P}} - y_{\text{M}}$
i prend la valeur $z_{\text{P}} - z_{\text{M}}$
k prend la valeur $d \times g + e \times h + f \times i$

FIGURE 5 – *Algorithme 2*

b. On considère la droite Δ passant par F et de vecteur directeur $\vec{n}$. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.

6. Soit K le point d'intersection du plan (MNP) et de la droite Δ.

   a. Démontrer que les coordonnées du point K sont $(4/7; 24/35; 23/35)$.

   b. On donne $\text{FK} = \sqrt{27/35}$. Calculer le volume du tétraèdre MNPF.

Exercice 4 (5 points)
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité.

Les nombres de la forme $2^n - 1$ où n est un entier naturel non nul sont appelés *nombres de Mersenne.*

1. On désigne par a, b et c trois entiers naturels non nuls tels que $\text{pgcd}(b, c) = 1$.

   Prouver, à l'aide du théorème de Gauss, que :

   Si b divise a et c divise a, alors le produit bc divise a.

2. On considère le nombre de Mersenne $2^{33} - 1$. Un élève utilise sa calculatrice et obtient les résultats de la figure 6 page suivante.

   Il affirme que 3 divise $2^{33} - 1$ et 4 divise $2^{33} - 1$ et 12 ne divise pas $2^{33} - 1$.

```
(2^33-1)÷3
                2863311530
(2^33-1)÷4
                2147483648
(2^33-1)÷12
               715827882.6
```

FIGURE 6

a. En quoi cette affirmation contredit-elle le résultat démontré à la question 1 ?

b. Justifier que, en réalité, 4 ne divise pas $2^{33}-1$.

c. En remarquant que $2 \equiv -1 \pmod 3$, montrer que, en réalité, 3 ne divise pas $2^{33}-1$.

d. Calculer la somme $S = 1 + 2^3 + \left(2^3\right)^2 + \left(2^3\right)^2 + \left(2^3\right)^3 + \cdots + \left(2^3\right)^{10}$.

e. En déduire que 7 divise $2^{33}-1$.

3. On considère le nombre de Mersenne 2^7-1. Est-il premier ? Justifier.

4. On donne l'algorithme de la figure 7 page ci-contre où $\text{MOD}(N, k)$ représente le reste de la division euclidienne de N par k.

a. Qu'affiche cet algorithme si on saisit $n = 33$? Et si on saisit $n = 7$?

b. Que représente le CAS 2 pour le nombre de Mersenne étudié ? Que représente alors le nombre k affiché pour le nombre de Mersenne étudié ?

c. Que représente le CAS 1 pour le nombre de Mersenne étudié ?

Variables	n entier naturel supérieur ou égal à 3
	k entier naturel supérieur ou égal à 2
Initialisation	Demander à l'utilisateur la valeur de n
	Affecter à k la valeur 2
Traitement	Tant que $\text{MOD}(2^n - 1, k) \neq 0$ et $k \leqslant \sqrt{2^n - 1}$
	Affecter à k la valeur $k + 1$
	Fin de Tant que
Sortie	Afficher k
	Si $k > \sqrt{2^n - 1}$
	Afficher « CAS 1 »
	Sinon
	Afficher « CAS 2 »
	Fin de Si

FIGURE 7

Exercice 1
Commun à tous les candidats.

PARTIE A

1. La fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, est, à une constante multiplicative près, égale à l'inverse de la fonction $x \mapsto 1+e^{-2x}$ dérivable sur $\mathbb{R}$, donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f'(x) = \frac{6e^{-2x}}{(1+e^{-2x})^2}.$$

Comme la fonction exponentielle est à valeurs strictement positives, on a $f'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$, et l'on conclut que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Solution alternative. Soit a et b deux réels. On a

$$a < b \implies -2a > -2b.$$

Comme la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$,

$$a < b \implies e^{-2a} > e^{-2b},$$

puis

$$a < b \implies 1+e^{-2a} > 1+e^{-2b}.$$

Étant donné que $1+e^{-2x} > 0$ pour tout réel x et que la fonction $x \mapsto 3/x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, il vient

$$a < b \implies \frac{3}{1+e^{-2a}} < \frac{3}{1+e^{-2b}}.$$

Nous venons de démontrer que

$$a < b \implies f(a) < f(b),$$

c'est-à-dire que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminons la limite de f en $+\infty$:

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to+\infty} -2x = -\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0\end{array}\right\} \implies \lim_{x\to+\infty} e^{-2x} = 0 \implies \lim_{x\to+\infty} 1+e^{-2x} = 1,$$

et enfin

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 3.$$

Il s'ensuit que la droite Δ est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$.

3. D'après la question précédente, il existe un nombre réel A tel que $f(\mathrm{A}) > 2{,}999$. On a aussi $f(0) = 3/2 < 2{,}999$. De plus, sur l'intervalle $[0\,;\mathrm{A}]$, la fonction f est continue et strictement monotone, donc il existe un unique réel α tel que $f(\alpha) = 2{,}999$.
   Déterminons α :

$$\begin{aligned} f(\alpha) = 2{,}999 &\iff 1 + \mathrm{e}^{-2\alpha} = \frac{3000}{2999} \\ &\iff \mathrm{e}^{-2\alpha} = \frac{1}{2999} \\ &\iff -2\alpha = -\ln 2999 \\ &\iff \alpha = \frac{1}{2}\ln 2999, \end{aligned}$$

   d'où un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α :

$$4{,}00 \leqslant \alpha \leqslant 4{,}01$$

PARTIE B

1. La fonction f est croissante et tend vers 3 en $+\infty$, donc elle est majorée par 3, donc la fonction h est positive sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction H est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\mathrm{H}'(x) = -\frac{3}{2} \times \frac{-2\mathrm{e}^{-2x}}{1+\mathrm{e}^{-2x}} = \frac{3\mathrm{e}^{-2x}}{1+\mathrm{e}^{-2x}} = \frac{3(\mathrm{e}^{-2x}+1) - 3}{1+\mathrm{e}^{-2x}} = 3 - f(x) = h(x),$$

   ce qui prouve que H est une primitive de h sur $\mathbb{R}$.
3. a. La fonction h est positive sur $\mathbb{R}$, donc pour tout réel $a > 0$, l'intégrale $\int_0^a h(x)\,\mathrm{d}x$ représente l'aire géométrique de la région du plan délimité par la courbe $\mathscr{C}$, la droite Δ, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = a$.

b. D'après la question B.2,

$$\int_0^a h(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{H}(a) - \mathrm{H}(0) = -\frac{3}{2}\ln(1+\mathrm{e}^{-2a}) + \frac{3}{2}\ln 2 = \frac{3}{2}\ln\left(\frac{2}{1+\mathrm{e}^{-2a}}\right).$$

c. L'aire du domaine $\mathscr{D}$ est égal à $\lim_{a\to+\infty}\int_0^a h(x)\,\mathrm{d}x$. Remarquons que

$$\int_0^a h(x)\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\ln\left(\frac{2}{3}f(a)\right).$$

Nous avons démontré (A.2) que $\lim_{a\to+\infty} f(a) = 3$, donc

$$\lim_{a\to+\infty}\int_0^a h(x)\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\ln 2.$$

L'aire du domaine $\mathscr{D}$ est égale à $\frac{3}{2}\ln 2$ u.a.

Exercice 2

Commun à tous les candidats.

Partie A

1. Soit un entier $n \geqslant 0$. Soustrayons $b/(1-a)$ aux deux membres de l'égalité

$$u_{n+1} = au_n + b.$$

Nous obtenons ainsi

$$u_{n+1} - \frac{b}{1-a} = au_n - \frac{ab}{1-a}.$$

Factorisons le membre de droite par a. Il vient

$$v_{n+1} = av_n,$$

ce qui montre que la suite (v_n) est géométrique de raison a.

2. Si $|a| < 1$, alors la suite (v_n) tend vers 0, donc

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\left(v_n + \frac{b}{1-a}\right) = \frac{b}{1-a}.$$

n	h_n	n	h_n
0	80	100	119,99999999998716759819
1	90	101	119,99999999999037925514
2	97,5	102	119,99999999999278088580
3	103,125	103	119,99999999999458566435
4	107,34375	104	119,99999999999593569555
5	110,5078125	105	119,99999999999695887709

TABLE 1 – *Quelques termes de la suite* (h_n)

PARTIE B

1. Il s'écoulera exactement un an entre l'achat de la plante et la première taille. La hauteur de la plante en mars 2016 sera donc de $\frac{3}{4} \times 80\,\text{cm} + 30\,\text{cm} = 90\,\text{cm}$.

2. a. Soit n un entier naturel. Avant sa taille, en mars de l'année $2015 + n$, la plante a une hauteur h_n (en centimètres). Après la taille, la plante perd le quart de sa hauteur, si bien que sa hauteur n'est plus que de $0{,}75h_n$. Au cours des douze mois suivants, la plante pousse de 30 cm, d'où

$$h_{n+1} = 0{,}75h_n + 30.$$

   b. Avec l'aide d'une calculatrice nous avons obtenu la table 1, à partir de laquelle nous conjecturons que la suite (h_n) est strictement croissante[1]. La suite (h_n) est arithmético-géométrique. D'après la partie A, la suite (g_n) définie pour tout entier naturel n, par

$$g_n = h_n - 120$$

   est géométrique de raison 0,75 et de premier terme $g_0 = h_0 - 120 = 80 - 120 = -40$, donc son terme général est $g_n = -40 \times 0{,}75^n$.
   Les suites (g_n) et (h_n) ont même sens de variation ($g_{n+1} - g_n = h_{n+1} - h_n$) et $g_{n+1} - g_n = -40 \times 0{,}75^n \times (0{,}75 - 1) > 0$, donc la suite (h_n) est strictement croissante.

1. Elle nous permet aussi de conjecturer qu'elle converge vers 120.

Solution alternative. Démontrons par récurrence sur l'entier $n \geqslant 0$, la propriété $\mathscr{P}(n)$: « $h_n < h_{n+1}$ ».
Initialisation : on a $h_0 = 80$ et $h_1 = 90$, donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
Hérédité : supposons $\mathscr{P}(n)$, où $n \in \mathbb{N}$. On a

$$h_n < h_{n+1},$$

donc

$$\frac{3}{4}h_n + 30 < \frac{3}{4}h_{n+1} + 30$$

car la fonction affine $x \mapsto 3x/4 + 30$ est strictement croissante, d'où

$$h_{n+1} < h_{n+2}$$

qui est la propriété $\mathscr{P}(n+1)$.
Conclusion : $\mathscr{P}(0)$ est vraie et $\mathscr{P}(n)$ implique $\mathscr{P}(n+1)$, donc $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$, c'est-à-dire la suite (h_n) est strictement croissante.

c. La raison de la suite (g_n) appartient à l'intervalle $]-1\,;1[$, donc comme rappelé au A.2, la suite (h_n) converge et a pour limite 120.

Exercice 3

Commun à tous les candidats.

Partie A. Étude de la durée de vie d'un appareil électroménager

1. a. Le contraire de l'événement $\{64 \leqslant X \leqslant 104\}$ est l'union des deux événements disjoints $\{X < 64\}$ et $\{X > 104\}$, donc

$$\mathbb{P}(64 \leqslant X \leqslant 104) = 1 - \mathbb{P}(X < 64) - \mathbb{P}(X > 104).$$

Compte tenu de la symétrie de la courbe représentative de la fonction densité de la loi normale par rapport à la droite d'équation $x = 84$, il vient

$$\mathbb{P}(64 \leqslant X \leqslant 104) = 1 - 2\mathbb{P}(X < 64).$$

Puisque X est une loi à densité, $\mathbb{P}(X < 64) = \mathbb{P}(X \leqslant 64)$, donc

$$\mathbb{P}(64 \leqslant X \leqslant 104) = 1 - 2\mathbb{P}(X \leqslant 64).$$

Finalement,

$$\mathbb{P}(64 \leqslant X \leqslant 104) = 1 - 2 \times 0{,}16 = 0{,}68.$$

b. Pour une loi normale $\mathcal{N}(84, \sigma^2)$, nous savons que

$$\mathbb{P}(84 - \sigma \leqslant X \leqslant 84 + \sigma) \approx 0{,}68.$$

Or à la question précédente, nous avons montré que

$$\mathbb{P}(84 - 20 \leqslant X \leqslant 84 + 20) \approx 0{,}68,$$

donc

$$\sigma \approx 20.$$

2. a. La variable aléatoire Z suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.

b. Nous avons les équivalences

$$X \leqslant 64 \iff X - 84 \leqslant -20 \iff Z \leqslant \frac{-20}{\sigma},$$

donc

$$\mathbb{P}(X \leqslant 64) = \mathbb{P}\left(Z \leqslant \frac{-20}{\sigma}\right).$$

c. À l'aide d'une calculatrice, nous trouvons

$$\frac{-20}{\sigma} = -0{,}9944579\ldots,$$

donc

$$\sigma \approx 20{,}111$$

à 10^{-3} près.

3. a. La probabilité que la durée de vie du lave-vaisselle soit comprise entre 2 et 5 ans est, à 10^{-3} près, égale à

$$\mathbb{P}(24 \leqslant X \leqslant 60) = \mathbb{P}(X \leqslant 60) - \mathbb{P}(X \leqslant 24) \approx 0{,}115.$$

b. La probabilité que le lave-vaisselle ait une durée de vie supérieure à 10 ans est, à 10^{-3} près, égale à

$$\mathbb{P}(X > 120) = 1 - \mathbb{P}(X \leqslant 120) \approx 0{,}037.$$

Partie B. Étude de l'extension de garantie d'El'Ectro

1. a. L'expérience consiste en 12 épreuves indépendantes (tirage au hasard avec remise) à deux issues :
   — « le client fait jouer l'extension de garantie » de probabilité 0,115 ;
   — « le client ne fait pas jouer l'extension de garantie » de probabilité $1-0{,}115$.

   Par conséquent, la variable aléatoire qui compte le nombre de clients qui font jouer l'extension de garantie sur l'ensemble des 12 épreuves suit la loi binomiale $\mathscr{B}(12;0{,}115)$. Nous en déduisons que la probabilité pour qu'exactement 3 clients fassent jouer l'extension de garantie est égale à

   $$\binom{12}{3}\times 0{,}115^3\times(1-0{,}115)^{12-3}\approx 0{,}111.$$

   b. Notons A l'événement « au moins 6 clients font jouer l'extension de garantie ». L'événement contraire $\overline{\mathrm{A}}$ est « au plus 5 clients font jouer l'extension de garantie ». Donc

   $$\mathbb{P}(\mathrm{A}) = 1-\mathbb{P}(\overline{\mathrm{A}}) = 1-\sum_{k=0}^{5}\binom{12}{k}0{,}115^k(1-0{,}115)^{12-k}.$$

   À l'aide d'une calculatrice, nous trouvons

   $$\mathbb{P}(\mathrm{A})\approx 0{,}001.$$

2. a. Si le client ne fait pas jouer l'extension de garantie alors $\mathrm{Y}=65$, sinon $\mathrm{Y}=65-399=-334$. Par conséquent,

   $$\mathbb{P}(\mathrm{Y}=65)=1-0{,}115=0{,}885$$

   et

   $$\mathbb{P}(\mathrm{Y}=-334)=0{,}115.$$

   b. L'espérance de la variable aléatoire Y est égale à

   $$65\times\mathbb{P}(\mathrm{Y}=65)-334\times\mathbb{P}(\mathrm{Y}=-334)=19{,}115.$$

   Elle est positive, donc nous pouvons en déduire que l'extension de garantie est avantageuse pour l'entreprise.

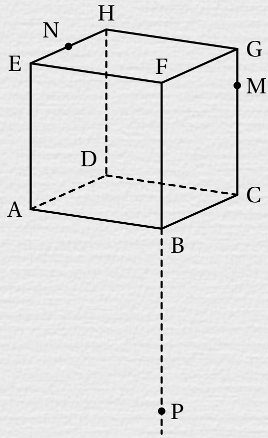


FIGURE 8

Exercice 4

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.

1. Voir la figure 8.

2. On a $\overrightarrow{\text{MN}}\left(-1;-\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)$ et $\overrightarrow{\text{MP}}(0;-1;-2)$.

   Supposons que les point M, N et P soient alignés. Alors les vecteurs $\overrightarrow{\text{MN}}$ et $\overrightarrow{\text{MP}}$ sont colinéaires. Puisque $\overrightarrow{\text{MP}} \neq \vec{0}$, il existe un réel k tel que $\overrightarrow{\text{MN}} = k\overrightarrow{\text{MP}}$. En identifiant les abscisses, nous obtenons $-1 = k \times 0$, soit $-1 = 0$. C'est absurde, donc les points M, N et P ne sont pas alignés.

3. a. Exécutons l'algorithme 1. Nous trouvons successivement, $d = -1$, $e = -\frac{1}{2}$, $f = \frac{1}{4}$, $g = 0$, $h = -1$, $i = -2$, et enfin $k = 0$.

   b. Remarquons que (d, e, f) (resp. (g, h, i)) sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\text{MN}}$ (resp. $\overrightarrow{\text{MP}}$). Comme le repère est orthonormé, k représente le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{\text{MN}}$ et $\overrightarrow{\text{MP}}$. Celui-ci est nul, donc ces deux vecteurs sont orthogonaux. Nous en déduisons que le triangle MNP est rectangle en M.

4. Voir la figure 9 page suivante.

Saisir x_M, y_M, z_M, x_N, y_N, z_N, x_P, y_P, z_P
d prend la valeur $x_N - x_M$
e prend la valeur $y_N - y_M$
f prend la valeur $z_N - z_M$
g prend la valeur $x_P - x_M$
h prend la valeur $y_P - y_M$
i prend la valeur $z_P - z_M$
k prend la valeur $d \times g + e \times h + f \times i$
d_{MN} prend la valeur $d^2 + e^2 + f^2$
d_{MP} prend la valeur $g^2 + h^2 + i^2$
Si $k = 0$ et $d_{MN} = d_{MP}$ alors
    Afficher « Le triangle MNP est rectangle et isocèle en M »
Sinon
    Afficher
    « Le triangle MNP n'est pas rectangle en M ou n'est pas isocèle en M »
Fin de Si

FIGURE 9

5. a. Une équation cartésienne du plan (MNP) est $5x - 8y + 4z + d = 0$, où d est un réel à déterminer. En écrivant que les coordonnées du point N vérifient l'équation, $5 \times 0 - 8 \times 1/2 + 4 \times 1 + d = 0$, on trouve $d = 0$, donc

$$5x - 8y + 4z = 0$$

est une équation cartésienne du plan (MNP).

b. Une représentation paramétrique de la droite Δ est

$$\begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = -8t \qquad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 1 + 4t \end{cases}$$

6. a. Le point K a pour coordonnées $(1 + 5t, -8t, 1 + 4t)$ où t est l'unique

solution de l'équation affine

$$5(1+5t)-8(-8t)+4(1+4t)=0,$$

soit

$$105t+9=0,$$

d'où

$$t=-\frac{3}{35},$$

si bien que les coordonnées du point K sont

$$\left(\frac{4}{7};\frac{24}{35};\frac{23}{35}\right).$$

b. Le volume du tétraèdre MNPF est donné par la formule

$$\mathcal{V}=\frac{1}{3}\mathcal{B}\times h,$$

où h est une hauteur et $\mathcal{B}$ l'aire de la base correspondante. D'après les questions 5 et 6, nous savons que le segment [FK] est la hauteur issue du sommet F. Nous avons démontré à la question 3.b que la base correspondante MNP est un triangle rectangle en M. Par conséquent,

$$\mathcal{V}=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\mathrm{MN}\times\mathrm{MP}\right)\times\mathrm{FK}.$$

Avec les notations de la question 3,

$$\begin{aligned}\mathcal{V}&=\frac{1}{6}\sqrt{d^2+e^2+f^2}\times\sqrt{g^2+h^2+i^2}\times\mathrm{FK}\\&=\frac{1}{6}\sqrt{(-1)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2}\times\sqrt{0^2+(-1)^2+(-2)^2}\times\sqrt{\frac{27}{35}}\\&=\frac{1}{6}\sqrt{\frac{21}{16}}\times\sqrt{5}\times\sqrt{\frac{27}{35}}\\&=\frac{1}{2\times3}\,\frac{\sqrt{3}\times\sqrt{7}}{4}\times\sqrt{5}\times\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{5}\times\sqrt{7}},\end{aligned}$$

soit

$$\mathcal{V}=\frac{3}{8}.$$

Exercice 4

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité.

1. Puisque b divise a, il existe un entier naturel k tel que $a = bk$. Comme c divise $a = bk$ et que b et c sont premiers entre eux, le théorème de Gauss affirme que c divise k. Soit l l'entier naturel tel que $k = cl$. Nous avons donc $a = bcl$, d'où nous déduisons que bc divise a.

2. a. Supposons que 3 et 4 divisent $2^{33} - 1$. Puisque 3 et 4 sont premiers entre eux, nous pouvons appliquer le résultat démontré à la question précédente, ainsi 12 divise $2^{33} - 1$, ce qui contredit l'affirmation de l'élève.

   b. On a $2^{33} - 1 = 4 \times 2^{31} - 1 = 4 \times (2^{31} - 1) + 3$, ce qui prouve que le reste de la division euclidienne de $2^{33} - 1$ par 4 est 3, donc que $2^{33} - 1$ n'est pas un multiple de 4.

   > *Solution alternative.* L'entier 4 est pair, donc tout multiple de 4 est également pair. Or $2^{33} - 1$ est impair, il s'ensuit que ce dernier n'est pas divisible par 4.

   > *Solution alternative.* Supposons que 4 divise $2^{33} - 1$. Comme 4 divise 2^{33}, nécessairement 4 divise $2^{33} - (2^{33} - 1) = 1$, ce qui est absurde. Nous en déduisons que 4 ne divise pas $2^{33} - 1$.

   c. Vu que $2 \equiv -1 \pmod 3$, nous avons $2^{33} \equiv (-1)^{33} \pmod 3$, soit $2^{33} \equiv -1 \pmod 3$, donc $2^{33} - 1 \equiv -2 \pmod 3$. Comme $-2 \not\equiv 0 \pmod 3$, nous concluons que 3 ne divise pas $2^{33} - 1$.

   d. Le nombre S est défini comme la somme des 11 premiers termes de la suite géométrique de raison 2^3 et de premier terme 1, donc

   $$\mathrm{S} = \frac{1 - (2^3)^{11}}{1 - 2^3} = \frac{2^{33} - 1}{7}.$$

   e. Comme S est une somme d'entiers, il résulte de la question précédente que $(2^{33} - 1)/7$ est un entier, donc que 7 divise $2^{33} - 1$.

3. On a $2^7 - 1 = 127$. S'il n'est pas premier, il est divisible par un nombre premier inférieur ou égal à $\sqrt{127} = 11,\ldots$ On vérifie qu'il n'est pas divisible par 2, 3, 5, 7 ou 11, donc $2^7 - 1$ est un nombre premier.

4. a. Pour $n = 3$, l'algorithme affiche `7` et `CAS 2`. Pour $n = 7$, il affiche `12` et `CAS 1`.

   b. L'algorithme affiche `CAS 2` si le nombre de Mersenne $2^n - 1$ n'est pas premier. Le nombre k affiché est alors son plus petit diviseur plus grand que 1.

   c. L'algorithme affiche `CAS 1` si le nombre de Mersenne $2^n - 1$ est premier.

Sujet 2

Liban

27 mai 2015

Exercice 1 (6 points)
Commun à tous les candidats.

ABCDEFGH est un cube (figure 1).

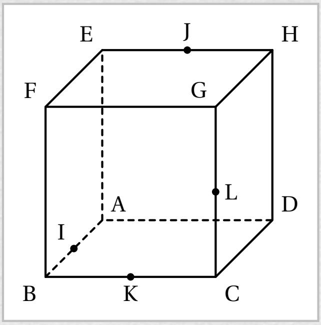


FIGURE 1

I est le milieu du segment [AB], J est le milieu du segment [EH], K est le milieu du segment [BC] et L est le milieu du segment [CG].

On munit l'espace du repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

1. a. Démontrer que la droite (FD) est orthogonale au plan (IJK).
   b. En déduire une équation cartésienne du plan (IJK).
2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (FD).
3. Soit M le point d'intersection de la droite (FD) et du plan (IJK). Déterminer les coordonnées du point M.
4. Déterminer la nature du triangle IJK et calculer son aire.

Variables	i et n sont des des entiers naturels
	u est un réel
Entrée	Saisir n
Initialisation	Affecter à u la valeur …
Traitement	Pour i variant de 1 à …
	Affecter à u la valeur …
	Fin de Pour
Sortie	Afficher u

FIGURE 2

5. Calculer le volume du tétraèdre FIJK.
6. Les droites (IJ) et (KL) sont-elles sécantes ?

Exercice 2 (6 points)
Commun à tous les candidats.

On définit la suite (u_n) de la façon suivante : pour tout entier naturel n,

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x.$$

1. Calculer $u_0 = \int_0^1 1/(1+x)\,\mathrm{d}x$.
2. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n,
$$u_{n+1} + u_n = \frac{1}{n+1}.$$
   b. En déduire la valeur exacte de u_1.
3. a. Recopier et compléter l'algorithme de la figure 2 afin qu'il affiche en sortie le terme de rang n de la suite (u_n) où n est un entier naturel saisi en entrée par l'utilisateur.
   b. À l'aide de cet algorithme, on a obtenu le tableau des valeurs de la table 1 page ci-contre.
   Quelles conjectures concernant le comportement de la suite (u_n) peut-on émettre ?

n	0	1	2	3	4
u_n	0,6931	0,3069	0,1931	0,1402	0,1098
n	5	10	50	100	
u_n	0,0902	0,0475	0,0099	0,0050	

TABLE 1

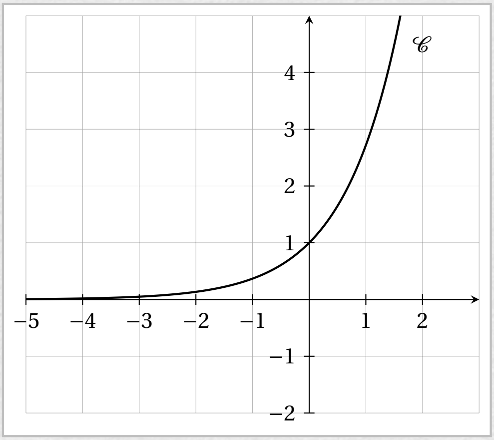


FIGURE 3

4. a. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
   b. Démontrer que la suite (u_n) est convergente.
5. On appelle ℓ la limite de la suite (u_n). Démontrer que $\ell = 0$.

Exercice 3 (3 points)
Commun à tous les candidats.

On considère la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y = \mathrm{e}^x$, tracée sur la figure 3. Pour tout réel m strictement positif, on note $\mathscr{D}_m$ la droite d'équation $y = mx$.

1. Dans cette question, on choisit $m = \mathrm{e}$.

Démontrer que la droite $\mathscr{D}_{\mathrm{e}}$, d'équation $y = \mathrm{e}x$, est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 1.

2. Conjecturer, selon les valeurs prises par le réel strictement positif m, le nombre de points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite $\mathscr{D}_m$.
3. Démontrer cette conjecture.

Exercice 4 (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.

En prévision d'une élection entre deux candidats A et B, un institut de sondage recueille les intentions de vote de futurs électeurs. Parmi les 1200 personnes qui ont répondu au sondage, 47 % affirment vouloir voter pour le candidat A et les autres pour le candidat B.

Compte-tenu du profil des candidats, l'institut de sondage estime que 10 % des personnes déclarant vouloir voter pour le candidat A ne disent pas la vérité et votent en réalité pour le candidat B, tandis que 20 % des personnes déclarant vouloir voter pour le candidat B ne disent pas le vérité et votent en réalité pour le candidat A.

On choisit au hasard une personne ayant répondu au sondage et on note :

— A l'événement « la personne interrogée affirme vouloir voter pour le candidat A » ;

— B l'événement « la personne interrogée affirme vouloir voter pour le candidat B » ;

— V l'événement « la personne interrogée dit la vérité ».

1. Construire un arbre de probabilités traduisant la situation.
2. a. Calculer la probabilité que la personne interrogée dise la vérité.
   b. Sachant que la personne interrogée dit la vérité, calculer la probabilité qu'elle affirme vouloir voter pour le candidat A.
3. Démontrer que la probabilité que la personne choisie vote effectivement pour le candidat A est 0,529.
4. L'institut de sondage publie alors les résultats suivants :

> 52,9 % des électeurs [a] voteraient pour le candidat A.
>
> *a.* Estimation après redressement, fondée sur un sondage d'un échantillon représentatif de 1 200 personnes.

Au seuil de confiance de 95 %, le candidat A peut-il croire en sa victoire ?

5. Pour effectuer ce sondage, l'institut a réalisé une enquête téléphonique à raison de 10 communications par demi-heure. La probabilité qu'une personne contactée accepte de répondre à cette enquête est 0,4.

   L'institut de sondage souhaite obtenir un échantillon de 1 200 réponses.

   Quel temps moyen, exprimé en heures, l'institut doit-il prévoir pour parvenir à cet objectif ?

Exercice 4 (5 points)
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité.

Un fumeur décide d'arrêter de fumer. On choisit d'utiliser la modélisation suivante :

— s'il ne fume pas un jour donné, il ne fume pas le jour suivant avec une probabilité de 0,9 ;

— s'il fume un jour donné, il fume le jour suivant avec une probabilité de 0,6.

On appelle p_n la probabilité de ne pas fumer le n-ième jour après sa décision d'arrêter de fumer et q_n la probabilité de fumer le n-ième jour après sa décision d'arrêter de fumer.

On suppose que $p_0 = 0$ et $q_0 = 1$.

1. Calculer p_1 et q_1.
2. On utilise un tableur pour automatiser le calcul des termes successifs des suites (p_n) et (q_n). Une copie d'écran de cette feuille de calcul est fournie (figure 4 page suivante).

   Dans la colonne A figurent les valeurs de l'entier naturel n.

   Quelles formules peut-on écrire dans les cellules B3 et C3 de façon qu'en les recopiant vers le bas, on obtienne respectivement dans les colonnes B et C les termes successifs des suites (p_n) et (q_n) ?
3. On définit les matrices M et, pour tout entier naturel n, X_n par

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & 0{,}6 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{X}_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}.$$

	A	B	C	D
1	n	p_n	q_n	
2	0	0	1	
3	1			
4	2			
5	3			

FIGURE 4

On admet que $X_{n+1} = M \times X_n$ et que, pour tout entier naturel n, $X_n = M^n \times X_0$.

On définit les matrices A et B par

$$A = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,8 \\ 0,2 & 0,2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 0,2 & -0,8 \\ -0,2 & 0,8 \end{pmatrix}.$$

a. Démontrer que $M = A + 0,5B$.

b. Vérifier que $A^2 = A$, et que

$$A \times B = B \times A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On admet dans la suite que, pour tout entier naturel n strictement positif, $A^n = A$ et $B^n = B$.

c. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $M^n = A + 0,5^n B$.

d. En déduire que, pour tout entier naturel n, $p_n = 0,8 - 0,8 \times 0,5^n$.

e. À long terme, peut-on affirmer avec certitude que le fumeur arrêtera de fumer ?

Exercice 1

Commun à tous les candidats.

1. a. Nous avons $\overrightarrow{FD}(-1;1;-1)$, $\overrightarrow{IJ}(-1/2;1/2;1)$ et $\overrightarrow{IK}(1/2;1/2;0)$. Le repère étant orthonormé, les produits scalaires $\overrightarrow{FD}\cdot\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{FD}\cdot\overrightarrow{IK}$ sont égaux à

$$\overrightarrow{FD}\cdot\overrightarrow{IJ} = -1\times\left(-\frac{1}{2}\right)+1\times\frac{1}{2}+(-1)\times 1 = 0,$$

et

$$\overrightarrow{FD}\cdot\overrightarrow{IK} = -1\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{2}+(-1)\times 0 = 0,$$

donc le vecteur $\overrightarrow{FD}$ est orthogonal aux deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$, il s'ensuit que la droite (FD) est perpendiculaire au plan (IJK).

b. Le vecteur $\overrightarrow{FD}$ est normal au plan (IJK), donc une équation cartésienne de ce plan est

$$-x+y-z+d=0$$

où d est un réel que nous déterminons en écrivant que les coordonnées $(1/2;0;0)$ du point I vérifient cette équation. Nous obtenons immédiatement $d=1/2$, donc

$$-x+y-z+\frac{1}{2}=0$$

est une équation cartésienne du plan (IJK).

2. Une représentation paramétrique de la droite (FD) passant par le point $F(1;0;1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{FD}(-1;1;-1)$ est

$$\begin{cases} x = 1-t \\ y = t \qquad (t\in\mathbb{R}) \\ z = 1-t. \end{cases}$$

3. Le point M appartient à la droite (FD), donc ses coordonnées sont de la forme $(1-t;t;1-t)$ pour un réel t. Les coordonnées du point M vérifient l'équation cartésienne du plan (IJK) trouvée à la question 1.b, donc le réel t est la solution de l'équation affine

$$-(1-t)+t-(1-t)+\frac{1}{2}=0,$$

qui se réduit ainsi
$$3t - \frac{3}{2} = 0.$$
Nous trouvons $t = 1/2$, et nous concluons que la droite (FD) coupe le plan (IJK) au point M de coordonnées $(1/2; 1/2; 1/2)$.

4. Le triangle IJK est rectangle en I ; en effet,
$$\overrightarrow{\mathrm{IJ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{IK}} = \left(-\frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + 1 \times 0 = 0.$$
L'aire du triangle $\mathscr{A}$ du triangle IJK est donnée par la formule
$$\mathscr{A} = \frac{1}{2} \times \mathrm{IJ} \times \mathrm{IK}.$$
Le repère étant orthonormé, nous avons
$$\mathrm{IJ}^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 = \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{IK}^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2 = \frac{1}{2},$$
donc
$$\mathscr{A} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} \times \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

5. Nous avons démontré que la droite (FD) est perpendiculaire au plan (IJK) et coupe celui-ci au point M, donc le segment [FM] est la hauteur du tétraèdre FIJK de base le triangle IJK. Le volume du tétraèdre est donné par la formule
$$\mathscr{V} = \frac{1}{3}\mathscr{A} \times \mathrm{FM}.$$
La vecteur $\overrightarrow{\mathrm{FM}}$ a pour coordonnées $(-1/2; 1/2; -1/2)$, donc la hauteur du tétraèdre est $\mathrm{FM} = \sqrt{(-1/2)^2 + (1/2)^2 + (-1/2)^2} = \sqrt{3}/2$. Le volume du tétraèdre FIJK est donc
$$\mathscr{V} = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{8}.$$

6. Le point L appartient au plan (IJK) ; en effet, ses coordonnées $(1; 1; 1/2)$ vérifient l'équation du plan (IJK). Par conséquent, les droites (IJ) et (KL) sont coplanaires. Les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{IJ}}\,(-1/2; 1/2; 1)$ et $\overrightarrow{\mathrm{KL}}(0; 1/2; 1/2)$ ne sont pas colinéaires (l'abscisse de $\overrightarrow{\mathrm{IJ}}$ est nulle, mais pas celle de $\overrightarrow{\mathrm{KL}}$), il s'ensuit que les droites (IJ) et (KL) sont sécantes.

Solution alternative. Le point L appartient au plan (IJK) ; en effet, ses coordonnées $(1;1;1/2)$ vérifient l'équation du plan (IJK). Supposons que les droites (IJ) et (KL) ne sont pas sécantes. Les droites (IJ) et (KL) sont parallèles. La droite (KL) appartient au plan (BCF) et le point J appartient au plan (ADE) qui est parallèle au plan (BCF), donc le point I appartient au plan (ADE), ce qui est absurde. Donc les droites (IJ) et (KL) sont sécantes.

Exercice 2

Commun à tous les candidats.

1. Le premier terme de la suite (u_n) est égal à

$$u_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$$

2. a. Pour tout entier naturel n, on trouve

$$\begin{aligned} u_{n+1} + u_n &= \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} + \frac{x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \frac{x^n(1+x)}{1+x}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

   b. Pour $n = 0$, l'égalité démontrée à la question précédente s'écrit

$$u_1 + u_0 = 1,$$

   d'où

$$u_1 = 1 - u_0 = 1 - \ln 2.$$

3. a. Nous avons montré que la suite (u_n) vérifie la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{1}{n+1} - u_n \quad (n \geqslant 0)$$

Variables	i et n sont des des entiers naturels
	u est un réel
Entrée	Saisir n
Initialisation	Affecter à u la valeur $\ln 2$
Traitement	Pour i variant de 1 à n
	Affecter à u la valeur $\frac{1}{i} - u$
	Fin de Pour
Sortie	Afficher u

FIGURE 5

avec

$$u_0 = \ln 2.$$

Nous en déduisons l'algorithme de la figure 5.

b. Le tableau suggère que la suite (u_n) est décroissante et converge vers 0.

4. a. Pour tout $x \in [0;1]$ et tout entier $n \geqslant 0$, on a l'inégalité

$$x_{n+1} \leqslant x_n,$$

d'où

$$\frac{x^{n+1}}{1+x} \leqslant \frac{x^n}{1+x}.$$

La croissance de l'intégrale donne

$$\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire

$$u_{n+1} \leqslant u_n.$$

Nous avons montré que la suite (u_n) décroissante.

Solution alternative. Pour tout entier $n \geqslant 0$, on a

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{1+x}\,\mathrm{d}x$$

où $x^n(x-1)/(1+x) \leqslant 0$ sur $[0;1]$, donc d'après la positivité de l'intégrale,

$$u_{n+1} - u_n \leqslant 0,$$

ce qui montre que la suite (u_n) est décroissante.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in [0;1]$, $x^n/(1+x) \geqslant 0$, donc la positivité de l'intégrale permet d'en déduire que $u_n \geqslant 0$.
La suite (u_n) est décroissante et minorée, donc elle converge.

5. Faisons tendre n vers $+\infty$ dans la relation

$$u_{n+1} + u_n = \frac{1}{n+1}.$$

Nous obtenons $2\ell = 0$, d'où $\ell = 0$.

Exercice 3

Commun à tous les candidats.

1. La fonction $f : x \longmapsto \mathrm{e}^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc sa courbe représentative $\mathscr{C}$ d'équation $y = \mathrm{e}^x$ admet une tangente au point d'abscisse 1. Son équation réduite est donnée par la formule

$$y = f'(1)(x-1) + f(1).$$

Étant donné que $f'(x) = \mathrm{e}^x$ sur $\mathbb{R}$, il vient

$$y = \mathrm{e}(x-1) + \mathrm{e} = \mathrm{e}x.$$

Nous reconnaissons l'équation de la droite $\mathscr{D}_\mathrm{e}$.

2. La figure 6 page suivante suggère la conjecture suivante :

— si $m \in]0;\mathrm{e}[$, alors la droite $\mathscr{D}_m$ ne coupe pas la courbe $\mathscr{C}$;

— si $m = \mathrm{e}$, alors la droite $\mathscr{D}_m$ coupe la courbe $\mathscr{C}$ en un unique point ;

— si $m > \mathrm{e}$, alors la droite $\mathscr{D}_m$ coupe la courbe $\mathscr{C}$ en exactement deux points.

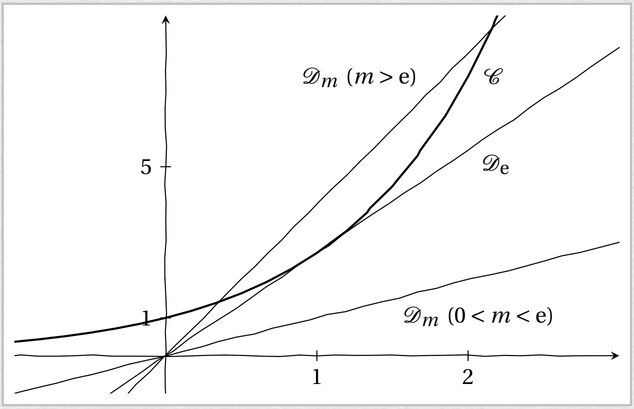


FIGURE 6

3. Soit un réel $m > 0$. Le nombre de points d'intersection de la droite $\mathscr{D}_m$ avec la courbe $\mathscr{C}$ est égal au nombre de solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation

$$\mathrm{e}^x = mx.$$

Étant donné que $\mathrm{e}^x > 0$ pour tout réel x, les solutions sont nécessairement strictement positives, donc cette équation est équivalente à l'équation

$$f(x) = m,$$

où f est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{x}.$$

Étiudions la fonction f. Définie comme le quotient de deux fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$, la fonction f est dérivable, et pour tout réel $x > 0$, sa dérivée est

$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x x - \mathrm{e}^x}{x^2} = \frac{(x-1)\mathrm{e}^x}{x^2}.$$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $(x-1)$. De plus,

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0} \mathrm{e}^x = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

FIGURE 7 – *Tableau de variation de la fonction f.*

et

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty.$$

Nous en déduisons le tableau de variation de la figure 7 à partir duquel nous démontrons la conjecture :

— si $0 < m < \mathrm{e}$, l'équation $f(x) = m$ n'a pas de solution, donc la droite $\mathscr{D}_m$ ne coupe par la courbe $\mathscr{C}$;

— si $m = \mathrm{e}$, l'équation $f(x) = m$ admet $x = 1$ pour unique solution $x = 1$, donc la droite $\mathscr{D}_m$ coupe la courbe $\mathscr{C}$ en un unique point ;

— si $m > \mathrm{e}$, l'équation $f(x) = m$ admet exactement deux solutions : une sur l'intervalle $]0;1[$, l'autre sur l'intervalle $]1;+\infty[$. En effet, la fonction f est continue et strictement monotone sur l'intervalle $]0;1[$ (resp. $]1;+\infty[$), $f(1) < m$ et $\lim_0 f = +\infty$, (resp. $f(1) < m$ et $\lim_{+\infty} f = +\infty$), donc d'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = m$ possède une unique solution sur l'intervalle $]0;1[$ (resp. $]1;+\infty[$). Donc la droite $\mathscr{D}_m$ coupe la courbe $\mathscr{C}$ en exactement deux points.

Remarque. Il était aussi possible d'étudier le nombre de zéros de la fonction f_m définie sur $[0;+\infty[$ par $f_m(x) = \mathrm{e}^x - mx$. Son tableau de variation est donné à la figure 8 page suivante. Le minimum de la fonction f_m est $m(1 - \ln m)$. Pour conclure, il suffit donc d'étudier le signe de la fonction $x \mapsto x(1 - \ln x)$ sur $]0;+\infty[$.

x	0		$\ln m$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$m(1-\ln m)$	$\nearrow$	$+\infty$

FIGURE 8 – *Tableau de variation de la fonction f_m.*

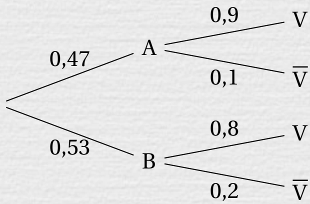


FIGURE 9

Exercice 4

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.

1. Voir la figure 9 pour un arbre de probabilité représentant la situation.
2. a. La probabilité qu'une personne interrogée dise la vérité est donnée par la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(\text{V}) = \mathbb{P}(\text{A})\mathbb{P}_{\text{A}}(\text{V}) + \mathbb{P}(\text{B})\mathbb{P}_{\text{B}}(\text{V}) = 0{,}47 \times 0{,}9 + 0{,}53 \times 0{,}8 = \frac{423}{847} = 0{,}847.$$

   b. La probabilité pour qu'une personne affirme vouloir voter pour le candidat A sachant qu'elle dit la vérité est

$$\mathbb{P}_{\text{V}}(\text{A}) = \frac{\mathbb{P}(\text{A} \cap \text{V})}{\mathbb{P}(\text{V})} = \frac{\mathbb{P}(\text{A})\mathbb{P}_{\text{A}}(\text{V})}{\mathbb{P}(\text{V})} = \frac{0{,}47 \times 0{,}9}{0{,}847} \approx 0{,}499.$$

3. Une personne qui vote pour le candidat A est dans l'une des situations mutuellement exclusives suivantes : soit elle dit la vérité en affirmant voter pour le candidat A, soit elle ment en affirmant voter pour le candidat B. Par conséquent, la probabilité pour qu'une personne vote effectivement pour le candidat A est

$$\mathbb{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{V})+\mathbb{P}(\mathrm{B}\cap\overline{\mathrm{V}})=\mathbb{P}(\mathrm{A})\mathbb{P}_{\mathrm{A}}(\mathrm{V})+\mathbb{P}(\mathrm{B})\mathbb{P}_{\mathrm{B}}(\overline{\mathrm{V}})=0{,}47\times 0{,}9+0{,}53\times 0{,}2=0{,}529.$$

4. La taille du sondage $n=1\,200$ et la proportion $f=0{,}529$ de ceux qui voteraient pour le candidat A vérifient les inégalités $n\geqslant 30$, $nf=634{,}8\geqslant 5$ et $n(1-f)=565{,}2\geqslant 5$, donc l'intervalle de confiance au seuil de 95 % de la proportion d'électeurs qui voteront pour le candidat A est

$$\left[f-\frac{1}{\sqrt{n}}\,;f+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]\subset[0{,}5001\,;0{,}5579].$$

Comme $0{,}5001>0{,}5$, le candidat A peut arborer un large sourire.

5. L'institut de sondage obtient $2\times 10\times 0{,}4=8$ réponses en moyenne par heure. Afin obtenir 1 200 réponses, il doit donc prévoir $1200/8=150$ heures.

Exercice 4

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité.

1. Notons F_n l'événement « il fume le n-ième jour ». Nous avons $p_n=\mathbb{P}(\overline{\mathrm{F}_n})$ et $q_n=\mathbb{P}(\mathrm{F}_n)$. Les données de l'énoncé s'écrivent

$$\mathbb{P}_{\mathrm{F}_n}(\mathrm{F}_{n+1})=0{,}6 \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}_{\overline{\mathrm{F}_n}}(\overline{\mathrm{F}_{n+1}})=0{,}9,$$

d'où

$$\mathbb{P}_{\mathrm{F}_n}(\overline{\mathrm{F}_{n+1}})=1-\mathbb{P}_{\mathrm{F}_n}(\mathrm{F}_{n+1})=0{,}4 \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}_{\overline{\mathrm{F}_n}}(\mathrm{F}_{n+1})=1-\mathbb{P}_{\overline{\mathrm{F}_n}}(\overline{\mathrm{F}_{n+1}})=0{,}1.$$

Représentons la situation à l'aide de l'arbre de probabilité de la figure 10 page suivante.

À l'aide de cet arbre, nous obtenons pour $n=0$:

$$p_1=0{,}4q_0+0{,}9p_0=0{,}4 \quad \text{et} \quad q_1=1-p_1=0{,}6.$$

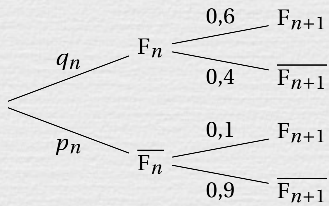


FIGURE 10

2. L'arbre de probabilité montre que les suites (p_n) et (q_n) vérifient les relations

$$p_{n+1} = 0{,}9p_n + 0{,}4q_n \quad \text{et} \quad q_{n+1} = 1 - p_{n+1}.$$

Il nous faut donc mettre dans la cellule B3 la formule `=0,9*$B2+0,4*$C2` et dans la cellule C3 la formule `=1-$B3`.

3. a.

$$\begin{aligned} \mathrm{A} + 0{,}5\mathrm{B} &= \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}8 \\ 0{,}2 & 0{,}2 \end{pmatrix} + 0{,}5 \begin{pmatrix} 0{,}2 & -0{,}8 \\ -0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0{,}8 + 0{,}5 \times 0{,}2 & 0{,}8 + 0{,}5 \times (-0{,}8) \\ 0{,}2 + 0{,}5 \times (-0{,}2) & 0{,}2 + 0{,}5 \times 0{,}8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & 0{,}6 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

on a donc bien $\mathrm{A} + 0{,}5\mathrm{B} = \mathrm{M}$.

b.

$$\begin{aligned} \mathrm{A}^2 &= \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}8 \\ 0{,}2 & 0{,}2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}8 \\ 0{,}2 & 0{,}2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0{,}8^2 + 0{,}8 \times 0{,}2 & 0{,}8^2 + 0{,}8 \times 0{,}2 \\ 0{,}2 \times 0{,}8 + 0{,}2^2 & 0{,}2 \times 0{,}8 + 0{,}2^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}8 \\ 0{,}2 & 0{,}2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

donc $A^2 = A$.

$$\begin{aligned}
A \times B &= \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}8 \\ 0{,}2 & 0{,}2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}2 & -0{,}8 \\ -0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0{,}8 \times 0{,}2 + 0{,}8 \times (-0{,}2) & -0{,}8^2 + 0{,}8^2 \\ 0{,}2^2 - 0{,}2^2 & 0{,}2 \times (-0{,}8) + 0{,}2 \times 0{,}8 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

De même, on trouve

$$B \times A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

c. Démontrons par récurrence sur l'entier n que

$$M^n = A + 0{,}5^n B.$$

Initialisation. Si $n = 0$,

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A + 0{,}5^n B = A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donc l'égalité est vraie pour $n = 0$.

Hérédité. Supposons que l'égalité est vraie pour l'entier naturel n. Alors

$$\begin{aligned}
M^{n+1} &= M \times M^n \\
&= (A + 0{,}5B) \times (A + 0{,}5^n B) \\
&= A^2 + 0{,}5^n A \times B + 0{,}5 B \times A + 0{,}5^{n+1} B^2 \\
&= A + 0{,}5^{n+1} B,
\end{aligned}$$

donc l'égalité est vraie à l'entier $n + 1$.

Conclusion. L'égalité est vraie pour $n = 0$, et si elle vraie pour l'entier n, elle est vraie pour l'entier $n + 1$, donc l'égalité $M^n = A + 0{,}5^n B$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$.

d. Soit un entier $n \geqslant 0$. Le terme p_n est le coefficient de la première ligne de la matrice $\mathrm{M}^n \times \mathrm{X}_0 = (\mathrm{A} + 0{,}5^n\mathrm{B})\mathrm{X}_0$. Or,

$$\begin{aligned}\mathrm{A} + 0{,}5^n\mathrm{B} &= \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}8 \\ 0{,}2 & 0{,}2 \end{pmatrix} + 0{,}5^n \begin{pmatrix} 0{,}2 & -0{,}8 \\ -0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0{,}8 + 0{,}5^n \times 0{,}2 & 0{,}8 - 0{,}5^n \times 0{,}8 \\ 0{,}2 - 0{,}5^n \times 0{,}2 & 0{,}2 + 0{,}5^n \times 0{,}8 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

et

$$\mathrm{X}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

donc

$$p_n = 0{,}8 - 0{,}5^n \times 0{,}8.$$

e. Comme $|0{,}5| < 1$, on a $\lim_{n\to+\infty} 0{,}5^n = 0$, donc

$$\lim_{n\to+\infty} p_n = 0{,}8 < 1.$$

Nous ne pouvons donc pas affirmer avec certitude qu'à long terme le fumeur atteindra son objectif.

ÉNONCÉ

Sujet 3

Amérique du Nord

2 juin 2015

Exercice 1 (5 points)
Commun à tous les candidats.

Dans l'espace, on considère une pyramide SABCE à base carrée ABCE de centre O. Soit D le point de l'espace tel que $(O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OD})$ soit un repère orthonormé. Le point S a pour coordonnées $(0; 0; 3)$ dans ce repère.

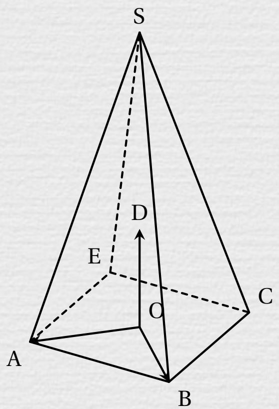


FIGURE 1

PARTIE A

1. Soit U le point de la droite (SB) de cote 1. Construire le point U sur la figure 1.

2. Soit V le point d'intersection du plan (AEU) et de la droite (SC). Montrer que les droites (UV) et (BC) sont parallèles. Construire le point V sur la figure 1 page précédente.
3. Soit K le point de coordonnées $(5/6;-1/6;0)$. Montrer que K est le pied de la hauteur issue de U dans le trapèze AUVE.

PARTIE B

Dans cette partie, on admet que l'aire du quadrilatère AUVE est $5\sqrt{43}/18$.

1. On admet que le point U a pour coordonnées $(0;2/3;1)$. Vérifier que le plan (EAU) a pour équation $3x-3y+5z-3=0$.
2. Donner une représentation paramétrique de la droite (d) orthogonale au plan (EAU) passant par la point S.
3. Déterminer les coordonnées de H, point d'intersection de la droite (d) et du plan (EAU).
4. Le plan (EAU) partage la pyramide (SABCE) en deux solides. Ces deux solides ont-ils le même volume ?

Exercice 2 (5 points)
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.

On se place dans un repère orthonormé et, pour tout entier naturel n, on définit les points (A_n) par leurs coordonnées $(x_n;y_n)$ de la façon suivante :

$$\begin{cases} x_0=-3 \\ y_0=4 \end{cases} \quad \text{et pour tout entier naturel } n : \quad \begin{cases} x_{n+1}=0{,}8x_n-0{,}6y_n \\ y_{n+1}=0{,}6x_n+0{,}8y_n. \end{cases}$$

1. a. Déterminer les coordonnées des points A_0, A_1 et A_2.
   b. Pour construire les points A_n ainsi obtenus, on écrit l'algorithme de la figure 2 page suivante.
   Recopier et compléter cet algorithme pour qu'il construise les points A_0 à A_{20}.
   c. À l'aide d'un tableur, on a obtenu le nuage de points de la figure 3 page 44.
   Identifier les points A_0, A_1 et A_2. On les nommera sur la figure 3 page 44.

ÉNONCÉ

Variables	i, x, y, t : nombres réels
Initialisation	x prend la valeur -3
	y prend la valeur 4
Traitement	Pour i allant de 1 à 20
	Construire le point de coordonnées $(x; y)$
	t prend la valeur de x
	x prend la valeur ....
	y prend la valeur ....
	Fin Pour

FIGURE 2

Quel semble être l'ensemble auquel appartiennent les points A_n pour tout n entier naturel ?

2. Le but de cette question est de construire géométriquement les points A_n pour tout n entier naturel. Dans le plan complexe, on nomme, pour tout entier naturel n, $z_n = x_n + \mathrm{i}y_n$ l'affixe du point A_n.

   a. Soit $u_n = |z_n|$. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n = 5$. Quelle interprétation géométrique peut-on faire de ce résultat ?

   b. On admet qu'il existe un réel θ tel que $\cos\theta = 0{,}8$ et $\sin\theta = 0{,}6$. Montrer que, pour tout entier naturel n, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} z_n = z_{n+1}$.

   c. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $z_n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} z_0$.

   d. Montrer que $\theta + \pi/2$ est un argument du nombre complexe z_0.

   e. Pour tout entier naturel n, déterminer, en fonction de n et θ, un argument du nombre complexe z_n. Représenter θ sur la figure 3 page suivante.

      Expliquer, pour tout entier naturel n, comment construire le point A_{n+1} à partir du point A_n.

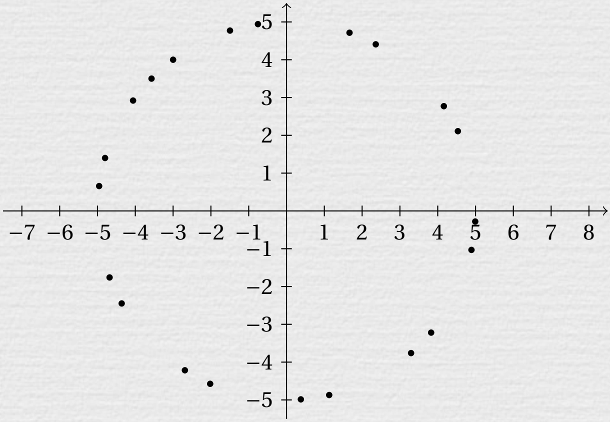


FIGURE 3

Exercice 2 (5 points)
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité.

On donne les matrices

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

PARTIE A

1. Déterminer la matrice M^2. On donne

$$M^3 = \begin{pmatrix} 20 & 10 & 11 \\ 12 & 2 & 9 \\ 42 & 20 & 21 \end{pmatrix}.$$

2. Vérifier que $M^3 = M^2 + 8M + 6I$.
3. En déduire que M est inversible et que $M^{-1} = \frac{1}{6}(M^2 - M - 8I)$.

PARTIE B. ÉTUDE D'UN CAS PARTICULIER

On cherche à déterminer trois nombres entiers a, b et c tels que la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ passe par les points $A(1;1)$, $B(-1;-1)$ et $C(2;5)$.

1. Démontrer que le problème revient à chercher trois entiers a, b et c tels que

$$\mathrm{M}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

2. Calculer les nombres a, b et c et vérifier que ces nombres sont des entiers.

PARTIE C. RETOUR AU CAS GÉNÉRAL

Les nombres a, b, c, p, q, r sont des entiers.

Dans un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère les points $A(1;p)$, $B(-1;q)$ et $C(2;r)$.

On cherche des valeurs de p, q et r pour qu'il existe une parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ passant par A, B et C.

1. Démontrer que si

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \mathrm{M}^{-1}\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix},$$

avec a, b et c entiers, alors

$$\begin{cases} -3p + q + 2r \equiv 0 \pmod 6 \\ 3p - 3q \equiv 0 \pmod 6 \\ 6p + 2q - 2r \equiv 0 \pmod 6. \end{cases}$$

2. En déduire que

$$\begin{cases} q - r \equiv 0 \pmod 3 \\ p - q \equiv 0 \pmod 2. \end{cases}$$

3. Réciproquement, on admet que si

$$\begin{cases} q - r \equiv 0 \pmod 3 \\ p - q \equiv 0 \pmod 2 \\ \text{A, B, C ne sont pas alignés,} \end{cases}$$

alors il existe trois entiers a, b et c tels que la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ passe par les points A, B et C.

a. Montrer que les points A, B et C sont alignés si et seulement si

$$2r + q - 3p = 0.$$

b. On choisir $p = 7$. Déterminer des entiers q, r, a, b et c tels que la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ passe par les points A, B et C.

Exercice 3 (4 points)
Commun à tous les candidats.

Une entreprise fabrique des tablettes de chocolat de 100 grammes. Le service de contrôle qualité effectue plusieurs types de contrôle.

Partie A

Contrôle avant la mise sur le marché

Une tablette de chocolat doit peser 100 grammes avec une tolérance de deux grammes en plus ou en moins. Elle est donc mise sur le marché si sa masse est comprise entre 98 et 102 grammes.

La masse (exprimée en grammes) d'une tablette de chocolat peut être modélisée par une variable aléatoire X suivant la loi normale d'espérance $\mu = 100$ et d'écart-type $\sigma = 1$. Le réglage des marchines de la chaîne de fabrication permet de modifier la valeur de σ.

1. Calculer la probabilité de l'événement M : « la tablette est mise sur le marché ».
2. On souhaite modifier le réglage des machines de telle sorte que la probabilité de cet événement atteigne 0,97.

   Déteminer la valeur de σ pour que la probabilité de l'événement « la tablette est mise sur le marché » soit égale à 0,97.

Partie B. Contrôle à la réception

Le service contrôle la qualité des fêves de cacao livrées par les producteurs. Un des critères de qualité est le taux d'humidité qui doit être de 7 %. On dit alors que la fève est conforme. L'entreprise a trois fournisseurs différents : le premier fournisseur procure la moitié du stock de fèves, le deuxième 30 % et le dernier apporte 20 % du stock.

Pour le premier, 98 % de sa production respecte le taux d'humidité ; pour le deuxième, qui est un peu moins cher, 90 % de sa production est conforme, et le troisième fournit 20 % de fèves non conformes. On choisit au hasard une fève dans le stock reçu. On note F_i l'événement « la fève provient du fournisseur i », pour i prenant les valeurs 1, 2 ou 3, et C l'événement « la fève est conforme ».

1. Déterminer la probabilité que la fève provienne du fournisseur 1, sachant qu'elle est conforme. Le résultat sera arrondi à 10^{-2}.
2. Le troisième fournisseur ayant la plus forte proportion de fèves non conformes, l'entreprise décide de ne conserver que les fournisseurs 1 et 2. De plus, elle souhaite que 92 % de fèves qu'elle achète soient conformes. Quelle proportion p de fèves doit-elle acheter au fournisseur 1 pour atteindre cet objectif ?

Exercice 4 (6 points)
Commun à tous les candidats.

PARTIE A

Soit u la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $u(x) = \ln(x) + x - 3$.

1. Justifier que la fonction u est strictement croissante sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
2. Démontrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution α comprise entre 2 et 3.
3. En déduire le signe de $u(x)$ en fonction de x.

PARTIE B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)\big(\ln(x) - 2\big) + 2.$$

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

1. Déterminer la limite de la fonction f en 0.
2. a. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;+\infty[$,

$$f(x) = \frac{u(x)}{x^2},$$

   où u est la fonction définie dans la partie A.

   b. En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

PARTIE C

Soit $\mathscr{C}'$ la courbe d'équation $y = \ln(x)$.

1. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;+\infty[$,

$$f(x) - \ln(x) = \frac{2 - \ln(x)}{x}.$$

   En déduire que les courbe $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ ont un seul point commun dont on déterminera les coordonnées.

2. On admet que la fonction H définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par

$$\mathrm{H}(x) = \frac{1}{2}\left(\ln(x)\right)^2$$

   est une primitive de la fonction h définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $h(x) = \ln(x)/x$.

   Calculer

$$\mathrm{I} = \int_1^{\mathrm{e}^2} \frac{2 - \ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

   Interpréter graphiquement ce résultat.

Exercice 1
Commun à tous les candidats.

PARTIE A

1. Traçons la droite passant par le point D et parallèle à la droite (OB). Le point d'intersection avec la droite (SB) est le point U. Voir la figure 4.

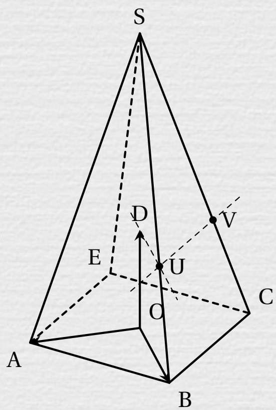


FIGURE 4

2. Les points U et V appartiennent aux deux plans distincts (AEU) et (SBC), donc la droite (UV) est l'intersection des plans (AEU) et (SBC). De plus, la base ABCE de la pyramide est un carré, donc les droites (AE) et (BC) sont parallèles. Nous déduisons du théorème du toit que les droites (UV) et (BC) sont parallèles.

   Le point V est l'intersection de la droite (SC) et de la droite passant par le point U et parallèle à la droite (BC)

3. Pour prouver que le point K est le pied de la hauteur issue du sommet U du trapèze AUVE, il suffit de vérifier que le point K appartient à la droite (AE) et que la droite (KU) est perpendiculaire à la droite (AE).

   Le point K *appartient à la droite* (AE). Les vecteurs $\overrightarrow{AE}(-1;-1;0)$ et $\overrightarrow{AK}(-1/6;-1/6;0)$ vérifient $\overrightarrow{AE} = 6\overrightarrow{AK}$, donc ils sont colinéaires.

La droite (KU) *est perpendiculaire à la droite* (AE). La droite (SB) passe par le point B$(0;1;0)$ et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{SB}(0;1;-3)$, donc

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1+t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = -3t \end{cases}$$

est une représentation paramétrique de la droite (SB). Le point U de cote 1 de la droite (SB) est le point de paramètre $t = -1/3$, donc les coordonnées du point U sont $(0;2/3;1)$ et le vecteur $\overrightarrow{KU}$ a pour coordonnées $(-5/6;5/6;1)$. Le repère étant orthonormé, le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{KU}$ est

$$\overrightarrow{KU} \cdot \overrightarrow{AE} = -\frac{5}{6} \times (-1) + \frac{5}{6} \times (-1) + 1 \times 0 = 0,$$

ce qui prouve que les vecteurs $\overrightarrow{KU}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont orthogonaux.

Partie B

1. Les coordonnées des points A, E et U vérifient l'équation $3x-3y+5z-3=0$; par exemple, pour le point U$(0;2/3;1)$: $3\times 0 - 3 \times 2/3 + 5 \times 1 - 3 = 0$. Par conséquent, $3x-3y+5z-3=0$ est une équation cartésienne du plan (EAU).
2. D'après ce qui précède, le vecteur $\vec{n}(3;-3;5)$ est normal au plan (EAU). Il est donc aussi un vecteur directeur de la droite (d) passant par le point S. Nous en déduisons une représentation paramétrique de la droite (d) :

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = -3t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 3+5t. \end{cases}$$

3. Le point H appartient à la droite (d), donc ses coordonnées sont $(3t;-3t;3+5t)$ pour un réel t. Le point H appartient au plan (EAU), donc le réel t est solution de l'équation

$$3 \times 3t - 3 \times (-3t) + 5 \times (3+5t) - 3 = 0,$$

qui s'écrit plus simplement $43t + 12 = 0$. On trouve $t = -12/43$, donc les coordonnées du point H sont $(-36/43;36/43;69/43)$.

CORRIGÉ

4. Le plan (EAU) partage la pyramide SABCE en deux solides : la pyramide SEAUV et le pentaèdre EABCVU.

   La pyramide SABCE a une base ABCE d'aire $4\times\frac{1}{2}\text{OA}\times\text{OB}=2$ et une hauteur [SO] de longueur 3, donc son volume est

$$\mathcal{V}_{\text{SABCE}}=\frac{1}{3}\times 2\times 3=2.$$

   La pyramide SEAUV a une base AUVE d'aire $5\sqrt{43}/18$ et une hauteur [SH]. Le repère est orthonormé, donc $\text{SH}^2=(-36/43)^2+(36/43)^2+(69/43-3)^2=144/43$, puis $\text{SH}=12/\sqrt{43}$. Le volume de cette pyramide est

$$\mathcal{V}_{\text{SEAUV}}=\frac{1}{3}\times\frac{5\sqrt{43}}{18}\times\frac{12}{\sqrt{43}}=\frac{9}{10}.$$

   Le pentaèdre EABCVU a pour volume

$$\mathcal{V}_{\text{EABCVU}}=\mathcal{V}_{\text{SABCE}}-\mathcal{V}_{\text{SEAUV}}=2-\frac{9}{10}=\frac{11}{10}.$$

   Nous concluons que le plan (EAU) partage la pyramide SABCE en deux solides de volumes différents.

Exercice 2

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.

1. a. La formule de récurrence donne

$$\begin{cases} x_1=0{,}8x_0-0{,}6y_0=0{,}8\times(-3)-0{,}6\times 4=-4{,}8\\ y_1=0{,}6x_0+0{,}8y_0=0{,}6\times(-3)+0{,}8\times 4=1{,}4.\end{cases}$$

   et

$$\begin{cases} x_2=0{,}8x_1-0{,}6y_1=0{,}8\times(-4{,}8)-0{,}6\times 1{,}4=-4{,}68\\ y_2=0{,}6x_1+0{,}8y_1=0{,}6\times(-4{,}8)+0{,}8\times 1{,}4=-1{,}76,\end{cases}$$

   donc les premiers points de la suite (A_n) sont $\text{A}_0(-3;4)$, $\text{A}_1(-4{,}8;1{,}4)$ et $\text{A}_2(-4{,}68;-1{,}76)$.

   b. Voir l'algorithme de la figure 5 page suivante.

Variables	i, x, y, t : nombres réels
Initialisation	x prend la valeur -3
	y prend la valeur 4
Traitement	Pour i allant de 1 à 20
	Construire le point de coordonnées $(x; y)$
	t prend la valeur de x
	x prend la valeur de $0{,}8x - 0{,}6y$
	y prend la valeur de $0{,}6t + 0{,}8y$
	Fin Pour

FIGURE 5

c. Il semble que tous les points A_0, A_1, A_2, … appartiennent au cercle de centre O et de rayon $OA_0 = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$.

2. a. Pour tout entier $n \geqslant 0$, on a

$$\begin{aligned} u_{n+1}^2 &= x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2 \\ &= (0{,}8x_n - 0{,}6y_n)^2 + (0{,}6x_n + 0{,}8y_n)^2 \\ &= 0{,}64x_n^2 - 0{,}96x_n y_n + 0{,}36y_n^2 + 0{,}36x_n^2 + 0{,}96x_n y_n + 0{,}64y_n^2 \\ &= x_n^2 + y_n^2 \\ &= u_n^2. \end{aligned}$$

Comme la suite (u_n) est à termes positifs, il s'ensuit que $u_{n+1} = u_n$. En d'autres termes, (u_n) est la suite constante égale à $u_0 = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$.[1]

b. Pour tout entier $n \geqslant 0$, on a

$$\begin{aligned} x_{n+1} + \mathrm{i}y_{n+1} &= \big((\cos\theta)x_n - (\sin\theta)y_n\big) + \mathrm{i}\big((\sin\theta)x_n + (\cos\theta)y_n\big) \\ &= (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)(x_n + \mathrm{i}y_n), \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$z_{n+1} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} z_n.$$

1. L'abus de langage « suite constante égale à 5 » signifie bien sûr que tous les termes de la suite sont égaux à 5.

CORRIGÉ

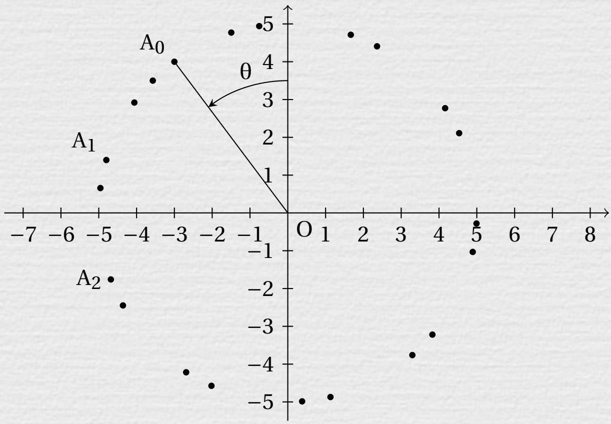


FIGURE 6

c. Nous venons de montrer que (z_n) est une suite géométrique de raison $e^{i\theta}$, donc son terme général est

$$z_n = \left(e^{i\theta}\right)^n z_0 = e^{in\theta} z_0$$

pour tout entier $n \geqslant 0$.

d. On vérifie que

$$|z_0| e^{i(\theta+\pi/2)} = 5e^{i\theta}e^{i\pi/2} = 5(0{,}8+0{,}6i)i = 5(-0{,}6+0{,}8i) = -3+4i = z_0,$$

ce qui montre que $\theta + \pi/2$ est un argument de z_0.

e. Soit n un entier naturel. On déduit de $z_n = e^{in\theta} z_0$ que

$$\arg z_n = \arg e^{in\theta} + \arg z_0 = n\theta + \theta + \frac{\pi}{2} = (n+1)\theta + \frac{\pi}{2}.$$

Le point A_{n+1} est l'image du point A_n par la rotation de centre O et d'angle θ ; en effet,

$$OA_{n+1} = u_{n+1} = u_n = OA_n \quad \text{et} \quad \left(\overrightarrow{OA_n}, \overrightarrow{OA_{n+1}}\right) = \arg z_{n+1} - \arg z_n = \theta.$$

Exercice 2

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité.

Partie A

1. La définition du produit matriciel donne $M^2 = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 1 \\ 10 & 4 & 7 \end{pmatrix}$.

2. On vérifie que $M^3 = M^2 + 8M + 6I$, car

$$M^2 + 8M + 6I = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 1 \\ 10 & 4 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & 8 & 8 \\ 8 & -8 & 8 \\ 32 & 16 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 10 & 11 \\ 12 & 2 & 9 \\ 42 & 20 & 21 \end{pmatrix}.$$

3. De l'égalité précédente, nous déduisons $\frac{1}{6}(M^3 - M^2 - 8M) = I$, puis les égalités

$$M \times \frac{1}{6}(M^2 - M - 8I) = I \quad \text{et} \quad \frac{1}{6}(M^2 - M - 8I) \times M = I$$

qui prouvent que la matrice M est inversible et que

$$M^{-1} = \frac{1}{6}(M^2 - M - 8I).$$

Partie B. Étude d'un cas particulier

1. Le problème revient à trouver trois entiers a, b et c tels que les coordonnées des points $A(1;1)$, $B(-1;-1)$ et $C(2;5)$ vérifient l'équation de la parabole, donc le triplet (a,b,c) est solution du système

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ a - b + c = -1 \\ 4a + 2b + c = 5, \end{cases}$$

dont l'écriture matricielle est

$$M\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

2. On déduit de la question précédente que

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \mathrm{M}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Calculons M^{-1} à l'aide de la formule $\mathrm{M}^{-1} = \frac{1}{6}(\mathrm{M}^2 - \mathrm{M} - 6\mathrm{I})$. Il vient

$$6\mathrm{M}^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 1 \\ 10 & 4 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 6 & 2 & -2 \end{pmatrix},$$

donc

$$\mathrm{M}^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 6 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

La formule

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix},$$

donne $a = 1$, $b = 1$ et $c = -1$.

Partie C. Retour au cas général

1. Supposons que

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \mathrm{M}^{-1} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$$

où a, b, c, p, q et r sont des entiers. Multiplions les deux membres de l'égalité précédente par 6, nous obtenons ainsi

$$\begin{pmatrix} 6a \\ 6b \\ 6c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 6 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3p + q + 2r \\ 3p - 3q \\ 6p + 2q - 2r \end{pmatrix},$$

Il s'ensuit que les entiers p, q et r vérifient le système

$$\begin{cases} -3p + \quad q + 2r \equiv 0 \pmod 6 & (L_1) \\ \quad 3p - 3q \qquad \equiv 0 \pmod 6 & (L_2) \\ \quad 6p + 2q - 2r \equiv 0 \pmod 6 & (L_3) \end{cases}$$

2. À partir du système précédent, nous obtenons

$$\begin{cases} -2q + 2r \equiv 0 \pmod 6 & L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ \quad 3p - 3q \equiv 0 \pmod 6 & L_2 \leftarrow L_2. \end{cases}$$

Comme 2 divise $-2q+2r$, 0 et 6, et 3 divise $3p-3q$, 0 et 6, le système s'écrit plus simplement

$$\begin{cases} q - r \equiv 0 \pmod 3 \\ p - q \equiv 0 \pmod 2. \end{cases}$$

3. a. Les points A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs

$$\overrightarrow{AB}(-2; q-p) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC}(1; r-p)$$

sont colinéaires, c'est-à-dire si et seulement si $-2(r-p)-(q-p)=0$, égalité qui s'écrit plus simplement $2r+q-3p=0$.

b. Soit $p=7$. Il existe une parabole qui passe par les points A, B et C si et seulement si les entiers q et r vérifient le système

$$\begin{cases} q - r \equiv 0 \pmod 3 \\ 7 - q \equiv 0 \pmod 2 \\ 2r + q - 21 \neq 0. \end{cases}$$

L'équation $7-q \equiv 0 \pmod 2$ a pour solution évidente $q=5$. La première devient alors $5-r \equiv 0 \pmod 3$. Une solution est $r=2$. Il reste à s'assurer que les valeurs trouvées de q et r satisfont la troisième équation : $2r+q-21 = 2\times 2+5-21 \neq 0$. Nous pouvons donc choisir $q=5$ et $r=2$.[2]

2. On peut facilement montrer que l'ensemble des solutions (q,r) sont les couples $(7+2k, 7+2k+3l)$ où k et l sont des entiers relatifs tels que $k+l \neq 0$.

Les coefficients a, b et c de l'équation de la parabole qui passent par les points A(1;7), B(−1;5) et C(2;2) s'obtiennent par le calcul suivant :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \mathrm{M}^{-1}\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 6 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

La parabole a pour équation $y = -2x^2 + x + 8$.

Exercice 3

Commun à tous les candidats.

Partie A. Contrôle avant la mise sur le marché

1. Remarquons que

$$\mathbb{P}(\mathrm{M}) = \mathbb{P}(98 \leqslant \mathrm{X} \leqslant 102) = \mathbb{P}(\mu - 2\sigma \leqslant \mathrm{X} \leqslant \mu + 2\sigma),$$

donc $\mathbb{P}(\mathrm{M}) \approx 0{,}95$.

2. Soit Z la variable aléatoire définit par $\mathrm{Z} = (\mathrm{X} - 100)/\sigma$. Nous avons l'équivalence

$$98 \leqslant \mathrm{X} \leqslant 102 \iff \frac{-2}{\sigma} \leqslant \mathrm{Z} \leqslant \frac{2}{\sigma},$$

donc

$$\mathbb{P}(\mathrm{M}) = 0{,}97 \iff \mathbb{P}\left(-\frac{2}{\sigma} \leqslant \mathrm{Z} \leqslant \frac{2}{\sigma}\right) = 0{,}97.$$

La variable aléatoire Z suit la loi normale centrée réduite, donc

$$\mathbb{P}\left(-\frac{2}{\sigma} \leqslant \mathrm{Z} \leqslant \frac{2}{\sigma}\right) = 2\mathbb{P}\left(\mathrm{Z} \leqslant \frac{2}{\sigma}\right) - 1.$$

si bien que

$$\mathbb{P}(\mathrm{M}) = 0{,}97 \iff \mathbb{P}\left(\mathrm{Z} \leqslant \frac{2}{\sigma}\right) = \frac{1 + 0{,}97}{2} = 0{,}985.$$

La calculatrice donne $2/\sigma \approx 2{,}17009$, d'où $\sigma \approx 0{,}9216$.

Partie B. Contrôle à la reception

1. Les événements $\{F_1, F_2, F_3\}$ forment une partition de l'univers. Appliquons la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(C) = \sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}(C \cap F_i) = \sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}(F_i) \times \mathbb{P}_{F_i}(C).$$

La probabilité que la fève proviennent du fournisseur 1, sachant qu'elle est conforme, est donnée par la formule

$$\mathbb{P}_C(F_1) = \frac{\mathbb{P}(C \cap F_1)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{\mathbb{P}(F_1) \times \mathbb{P}_{F_1}(C)}{\sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}(F_i) \times \mathbb{P}_{F_i}(C)}.$$

L'application numérique donne

$$\mathbb{P}_C(F_1) = \frac{0{,}5 \times 0{,}98}{0{,}5 \times 0{,}98 + 0{,}3 \times 0{,}9 + 0{,}2 \times 0{,}8} = \frac{49}{92} \approx 0{,}53$$

2. Soit p la proportion des fèves fournies par le premier fournisseur. Alors la probabilité qu'une fève soit conforme est, selon la formule des probabilités totales, égale à

$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}_{F_1}(C) \times \mathbb{P}(F_1) + \mathbb{P}_{F_2}(C) \times \mathbb{P}_{F_2} = 0{,}98p + 0{,}9(1-p) = 0{,}08p + 0{,}9.$$

Donc pour avoir 92 % de fèves conformes, il faut et il suffit que p vérifie l'équation affine

$$0{,}08p + 0{,}9 = 0{,}92,$$

dont la solution est $p = 0{,}02/0{,}08 = 0{,}25$. L'entreprise doit donc acheter 25 % de ses fèves au fournisseur 1.

Exercice 4

Commun à tous les candidats.

Partie A

1. La fonction u est la somme des deux fonctions strictement croissantes v et w définies sur $]0; +\infty[$ par $v(x) = \ln(x)$ et $w(x) = x - 3$, donc la fonction u est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

Solution alternative. La fonction u est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme somme des deux fonctions dérivables v et w. Pour tout réel $x > 0$, on a $u'(x) = v'(x) + w'(x) = 1/x + 1 > 0$, donc la fonction u est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

2. La fonction u est continue (somme des deux fonctions continues v et w) sur l'intervalle $[2;3]$, de plus

$$u(2) = \ln(2) + 2 - 3 = \ln(2) - 1 < \ln(\mathrm{e}) - 1 = 0$$

et

$$u(3) = \ln(3) + 3 - 3 = \ln(3) > \ln(\mathrm{e}) = 1 > 0,$$

donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $u(x) = 0$ possède au moins une solution sur l'intervalle $[2;3]$.

Comme la fonction u est strictement monotone, l'équation $u(x) = 0$ a au plus une solution sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

Finalement, nous avons montré que l'équation $u(x) = 0$ possède une unique solution α sur l'intervalle $]0;+\infty[$ et que $2 \leqslant \alpha \leqslant 3$.

3. La fonction u est strictement croissante et $u(\alpha) = 0$, donc

$$u(x)\begin{cases} < 0 & \text{si } 0 < x < \alpha \\ = 0 & \text{si } x = \alpha \\ > 0 & \text{si } x > \alpha. \end{cases}$$

Partie B

1. On a

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^+} 1 - \dfrac{1}{x} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0} \ln(x) - 2 = -\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = +\infty.$$

2. a. Les fonctions $x \mapsto 1 - 1/x$ et $x \mapsto \ln(x) - 2$ sont dérivables sur l'intervalle $]0;+\infty[$, donc la fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$, et pour tout réel $x > 0$, on a

$$f'(x) = \frac{1}{x^2}\big(\ln(x) - 2\big) + \left(1 - \frac{1}{x}\right)\frac{1}{x} = \frac{\ln(x) + x - 3}{x^2} = \frac{u(x)}{x^2}.$$

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\|\ +\infty$	$\searrow$	$-\dfrac{\alpha^2-4\alpha+1}{\alpha}$	$\nearrow$	$+\infty$

FIGURE 7 – *Tableau de variation de la fonction f.*

b. Étant donné que $x^2 > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $u(x)$, d'où le tableau de variation de la fonction f de la figure 7).

Le minimum de la fonction f est

$$f(\alpha) = \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)\big(\ln(\alpha) - 2\big) + 2.$$

Étant donné que $u(\alpha) = 0$, on a $\ln(\alpha) = 3 - \alpha$, donc

$$f(\alpha) = \frac{\alpha - 1}{\alpha}(1 - \alpha) + 2 = -\frac{(\alpha-1)^2 - 2\alpha}{\alpha} = -\frac{\alpha^2 - 4\alpha + 1}{\alpha}$$

PARTIE C

1. Pour tout réel $x > 0$, on a

$$f(x) = \ln(x) - 2 - \frac{\ln(x) - 2}{x} + 2 = \ln(x) + \frac{2 - \ln(x)}{x},$$

donc

$$f(x) - \ln(x) = \frac{2 - \ln(x)}{x}.$$

Les abscisses des points communs des courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont les solutions sur $]0\,;+\infty[$ de l'équation $f(x) = \ln(x)$. Or,

$$f(x) = \ln(x) \iff \ln(x) = 2 \iff \mathrm{e}^{\ln(x)} = \mathrm{e}^2 \iff x = \mathrm{e}^2,$$

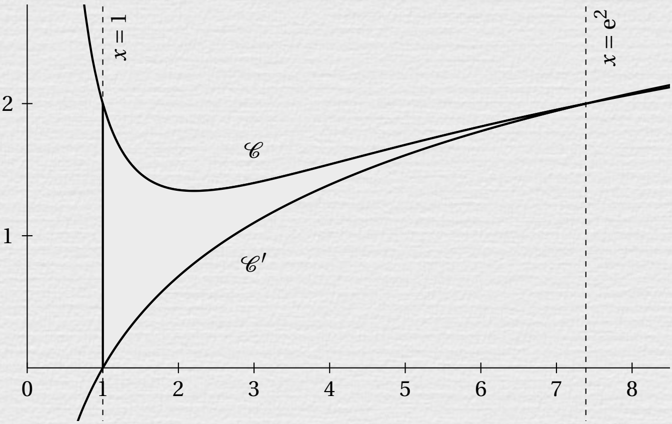


FIGURE 8

donc les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ ont un unique point d'intersection de coordonnées $(\mathrm{e}^2 ; \ln(\mathrm{e}^2)) = (\mathrm{e}^2 ; 2)$.

2. La linéarité de l'intégrale permet d'écrire

$$\begin{aligned}
\mathrm{I} &= \int_1^{\mathrm{e}^2} \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x - \int_1^{\mathrm{e}^2} \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= \big[2\ln(x)\big]_1^{\mathrm{e}^2} - \big[\mathrm{H}(x)\big]^2 \\
&= 2\ln(\mathrm{e}^2) - 2\ln(1) - \frac{1}{2}\big(\ln(\mathrm{e}^2)\big)^2 + \frac{1}{2}\big(\ln(1)\big)^2 \\
&= 4 - 2 \\
&= 2
\end{aligned}$$

La fonction $x \mapsto 2 - \ln(x)$ est décroissante sur $[1 ; \mathrm{e}^2]$, donc pour tout $x \in [1 ; \mathrm{e}^2]$, on a $2 - \ln(x) \geqslant 2 - \ln(\mathrm{e}^2) = 0$, puis $\big(2 - \ln(x)\big)/x \geqslant 0$. De plus, $1 \leqslant \mathrm{e}^2$. Nous en déduisons que I est l'aire géométrique de la région du plan délimitée par les courbes $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \mathrm{e}^2$. L'aire de cette région est donc 2 u.a.

Sujet 4

Centres étrangers

10 juin 2015

Exercice 1 (4 points)
Commun à tous les candidats.

Tous les résultats demandés dans cet exercice seront arrondis au millième. Les parties A, B et C sont indépendantes.

Un fournisseur produit deux sortes de cadenas. Les uns sont *premier prix*, et les autres sont *haut de gamme*. Un magasin de bricolage dispose d'un stock de cadenas provenant de ce fournisseur ; ce stock comprend un grand nombre de cadenas de chaque type.

PARTIE A

1. Le fournisseur affirme que, parmi les cadenas *haut de gamme*, il n'y a pas plus de 3 % de cadenas défectueux dans sa production. Le responsable du magasin de bricolage désire vérifier la validité de cette affirmation dans son stock ; à cet effet, il prélève un échantillon aléatoire de 500 cadenas *haut de gamme*, et en trouve 19 qui sont défectueux.

   Ce contrôle remet-il en cause le fait que le stock ne comprenne pas plus de 3 % de cadenas défectueux ? On pourra utiliser pour cela un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %.

2. Le responsable du magasin souhaite estimer la proportion de cadenas défectueux dans son stock de cadenas *premier prix*. Pour cela il prélève un échantillon de 500 cadenas *premier prix*, parmi lesquels 39 se révèlent défectueux.

   Donner un intervalle de confiance de cette proportion au niveau de confiance 95 %.

PARTIE B

D'après une étude statistique faite sur plusieurs mois, on admet que le nombre X de cadenas *premier prix* vendus par mois dans le magasin de bricolage peut être modélisé par une variable aléatoire qui suit la loi normale de moyenne $\mu = 750$ et d'écart-type $\sigma = 25$.

1. Calculer $\mathbb{P}(725 \leqslant X \leqslant 775)$.
2. Le responsable du magasin veut connaître le nombre n de cadenas *premier prix* qu'il doit avoir en stock en début de mois, pour que la probabilité d'être en rupture de stock en cours de mois soit inférieure à 0,05. *On ne réalimente pas le stock en cours de mois.*

   Déterminer la plus petite valeur de l'entier n remplissant cette condition.

PARTIE C

On admet maintenant que, dans le magasin :

— 80 % des cadenas proposés à la vente sont *premier prix*, les autres *haut de gamme* ;

— 3 % des cadenas *haut de gamme* sont défectueux ;

— 7 % des cadenas sont défectueux.

On prélève au hasard un cadenas dans le magasin. On note :

— p la probabilité qu'un cadenas *premier prix* soit défectueux ;

— H l'événement : « le cadenas prélevé est *haut de gamme* » ;

— D l'événement : « le cadenas prélevé est défectueux ».

1. Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Exprimer en fonction de p la probabilité $\mathbb{P}(D)$. En déduire la valeur du réel p. Le résultat obtenu est-il cohérent avec celui de la question A-2 ?
3. Le cadenas prélevé est en bon état. Déterminer la probabilité que ce soit un cadenas *haut de gamme*.

Exercice 2 (4 points)
Commun à tous les candidats.

Pour chacun des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on note S l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie les deux conditions

$$|z-1| = |z-\mathrm{i}| \quad \text{et} \quad |z-3-2\mathrm{i}| \leqslant 2.$$

Sur la figure 1, on a représenté le cercle de centre le point de coordonnées $(3;2)$ et de rayon 2, et la droite d'équation $y = x$. Cette droite coupe le cercle en deux points A et B.

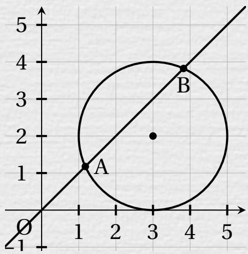


FIGURE 1

Affirmation 1. L'ensemble S est le segment [AB].

2. **Affirmation 2.** Le nombre complexe $(\sqrt{3}+\mathrm{i})^{1515}$ est un réel.

Pour les questions 3 et 4, on considère les points $\mathrm{E}(2;1;-3)$, $\mathrm{F}(1;-1;2)$ *et* $\mathrm{G}(-1;3;1)$ *dont les coordonnées sont définies dans un repère orthonormé de l'espace.*

3. **Affirmation 3.** Une représentation paramétrique de la droite (EF) est donnée par

$$\left\{\begin{array}{l} x = 2t \\ y = -3+4t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 7-10t. \end{array}\right.$$

4. **Affirmation 4.** Une mesure en degré de l'angle géométrique $\widehat{\mathrm{FEG}}$, arrondie au degré, est 50°.

Exercice 3 (7 points)
Commun à tous les candidats.

Soit a un nombre réel fixé non nul.

Le but de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie par $u_0 = a$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = \mathrm{e}^{2u_n} - \mathrm{e}^{u_n}$.

On remarquera que cette égalité peut aussi s'écrire $u_{n+1} = \mathrm{e}^{u_n}\left(\mathrm{e}^{u_n} - 1\right)$.

1. Soit g la fonction définie pour tout réel x par $g(x) = \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x} - x$.
   a. Calculer $g'(x)$ et prouver que, pour tout réel x,
   $$g'(x) = \left(\mathrm{e}^{x} - 1\right)\left(2\mathrm{e}^{x} + 1\right).$$
   b. Déterminer les variations de la fonction g et donner la valeur de son minimum.
   c. En remarquant que $u_{n+1} - u_n = g(u_n)$, étudier le sens de variation de la suite (u_n).
2. Dans cette question, on suppose que $a \leqslant 0$. [1]
   a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant 0$.
   b. Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) est convergente.
   c. Dans les cas où a vaut 0, donner la limite de la suite (u_n).
3. Dans cette question, on suppose que $a > 0$.
   La suite (u_n) étant croissante, la question 1 permet d'affirmer que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant a$.
   a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} - u_n \geqslant g(a)$.
   b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n \geqslant a + ng(a)$.
   c. Déterminer la limite de la suite (u_n).
4. Dans cette question, on prend $a = 0{,}02$.
   L'algorithme de la figure 2 page suivante a pour but de déterminer le plus petit entier n tel que $u_n > \mathrm{M}$, où M désigne un réel positif. Cet algorithme est incomplet.
   a. Sur la copie, recopier la partie « Traitement » en la complétant.
   b. À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur que cet algorithme affichera si $\mathrm{M} = 60$.

1. Il y a manifestement une erreur car l'énoncé commence par « Soit a un nombre réel fixé non nul ».

Variables	n est un entier, u et M sont deux réels
Initialisation	u prend la valeur 0,02
	n prend la valeur 0
	Saisir la valeur de M
Traitement	Tant que ....
	....
	....
	Fin tant que
Sortie	Afficher n

FIGURE 2

Exercice 4 (5 points)
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.

Les partie A et B sont indépendantes.

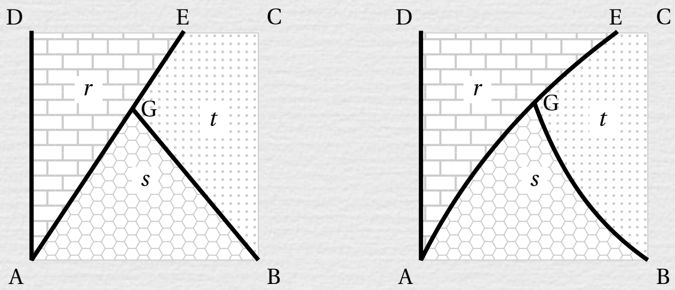
Le fabricant de cadenas de la marque « K » désire imprimer un logo pour son entreprise. Ce logo a la forme d'une lettre majuscule K stylisée, inscrite dans un carré ABCD, de côté une unité de longueur, et respectant les conditions C1 et C2 suivantes.

— Condition C1. La lettre K doit être constituée de trois lignes :
  — une des lignes est le segment [AD] ;
  — une deuxième ligne a pour extrémités le point A et le point E du segment [DC] ;
  — la troisième ligne a pour extrémité le point B et un point G situé sur la deuxième ligne.

— Condition C2. L'aire de chacune des trois surfaces délimiées par les trois lignes dessinées dans le carré doit être comprise entre 0,3 et 0,4, l'unité d'aire étant celle du carré. Ces aires sont notées r, s, t sur la figure 3 page suivante.

Un atelier de design propose deux dessins possibles, représentés sur la figure 3 page suivante.

Pour mener les études qui suivent, on se place dans le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.



Proposition A *Proposition B*

FIGURE 3

PARTIE A. ÉTUDE DE LA PROPOSITION A

Dans cette proposition les trois lignes sont des segments et les trois aires sont égales : $r = s = t = 1/3$.

Déterminer les coordonnées des points E et G.

PARTIE B. ÉTUDE DE LA PROPOSITION B

Cette proposition est caractérisée par les deux modalités suivantes :

— la ligne d'extrémités A et E est une portion de la représentation graphique de la fonction f définie pour tout réel $x \geqslant 0$ par $f(x) = \ln(2x+1)$;

— la ligne d'extrémités B et G est unr portion de la représentation graphique de la fonction g définie pour tout réel $x > 0$ par $g(x) = k(1-x)/x$, où k est un réel positif qui sera déterminé.

1. a. Déterminer l'abscisse du point E.

   b. Déterminer la valeur du réel k, sachant que l'abscisse du point G est égale à 0,5.

2. a. Démontrer que la fonction f admet pour primitive la fonction F définie pour tout réel $x \geqslant 0$ par $\mathrm{F}(x) = (x+0{,}5)\ln(2x+1) - x$.

   b. Démontrer que $r = \mathrm{e}/2 - 1$.

3. Déterminer une primitive G de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

4. On admet que les résultats précédents permettent d'établir que

$$s = \left(\ln(2)\right)^2 + \frac{\ln(2) - 1}{2}.$$

La proposition B remplit-elle les conditions imposées par le fabricant ?

Exercice 4 (5 points)
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité.

Dans cet exercice, on s'interesse aux triplets d'entiers naturels non nuls (x, y, z) tels que $x^2 + y^2 = z^2$. Ces triplets seront nommés *triplets pythagoricien* en référence aux triangles rectangles dont ils mesurent les côtés, et notés en abrégé TP.

Ainsi $(3, 4, 5)$ est un TP car $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$.

Partie A. Généralités

1. Démontrer que, si (x, y, z) est un TP, et p est un entier naturel non nul, alors le triplet (px, py, pz) est lui aussi un TP.
2. Démontrer que, si (x, y, z) est un TP, alors les entiers naturels x, y et z ne peuvent pas être tous les trois impairs.
3. Pour cette question, on admet que tout entier naturel non nul n peut s'écrire d'une façon unique sous la forme du produit d'une puissance de 2 par un entier impair : $n = 2^\alpha \times k$ où k est un entier naturel (éventuellement nul) et k un entier naturel impair. L'écriture $n = 2^n \times k$ est nommé *décomposition* de n.

   Voici par exemple les décompositions des entiers 9 et 120 : $9 = 2^0 \times 9$, $120 = 2^3 \times 15$.

   a. Donner la décomposition de l'entier 192.

   b. Soient x et z deux entiers naturels non nuls, dont les décompositions sont $x = 2^n \times k$ et $z = 2^\beta \times m$. Écrire la décomposition des entiers naturels $2x^2$ et z^2.

   c. En examinant l'exposant de 2 dans la décomposition de $2x^2$ et dans celle de z^2, montrer qu'il n'existe pas de couple d'entiers naturels non nuls (x, z) tels que $2x^2 = z^2$.

On admet que la question A-3, permet d'établir que les trois entiers naturels x, y et z sont deux à deux distincts. Comme de plus les entiers naturels x, y jouent un rôle symétrique, dans la suite, pour tout TP (x, y, z), les trois entiers naturels x, y et z seront rangés dans l'ordre suivant : $x < y < z$.

Partie B. Recherche de triplets pythagoriciens contenant l'entier 2015

1. Décomposer en produit de facteurs premiers l'entier 2015 puis, en utilisant le TP donné dans le préambule, déterminer un TP de la forme $(x, y, 2015)$.
2. On admet que, pour tout entier naturel n,

$$(2n+1)^2 + (2n^2+2n)^2 = (2n^2+2n+1)^2.$$

   Déterminer un TP de la forme $(2015, y, z)$.
3. a. En remarquant que $403^2 = 169 \times 961$, déterminer un couple d'entiers naturels non nuls (x, z) tels que $z^2 - x^2 = 403^2$ avec $x < 403$.

   b. En déduire un TP de la forme $(x, 2015, z)$.

Exercice 1

Commun à tous les candidats.

PARTIE A

1. Selon le fournisseur, la probabilité pour q'un cadenas *haut de gamme* soit défectueux est au plus égale à $p = 0{,}03$. Le responsable du magasin teste les cadenas sur un échantillon de $n = 500$ pièces. Comme $n \geqslant 30$, $np = 15 \geqslant 5$ et $n(1-p) \leqslant 485$, un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % est égale à

$$\begin{aligned} \mathrm{I} &= \left[p - 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\,;p + 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right] \\ &= \left[0{,}03 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}03 \times (1-0{,}03)}{500}}\,;0{,}03 + 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}03 \times (1-0{,}03)}{500}}\right], \end{aligned}$$

soit en arrondissant à 10^{-3}, $\mathrm{I} \approx [0{,}015\,;0{,}045]$. Le responsable observe une fréquence de cadenas défectueux égale à $f = 19/500 = 0{,}038$. Puisque $f \in \mathrm{I}$, le responsable du magasin n'a aucune raison de remettre en cause le taux de cadenas *haut de gamme* défectueux annoncé par l'entreprise.

2. La taille $n = 500$ de l'échantillon de cadenas *premier prix* et la proportion $f = 39/500 = 0{,}078$ de cadenas défectueux de cet échantillon vérifient les inégalités $n \geqslant 30$, $nf = 39^g eq5$ et $n(1-f) = 461 \geqslant 5$, donc un intervalle de confiance de la proportion de cadenas défectueux au niveau de confiance 95 % est égale à

$$\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}\,;f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[0{,}078 - \frac{1}{\sqrt{500}}\,;0{,}078 + \frac{1}{\sqrt{500}}\right],$$

soit, en arrondissant à 10^{-3} près,

$$[0{,}033\,;0{,}123].$$

PARTIE B

1. L'événement $\{725 \leqslant \mathrm{X} \leqslant 775\}$ est de la forme $\{\mu - \sigma \leqslant \mu + \sigma\}$, donc

$$\mathbb{P}(725 \leqslant \mathrm{X} \leqslant 775) \approx 0{,}683.$$

Si vous ne connaissez pas par cœur la probabilité à 10^{-3} près de cet événement, utilisez votre calculatrice.

2. Le nombre de cadenas *premier prix* que le responsable du magasin doit avoir dans le stock en début de mois est la plus petite solution entière de l'inéquation
$$\mathbb{P}(X \leqslant x) \leqslant 0{,}05.$$
La fonction $x \mapsto \mathbb{P}(X \leqslant x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, il suffit donc de résoudre l'équation $\mathbb{P}(X \leqslant x) = 0{,}05$. Avec la calculatrice, on trouve $x = 708{,}88$. Nous en déduisons que le responsable doit prévoir un stock d'au moins 709 cadenas.

Exercice 2

Commun à tous les candidats.

1. *L'affirmation 1 est vraie.* Soit I l'image de 1, J celle du nombre i et Ω celle du nombre $3+2\mathrm{i}$. On a
$$|z-1| = \mathrm{IM}, \quad |z-\mathrm{i}| = \mathrm{JM} \quad \text{et} \quad |z-3-2\mathrm{i}| = \Omega\mathrm{M}.$$
On aura donc $\mathrm{M}(z) \in \mathrm{S}$ si, et seulement si, on a
$$\mathrm{IM} = \mathrm{JM} \quad \text{et} \quad \Omega\mathrm{M} \leqslant 2.$$
L'égalité IM = JM caractérise la médiatrice du segment [IJ] qui se trouve être la droite d'équation $y = x$. L'inégalité $\Omega\mathrm{M} \leqslant 2$ caractérise les points du disque de centre Ω et de rayon 2. De tout ceci, nous déduisons que S est l'intersection de la droite d'équation $y = x$ avec le disque de centre Ω et de rayon 2, soit le segment [AB].

2. *L'affirmation 2 est fausse.* Étant donné que $\sqrt{3}+\mathrm{i} \neq 0$, alors $(\sqrt{3}+\mathrm{i})^{1515} \neq 0$, donc le complexe $(\sqrt{3}+\mathrm{i})^{1515}$ est réel si, et seulement si, on a
$$\arg(\sqrt{3}+\mathrm{i})^{1515} \equiv 0 \pmod{\pi}.$$
On a $\sqrt{3}+\mathrm{i} = 2(\sqrt{3}/2+\mathrm{i}/2) = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6}$, donc
$$\arg(\sqrt{3}+\mathrm{i})^{1515} \equiv 1515 \times \arg(\sqrt{3}+\mathrm{i}) \equiv 1515 \times \frac{\pi}{6} \pmod{2\pi},$$

Or $1515 \times \pi/6 = 505 \times \pi/2 = \pi/2 + 252 \times \pi$, donc

$$\arg(\sqrt{3}+\mathrm{i})^{1515} \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}.$$

Nous en déduisons que $1+\mathrm{i}\sqrt{3}$ n'est pas un nombre réel.

3. *L'affirmation 3 est vraie.* Nous avons bien là une représentation paramétrique d'une droite. Elle donne les coordonnées du point E pour $t = 1$ et les coordonnées du point F pour $t = 1/2$. La représentation proposée est donc bien une représentation paramétrique de la droite (EF).

4. *L'affirmation 4 est vraie.* Le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{EF}}(-1:-2;5)$ et $\overrightarrow{\mathrm{EG}}(-3;2;4)$ est donné par la formule $\overrightarrow{\mathrm{EF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{EG}} = \mathrm{EF} \times \mathrm{EG} \times \cos(\widehat{\mathrm{FEG}})$, d'où l'on déduit

$$\cos(\widehat{\mathrm{FEG}}) = \frac{\overrightarrow{\mathrm{EF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{EG}}}{\mathrm{EF}\times\mathrm{EG}}.$$

Le repère étant orthonormé, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{EF} &= \sqrt{(-1)^2+(-2)^2+5^2} = \sqrt{30}\\ \mathrm{EG} &= \sqrt{(-3)^2+2^2+4^2} = \sqrt{29}\\ \overrightarrow{\mathrm{EF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{EG}} &= -1\times(-3)+(-2)\times 2+5\times 4 = 19,\end{aligned}$$

Finalement

$$\cos(\widehat{\mathrm{FEG}}) = \frac{19}{\sqrt{30}\times\sqrt{29}} = \frac{19}{\sqrt{870}},$$

donc une mesure en degré de l'angle géométrique $\widehat{\mathrm{FEG}}$, arrondie au degré, est 50°.

Exercice 3

Commun à tous les candidats.

1. a. Pour tout réel x, on a $g'(x) = 2\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x} - 1$. Posons $\mathrm{X} = \mathrm{e}^{x}$. Alors

$$g'(x) = 2\mathrm{X}^2 - \mathrm{X} - 1.$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

FIGURE 4 – *Tableau de variation de la fonction g.*

Le polynôme du second degré $2X^2 - X - 1$ admet 1 pour racine évidente. Le produit de ses racines [2] est $-1/2$, donc la deuxième racine est $-1/2$. Nous en déduisons la factorisation

$$2X^2 - X - 1 = 2\left(X + \frac{1}{2}\right)(X-1) = (2X+1)(X-1)$$

et nous concluons que pour tout réel x,

$$g'(x) = (2e^x + 1)(e^x - 1).$$

Remarque. Nous pouvions développer $(2e^x + 1)(e^x - 1)$. C'était plus simple, mais quel manque de classe !

b. L'exponentielle étant une fonction à valeurs positives, $g'(x)$ est du signe de $e^x - 1$. La fonction $x \mapsto e^x - 1$ est strictement croissante et s'annule en 0. Nous en déduisons le tableau de variation de la figure 4.

c. Pour tout entier $n \geqslant 0$, on a $u_{n+1} = e^{2u_n} - e^{u_n}$, donc

$$u_{n+1} - u_n = e^{2u_n} - e^{u_n} - u_n = g(u_n).$$

Étant donné que la fonction g est positive, nous en déduisons que la suite (u_n) est croissante.

2. Soit $ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré à coefficients réels (ou complexes). Ses racines x_1 et x_2 vérifient les *relations coefficients-racines* $x_1 + x_2 = -b/a$ et $x_1 x_2 = c/a$.

2. a. Démontrons par récurrence que la proposition

$$\mathscr{P}(n): \quad u_n \leqslant 0$$

est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$.

$\mathscr{P}(0)$ *est vraie.* En effet, on a $u_0 = a \leqslant 0$.

$\mathscr{P}(n) \implies \mathscr{P}(n+1)$. Fixons un entier $n \geqslant 0$ et supposons que $u_n \leqslant 0$. Nous devons montrer que $u_{n+1} \leqslant 0$. La fonction exponentielle est croissante, donc $\mathrm{e}^{u_n} - 1 \leqslant \mathrm{e}^0 - 1$, soit $\mathrm{e}^{u_n} - 1 \leqslant 0$. De plus $\mathrm{e}^{u_n} > 0$, donc

$$u_{n+1} = \mathrm{e}^{u_n}(\mathrm{e}^{u_n} - 1) \leqslant 0.$$

Conclusion. D'après le principe de la démonstration par récurrence, on a $u_n \leqslant 0$ pour tout entier $n \geqslant 0$.

b. Nous avons démontré que la suite (u_n) est croissante et majorée par 0, par conséquent elle converge.

c. Soit $a = 0$. La suite (u_n) est croissante, majorée par 0 et son premier terme est nul, donc elle est constante et nous concluons que sa limite est 0.

> *Remarque.* Soit $a \leqslant 0$. Déterminons la limite ℓ de la suite (u_n). Il est clair que $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$ et comme la fonction g est continue, on a $\lim_{n\to+\infty} g(u_n) = g(l)$. Faisons tendre n vers $+\infty$ dans l'égalité $u_{n+1} - u_n = g(u_n)$. Nous obtenons ainsi $g(\ell) = 0$. L'étude faite de la fonction g permet de conclure que $\ell = 0$.

3. a. Pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} - u_n = g(u_n)$. Or la fonction g est croissante et $u_n \geqslant a$, il s'ensuit que $u_{n+1} - u_n \geqslant g(a)$.

b. Montrons par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 0$, on a

$$u_n \geqslant a + ng(a).$$

Initialisation. Pour $n = 0$, l'inégalité s'écrit $u_0 \geqslant a$. Elle est vraie.

Hérédité. Soit $k \geqslant 0$ un entier. Supposons que $u_k \geqslant a + kg(a)$. Nous devons montrer que $u_{k+1} \geqslant a + (k+1)g(a)$. D'après la question précédente,

$$u_{k+1} \geqslant u_k + g(a).$$

Appliquons l'hypothèse de récurrence. Il vient

$$u_{k+1} \geqslant a + kg(a) + g(a),$$

soit

$$u_{k+1} \geqslant a + (k+1)g(a).$$

Conclusion. L'inégalité est vraie pour $n = 0$ et si elle est vraie pour $n = k$ alors elle est vraie pour $n = k+1$, donc d'après le principe de la démonstration par récurrence, l'inégalité $u_n \geqslant a + ng(a)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$.

> *Remarque.* Une autre démonstration possible est la suivante. L'inégalité $u_{n+1} - u_n \geqslant a$ suggère d'écrire u_n comme la somme des termes d'une *série téléscopique* :
>
> $$u_n = (u_n - u_{n-1}) + (u_{n-1} - u_{n-2}) + \cdots + (u_2 - u_1) + (u_1 - u_0) + u_0,$$
>
> que l'on peut aussi écrire plus brièvement
>
> $$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) + u_0.$$
>
> On sait que pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, $u_{k+1} - u_k \geqslant g(a)$, d'où
>
> $$u_n \geqslant ng(a) + a.$$

c. D'après l'étude faites de la fonction g, nous savons que $g(a) > 0$, donc $\lim_{n\to+\infty} a + ng(a) = +\infty$. L'inégalité démontrée à la question précédente permet de conclure que la suite (u_n) tend vers $+\infty$.

4. a. Voir la figure 5 page suivante.

   b. L'execution de l'algorithme par la calculatrice avec $\mathrm{M} = 60$ donne $n = 36$.

Exercice 4

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.

Variables	n est un entier, u et M sont deux réels
Initialisation	u prend la valeur 0,02
	n prend la valeur 0
	Saisir la valeur de M
Traitement	Tant que $u \leqslant$ M
	u prend la valeur $e^{2u} - e^u$
	n prend la valeur $n+1$
	Fin tant que
Sortie	Afficher n

FIGURE 5

PARTIE A. ÉTUDE DE LA PROPOSITION A

Le point E a pour coordonnées $(x_E; 1)$ où x_E est un réel tel que $0 < x_E \leqslant 1$. L'aire du triangle ADE de base AD = 1 et de hauteur DE = x_E est $r = x_E/2$. La condition $r = 1/3$ donne $x_E = 2/3$: les coordonnées du point E sont $(2/3; 1)$.

La droite (AE) passe par l'origine du repère et son coefficient directeur est $1/(2/3) = 3/2$, donc $y = 3x/2$ est une équation cartésienne. Le point G appartient au segment [AE], donc ses coordonnées sont de la forme $(x_G, 3x_G/2)$ avec x_G réel tel que $0 \leqslant x_G \leqslant 2/3$. L'aire du triangle ABG de base AB = 1 et de hauteur $3x_G/2$ est $s = 3x_G/4$. La condition $s = 1/3$ donne $x_G = 4/9$: les coordonnées du point G sont $(4/9; 2/3)$.

PARTIE B. ÉTUDE DE LA PROPOSITION B

1. a. Le point $E(x_E; 1)$ appartient à la courbe représentative de la fonction f, donc x_E est la solution de l'équation $f(x) = 1$ sur $[0; 1]$ que nous résolvons ainsi :

$$f(x) = 1 \iff \ln(2x+1) = 1 \iff 2x+1 = e \iff x = \frac{e-1}{2}.$$

Le point E a pour coordonnées $((e-1)/2; 1)$.

b. Le point $G(1/2; y_G)$ appartient à la courbe représentative de la fonction f, donc $y_G = f(1/2) = \ln(2)$. Le point G appartient aussi à la courbe représentative de la fonction g, donc $g(1/2) = y_G = \ln(2)$. D'après la définition de la fonction g, on a $g(1/2) = k$, d'où nous déduisons que $k = \ln(2)$. On vérifie que $k > \ln(1) = 0$.

2. a. Les fonctions $x \mapsto x + 0,5$, $x \mapsto \ln(2x+1)$ et $x \mapsto -x$ sont dérivables sur l'intervalle $[0\,;+\infty]$, donc par produit et somme, la fonction F est dérivable. Pour tout réel $x \geqslant 0$, on a

$$\mathrm{F}'(x) = 1 \times \ln(2x+1) + (x+0,5) \times \frac{2}{2x+1} - 1 = \ln(2x+1).$$

b. Soit $\mathscr{A}$ l'aire du rectangle construit sur les côtés [AD] et [DE], et $\mathscr{A}'$ l'aire de la région délimitée par l'axe des abscisses, la courbe représentative de la fonction f, et les droites d'équations $x = 0$ et $x = (\mathrm{e}-1)/2$. Alors l'aire de la région ADE est égale à

$$r = \mathscr{A} - \mathscr{A}' = \mathrm{AD} \times \mathrm{DE} - \int_0^{(\mathrm{e}-1)/2} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}-1}{2} - \big[\mathrm{F}(x)\big]_0^{(\mathrm{e}-1)/2}$$

avec

$$\mathrm{F}\left(\frac{\mathrm{e}-1}{2}\right) = \left(\frac{\mathrm{e}-1}{2} + 0,5\right)\ln\left(2 \times \frac{\mathrm{e}-1}{2} + 1\right) - \frac{\mathrm{e}-1}{2} = \frac{\mathrm{e}}{2}\ln(\mathrm{e}) - \frac{\mathrm{e}-1}{2} = \frac{1}{2}$$

et $\mathrm{F}(0) = 0$, donc

$$r = \frac{\mathrm{e}-1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\mathrm{e}}{2} - 1.$$

3. Pour tout réel $x > 0$, on a $g(x) = \ln(2)(1/x - 1)$, par conséquent la fonction G définie sur $]0\,;+\infty[$ par

$$\mathrm{G}(x) = \ln(2)\big(\ln(x) - x\big)$$

est une primitive sur $]0\,;+\infty[$ de la fonction g.

4. Nous devons juste vérifier la condition C2. La calculatrice fournit les encadrements

$$0,35 < r < 0,36 \quad \text{et} \quad 0,32 < s < 0,33,$$

à partir desquels nous déduisons l'encadrement de $r + s$,

$$0,67 < r + s < 0,69$$

puis celui de $t = 1 - (r + s)$,

$$0,31 < t < 0,33.$$

Le logo de la proposition B vérifient les conditions imposées par le fabricant.

Exercice 4

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité.

Partie A. Généralités

1. Soit $p \geqslant 1$ un entier et (x, y, z) un triplet pythagoricien, alors

$$(px)^2 + (py)^2 = p^2(x^2 + y^2) = p^2z^2 = (pz)^2,$$

où px, py et pz sont des entiers naturels non nuls, donc (px, py, pz) est un triplet pythagoricien.

2. Soit (x, y, z) un triplet d'entiers impairs. Alors x^2, y^2 et z^2 sont également impairs et $x^2 + y^2$ est pair. On ne peut donc pas avoir $x^2 + y^2 = z^2$. Par conséquent, si (x, y, z) est un triplet pythagoricien, alors les entiers x, y et z ne peuvent pas être tous les trois impairs.

3. a. La décomposition de 192 est $192 = 2^2 \times 43$.

   b. Soit $x = 2^\alpha \times k$ et $z = 2^\beta \times m$ des décompositions. Alors $2x^2 = 2^{2\alpha+1} \times k^2$ et $z^2 = 2^{2\beta} \times m^2$ sont également des décompositions puisque k^2 et m^2, carrés d'entiers impairs, sont impairs.

   c. Supposons qu'il existe un couple d'entiers naturels non nuls (x, z) tel que $2x^2 = z^2$. Soit $x = 2\alpha \times k$ et $z = 2\beta \times m$ leurs décompositions, il vient

$$2^{2\alpha+1} \times k^2 = 2^{2\beta} \times m^2$$

   Du fait de la question précédente et de l'unicité d'une décomposition, on a donc $2\alpha + 1 = 2\beta$ et $k = m$, d'où $\beta - \alpha = -1/2$, ce qui est impossible étant donné que α et β sont des entiers. Nous avons montré qu'il n'existe pas de couples d'entiers naturels (x, z) tel que $2x^2 = z^2$.

PARTIE B. RECHERCHE DE TRIPLETS PYTHAGORICIENS CONTENANT L'ENTIER 2015

1. La décomposition de l'entier 2015 en produit de facteurs premiers est $2015 = 5 \times 13 \times 31$. On sait que $(3, 4, 5)$ est un triplet pythagoricien et que $2015 = 5 \times 403$, donc d'après la question A-1, le triplet $(403 \times 3, 403 \times 4, 2015)$ soit $(1\,209, 1\,612, 2\,015)$ est un triplet pythagoricien.
2. L'identité $(2n+1)^2 + (2n^2+2n)^2 = (2n^2+2n+1)^2$ montre que pour tout entier naturel n, le triplet $(2n+1, 2n^2+2n, 2n^2+2n+1)$ est un triplet pythagoricien. Vu que $2015 = 2 \times 1\,007 + 1$, pour trouver un pythagoricien de la forme $(2015, y, z)$, il suffit d'appliquer l'identité avec $n = 1\,007$, ce qui donne le triplet pythagoricien $(2\,015, 2\,030\,112, 2\,030\,113)$.
3. a. L'équation $z^2 - x^2 = 403^2$ peut s'écrire $(z - x)(z + x) = 403^2$. La factorisation $403^2 = 169 \times 961$ nous pousse à résoudre le système

$$\begin{cases} z - x = 169 \\ z + x = 961 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x = 792 \\ 2z = 1030 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 396 \\ z = 565. \end{cases}$$

La solution du système est un couple d'entiers naturels non nuls tel que $x < 403$, donc $(396, 565)$ est le couple cherché.

   b. L'équation $z^2 - x^2 = 403^2$ peut aussi s'écrire $x^2 + 403^2 = z^2$, donc $(396, 403, 565)$ est un triplet pythagoricien. Multiplions ce triplet par 5. D'après la question A-1, le triplet ainsi obtenu est pythagoricien $(1\,980, 2\,015, 2\,825)$.

Sujet 5

Polynésie

12 juin 2015

Exercice 1 (3 points)
Commun à tous les candidats.

On considère le pavé droit ABCDEFGH de la figure 1, pour lequel $AB = 6$, $AD = 4$ et $AE = 2$. Soit I, J et K les points tels que

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB}, \qquad \overrightarrow{AJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}, \qquad \overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}.$$

On se place dans le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{AK})$.

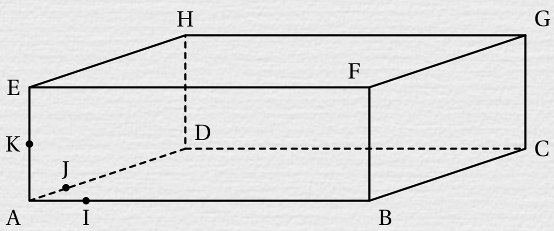


FIGURE 1

1. Vérifier que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $(2; 2; -9)$ est normal au plan (IJG).
2. Déterminer une équation du plan (IJG).
3. Déterminer les coordonnées du point d'intersection I, du plan (IJG) et de la droite (BF).
4. Tracer la section du pavé ABCDEFGH par le plan (IJG). On ne demande pas de justification.

Exercice 2 (4 points)
Commun à tous les candidats.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(\mathrm{O}; \vec{u}, \vec{v})$. À tout point M d'affixe z du plan, on associe le point M′ d'affixe z' définie par

$$z' = z^2 + 4z + 3.$$

1. Un point M est dit invariant lorsqu'il est confondu avec le point M′ associé. Démontrer qu'il existe deux points invariants. Donner l'affixe de chacun de ses points sous forme algébrique, puis sous forme exponentielle.
2. Soit A le point d'affixe $(-3-\mathrm{i}\sqrt{3})/2$ et B le point d'affixe $(-3+\mathrm{i}\sqrt{3})/2$. Montrer que OAB est un triangle équilatéral.
3. Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M d'affixe $z = x + \mathrm{i}y$ où x et y sont réels, tels que le points M′ associé soit sur l'axe des réels.
4. Dans le plan complexe, représenter les points A et B ainsi que l'ensemble $\mathscr{E}$.

Exercice 3 (3 points)
Commun à tous les candidats.

Dans un pays, la taille en centimètres des femmes de 18 à 65 ans peut être modélisée par un variable aléatoire X_1 suivant la loi normale d'espérance $\mu_1 = 165$ cm et d'écart-type $\sigma_1 = 6$ cm, et celle des hommes de 18 à 65 ans, par une variable aléatoire X_2 suivant la loi normale d'espérance $\mu_2 = 175$ cm et d'écart-type $\sigma_2 = 11$ cm. Dans cet exercice tous les résultats seront arrondis à 10^{-2} près.

1. Quelle est la probabilité qu'une femme choisie au hasard dans ce pays mesure entre 1,53 m et 1,77 m ?
2. a. Déterminer la probabilité qu'un homme choisi au hasard dans ce pays mesure plus de 1,70 m.

   b. De plus, on sait que dans ce pays les femmes représentaient 52 % de la population des personnes dont l'âge est compris entre 18 et 65 ans. On choisit au hasard une personne qui a entre 18 et 65 ans. Elle mesure plus de 1,70 m. Quelle est la probabilité que cette personne soit une femme ?

Exercice 4 (5 points)
Commun à tous les candidats.

Le directeur d'un zoo souhaite faire construire un toboggan pour les pandas. Il réalise le schéma de la figure 2 de ce toboggan en perspective cavalière.

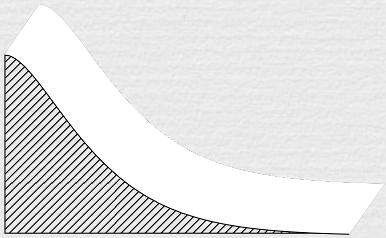


FIGURE 2

PARTIE A. MODÉLISATION

Le profil de ce toboggan est modélisé par la courbe $\mathscr{C}$ représentant la fonction f définie sur l'intervalle $[1\,;8]$ par $f(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{-x}$ où a et b sont deux entiers naturels.

La courbe $\mathscr{C}$ est tracée sur la figure 3 dans un repère orthonormé dont l'unité est le mètre.

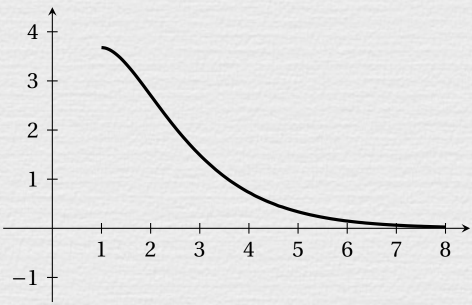


FIGURE 3

1. On souhaite que la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ en sont point d'abscisse 1 soit horizontale. Déterminer la valeur de l'entier b.
2. On souhaite que le haut du toboggan soit situé entre 3,5 et 4 mètres de haut. Déterminer la valeur de l'entier a.

Partie B. Un aménagement pour les visiteurs

On admet dans la suite que la fonction f introduite dans la partie A est définie pour tout réel $x \in [1;8]$ par $f(x) = 10x\mathrm{e}^{-x}$.

Le mur de soutènement du toboggan sera peint par un artiste sur une seule face, hachurée sur le schéma en début d'exercice. Sur le devis qu'il propose, celui-ci demande un forfait de 300 euros augmenté de 50 euros par mètre carré peint.

1. Soit g la fonction définie sur $[1;8]$ par $g(x) = 10(-x-1)\mathrm{e}^{-x}$. Déterminer la fonction dérivée de la fonction g.
2. Quel est le montant du devis de l'artiste ?

Partie C. Une contrainte à vérifier

Des raisons de sécurité imposent de limiter la pente maximale du toboggan.

On considère un point M de la courbe $\mathscr{C}$, d'abscisse différente de 1. On appelle α l'angle aigu formé par la tangente en M et $\mathscr{C}$ et l'axe des abscisses.

La figure 4 illustre la situation.

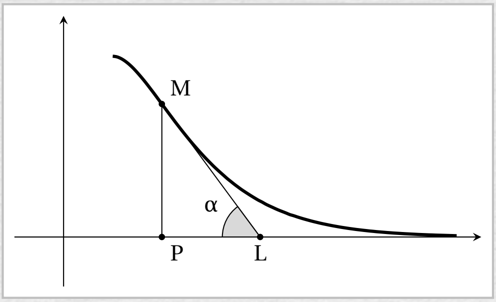


Figure 4

Les contraintes imposent que l'angle α soit inférieur à 55 degrés.

1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[1;8]$. On admet que, pour tout x de l'intervalle $[1;8]$, $f'(x) = 10(1-x)\mathrm{e}^{-x}$. Étuder les variations de la fonction f' sur l'intervalle $[1;8]$.
2. Soit x un réel de l'intervalle $[1;8]$ et soit M le point d'abscisse x de la courbe $\mathscr{C}$. Justifier que $\tan\alpha = \left|f'(x)\right|$.
3. Le tobaggan est-il conforme aux contraintes imposées ?

Exercice 5 (5 points)
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.

Soit (v_n) la suite définie par $v_1 = \ln(2)$ et, pour tout entier naturel n non nul,

$$v_{n+1} = \ln(2 - \mathrm{e}^{-v_n}).$$

On admet que cette suite est définie pour tout entier naturel n non nul. On définit ensuite la suite (S_n) pour tout entier naturel n non nul par

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} v_k = v_1 + v_2 + \cdots + v_n.$$

Le but de cette exercice est de déterminer la limite (S_n).

Partie A. Conjectures à l'aide d'un algorithme

1. Recopier et compléter l'algorithme de la figure 5 page suivante qui calcule et affiche la valeur de S_n pour une valeur de n choisie par l'utilisateur.
2. À l'aide de cet algorithme, on obtient quelques valeurs de S_n. Les valeurs arrondies au dixième sont données dans la table 1.

n	10	100	1000	10000	100000	1000000
S_n	2,4	4,6	6,9	9,2	11,5	13,8

TABLE 1

En expliquant votre démarche, émettre une conjecture quant au comportement de la suite (S_n).

Variables	n, k entiers
	S, v réels
Initialisation	Saisie la valeur de n
	v prend la valeur ....
	S prend la valeur ....
Traitement	Pour k variant de ... à ... faire
	... prend la valeur ...
	... prend la valeur ...
	Fin Pour
Sortie	Afficher S

FIGURE 5

PARTIE B. ÉTUDE D'UNE SUITE AUXILIAIRE

Pour tout entier naturel n non nul, on définit la suite (u_n) par $u_n = \mathrm{e}^{v_n}$.

1. Vérifier que $u_1 = 2$ et que, pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} = 2 - 1/u_n$.
2. Calculer u_2, u_3 et u_4. Les résultats seront donnés sous forme fractionnaire.
3. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $u_n = (n+1)/n$.

PARTIE C. ÉTUDE DE (S_n)

1. Pour tout entier naturel n non nul, exprimer v_n en fonction de u_n, puis v_n en fonction de n.
2. Vérifier que $\mathrm{S}_3 = \ln(4)$.
3. Pour tout entier naturel n non nul, exprimer S_n en fonction de n. En déduire la limite de la suite (S_n).

Exercice 5 (5 points)
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité.

On considère la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$.

1. On appelle I la matrice identité d'ordre 2. Vérifier que $A^2 = A + 2i$.
2. En déduire une expression de A^3 et une expression de A^4 sous la forme $\alpha A + \beta I$ où α et β sont des réels.
3. On considère les suites (r_n) et (s_n) définies par $r_0 = 0$ et $s_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n non nul,

$$\begin{cases} r_{n+1} = r_n + s_n \\ s_{n+1} = 2r_n. \end{cases}$$

   Démontrer que, pour tout entier natuel n, $A^n = r_n A + s_n I$.
4. Démontrer que la suite (k_n) définie pour tout entier naturel n non nul par $k_n = r_n - s_n$ est géométrique de raison -1. En déduire, pour tout entier naturel n non nul, une expression explicite de k_n en fonction de n.
5. On admet que la suite (t_n) définie pour tout entier naturel n non nul par $t_n = r_n + (-1)^n/3$ est géométrique de raison 2. En déduire, pour tout entier naturel n non nul, une expression explicite de t_n en fonction de n.
6. Déduire des questions précédentes, pour tout entier naturel n non nul, une expression explicite de r_n et s_n en fonction de n.
7. En déduire alors, pour tout entier n non nul, une expression des coefficients de la matrice A^n.

Exercice 1

Commun à tous les candidats.

1. Montrons que le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs non colineaires $\overrightarrow{\mathrm{IJ}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{IG}}$. On a $\overrightarrow{\mathrm{IJ}} = -\overrightarrow{\mathrm{AI}} + \overrightarrow{\mathrm{AJ}}$, donc le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{IJ}}$ a pour coordonnées $(-1;1;0)$, et
$$\overrightarrow{\mathrm{IG}} = \overrightarrow{\mathrm{IB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} + \overrightarrow{\mathrm{CG}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{AI}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}} + \overrightarrow{\mathrm{AE}} = 5\overrightarrow{\mathrm{AI}} + 4\overrightarrow{\mathrm{AJ}} + 2\overrightarrow{\mathrm{AK}},$$
donc le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{IG}}$ a pour coordonnées $(5;4;2)$.
Calculons les produits scalaires :
$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{IJ}} = 2 \times (-1) + 2 \times 1 = 0$$
et
$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{IG}} = 2 \times 5 + 2 \times 4 + 2 \times (-9) = 0,$$
donc le vecteur $\vec{n}$ est normal aux deux vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{IJ}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{IG}}$. Ces derniers sont non colinéaires (sinon on ne parlerais pas du plan (IJG)), nous en déduisons que le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (IJG).
2. Une équation cartésienne du plan (IJG) est $2x + 2y - 9z + d = 0$ où d est un réel. Exprimons que ce plan contient le point I, il vient $2 + d = 0$, qui donne $d = -2$. Une équation cartésienne du plan (IJG) est donc
$$2x + 2y - 9z - 2 = 0.$$
3. La droite (BF) passe par le point B$(6;0;0)$ et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{\mathrm{AK}}(0;0;1)$, donc une représentation paramétrique de la droite (BF) est
$$\begin{cases} x = 6 \\ y = 0 \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \\ z = \lambda. \end{cases}$$
En exprimant que le point L de coordonnées $(6;0;\lambda)$ appartient au plan (IJG) nous obtenons l'équation affine $2 \times 6 - 9\lambda - 2 = 0$ dont la solution est $\lambda = 10/9$. Les coordonnées du point L sont donc $(6;0;10/9)$.
4. La section du pavé ABCDEFGH par le plan (IJG) est la région délimitée par le pentagone IJPGL obtenu en construisant successivement les points $\mathrm{M} = (\mathrm{BC}) \cap (\mathrm{IJ})$, $\mathrm{L} = (\mathrm{MG}) \cap (\mathrm{BF})$, $\mathrm{N} = (\mathrm{IL}) \cap (\mathrm{AE})$ et $\mathrm{P} = (\mathrm{NJ}) \cap (\mathrm{DH})$.

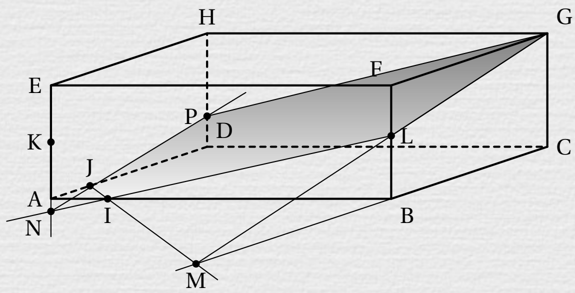


FIGURE 6

Exercice 2

Commun à tous les candidats.

1. Un point M(z) est invariant si et seulement si son affixe vérifie l'équation du second degré $z = z^2 + 4z + 3$, soit $z^2 + 3z + 3 = 0$. Son discriminant est $3^2 - 4 \times 1 \times 3 = -3 < 0$, donc la transformation admet exactement deux points invariants d'affixes $z_1 = (-3 - \mathrm{i}\sqrt{3})/2$ et $z_2 = \overline{z_1} = (-3 + \mathrm{i}\sqrt{3})/2$. Le module de de z_1 étant égal à $\sqrt{(-3/2)^2 + (\sqrt{3}/2)^2} = \sqrt{3}$, on a

$$z_1 = \sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right) = \sqrt{3}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{6}\right),$$

donc les formes exponentielles de z_1 et z_2 sont

$$z_1 = \sqrt{3}\mathrm{e}^{5\mathrm{i}\pi/6} \quad \text{et} \quad z_2 = \sqrt{3}\mathrm{e}^{-5\mathrm{i}\pi/6}.$$

2. Les points A et B ont des affixes conjugués, donc OA = OB. De plus,

$$\widehat{(\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}})} \equiv \arg z_1 - \arg z_2 \equiv \frac{5\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} \equiv \frac{5\pi}{3} \equiv -\frac{\pi}{3} \pmod{2\pi},$$

soit $\widehat{\mathrm{AOB}} = \pi/3$, donc le triangle OAB est équilatéral.

3. Écrivons le complexe $z^2 + 4z + 3$ sous forme algébrique :

$$z^2 + 4z + 3 = (x + \mathrm{i}y)^2 + 4(x + \mathrm{i}y) + 3 = x^2 - y^2 + 4x + 3 + \mathrm{i}(2xy + 4y).$$

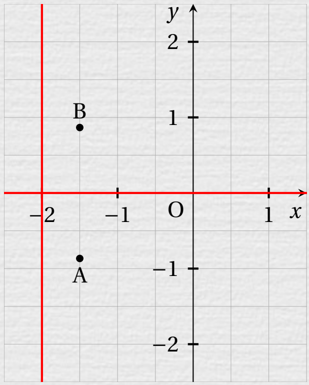


FIGURE 7

Par conséquent,

$$\begin{aligned} M(z) \in \mathscr{E} &\iff \operatorname{Im}(z^2+4z+3)=0 \\ &\iff 2xy+4y=0 \\ &\iff y(x+2)=0 \\ &\iff y=0 \quad \text{ou} \quad x=-2. \end{aligned}$$

L'ensemble $\mathscr{E}$ est la réunion de l'axe des abscisses et de la droite d'équation $x=-2$.

4. L'ensemble $\mathscr{E}$ est représenté en rouge sur la figure 7.

Exercice 3
Commun à tous les candidats.

1. À l'aide de la calculatrice, on trouve que la probabilité qu'une femme choisie au hasard mesure entre 1,53 m et 1,77 m est, à 10^{-2} près, égale à $\mathbb{P}(153 \leqslant X_1 \leqslant 177) \approx 0{,}95$.
2. a. De même, la probabilité qu'un homme choisi au hasard mesure plus de 1,70 m est égale à $\mathbb{P}(X_2 \geqslant 170) \approx 0{,}68$.

b. Soit H l'événement « la personne choisie est un homme » et G l'événement « la personne choisie mesure plus de 1,70 m ». La situation est représentée par l'arbre de probabilité de la figure 8.

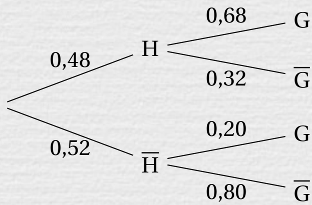


FIGURE 8

On demande de calculer $\mathbb{P}_{\overline{H}}(G)$. En utilisant deux fois la définition des probabilités conditionnelles, nous obtenons

$$\mathbb{P}_{\overline{H}}(G) = \frac{\mathbb{P}(\overline{H} \cap G)}{\mathbb{P}(G)} = \frac{\mathbb{P}(\overline{H})\mathbb{P}_{\overline{H}}(G)}{\mathbb{P}(G)}.$$

Les événements H et $\overline{H}$ forment une partition de l'univers, nous pouvons donc calculer $\mathbb{P}(G)$ à l'aide de la formule des probabilité totale. Il vient

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{\overline{H}}(G) &= \frac{\mathbb{P}(\overline{H})\mathbb{P}_{\overline{H}}(G)}{\mathbb{P}(H)\mathbb{P}_H(G) + \mathbb{P}(\overline{H})\mathbb{P}_{\overline{H}}(G)} \\ &= \frac{0{,}52 \times \mathbb{P}(X_1 \geqslant 170)}{0{,}48 \times \mathbb{P}(X_2 \geqslant 170) + 0{,}52 \times \mathbb{P}(X_1 \geqslant 170)}.\end{aligned}$$

Effectuons l'application numérique en utilisant toutes les décimales de $\mathbb{P}(X_1 \geqslant 170)$ et $\mathbb{P}(X_2 \geqslant 170)$ fournies par la calculatrice afin de s'assurer d'avoir un résultat approchée à 10^{-2} près. Nous obtenons

$$\mathbb{P}_{\overline{H}}(G) \approx 0{,}25.$$

Exercice 4

Commun à tous les candidats.

Partie A. Modélisation

1. La fonction f, définie comme le produit d'une fonction affine et d'une fonction exponentielle, toutes les deux dérivables sur l'intervalle $[1;8]$, est dérivable. Pour tout réel $x \in [1;8]$, on a

$$f'(x) = a\mathrm{e}^{-x} - (ax+b)\mathrm{e}^{-x} = (-ax+a-b)\mathrm{e}^{-x}.$$

   La tangente à la courbe $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 1 est horizontale si et seulement si $f'(1) = 0$, soit $-b\mathrm{e}^{-1} = 0$ d'où $b = 0$.

2. Le sommet est le point d'abscisse 1, donc la hauteur du toboggan est $f(1) = a\mathrm{e}^{-1}$. Par conséquent, l'entier a est solution de l'inéquation $3{,}5 \leqslant a\mathrm{e}^{-1} \leqslant 4$, soit $3{,}5\mathrm{e} \leqslant a \leqslant 4\mathrm{e}$, d'où $a = 10$.

Partie B. Un aménagement pour les visiteurs

1. La fonction g est dérivable, car définie comme le produit des deux fonctions $x \mapsto 10(-x-1)$ et $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ dérivables sur l'intervalle $[1;8]$. Pour tout $x \in [1;8]$, on a

$$g'(x) = -10\mathrm{e}^{-x} - 10(-x-1)\mathrm{e}^{-x} = 10x\mathrm{e}^{-x} = f(x).$$

2. La surface à peindre, en m^2, est $\mathscr{A} = \int_1^8 f(x)\,\mathrm{d}x$. À la question précédente nous avons montré que la fonction g est une primitive de la fonction f, donc

$$\mathscr{A} = g(8) - g(1) = -90\mathrm{e}^{-8} + 20\mathrm{e}^{-1}.$$

   Nous en déduisons que le montant, en euros, du devis de l'artiste est un arrondi au centimes d'euros de

$$300 + \mathscr{A} \times 50 = 300 - 4500\mathrm{e}^{-8} + 1000\mathrm{e}^{-1}$$

   soit 666,37 euros.

x	1		2		8
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$	0	$\searrow$	$-10\mathrm{e}^{-2}$	$\nearrow$	$-70\mathrm{e}^{-8}$

FIGURE 9

PARTIE C. UNE CONTRAINTE À VÉRIFIER

1. La fonction f' est définie comme le produit des fonctions $x \mapsto 10(1-x)$ et $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$, toutes les deux dérivables sur l'intervalle $[1;8]$, donc f' est dérivable. Pour tout $x \in [1;8]$, on a
$$f''(x) = -10\mathrm{e}^{-x} - 10(1-x)\mathrm{e}^{-x} = 10(x-2)\mathrm{e}^{-x}.$$
La fonction exponentielle est positive, donc le signe de $f''(x)$ est celui de $x-2$. Nous en déduisons le tableau de variable de la figure 9.

2. Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point M est
$$f'(x) = \frac{y_L - y_M}{x_L - x_M} = \frac{y_P - y_M}{x_L - x_P},$$
d'où
$$\left|f'(x)\right| = \frac{\left|y_P - y_M\right|}{|x_L - x_P|} = \frac{\text{PM}}{\text{LP}},$$
puis finalement,
$$\tan\alpha = \left|f'(x)\right|.$$

3. Étant donné que $\alpha \in [0;90]$ et que la fonction tangente est strictement croissante sur l'intervalle $[0;90]$, la contrainte de sécurité $\alpha \leqslant 55$ est équivalente à l'inégalité $0 \leqslant \tan\alpha \leqslant \tan 55°$ où $\tan 55° \approx 1{,}428$. L'étude faite de la fonction f' et la relation établie à la question précédente montrent que sur l'intervalle $[1;8]$, on a l'encadrement $0 \leqslant \tan\alpha \leqslant 10\mathrm{e}^{-2}$, où $10\mathrm{e}^{-2} \approx 1{,}35$. Il n'y a donc pas lieu de s'inquiéter, les pandas sont en sécurité.

Exercice 5

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.

Partie A. Conjectures à l'aide d'un algorithme

1. Voir la figure 10.

Variables	n, k entiers
	S, v réels
Initialisation	Saisie la valeur de n
	v prend la valeur $\ln(2)$
	S prend la valeur v
Traitement	Pour k variant de 2 à n faire
	v prend la valeur $\ln(2-\mathrm{e}^{-v})$
	S prend la valeur S + v
	Fin Pour
Sortie	Afficher S

FIGURE 10

2.

Partie B. Étude d'une suite auxiliaire

1. On a $u_1 = \mathrm{e}^{v_1} = \mathrm{e}^{\ln(2)} = 2$. Pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$u_{n+1} = \mathrm{e}^{v_{n+1}} = \mathrm{e}^{\ln(2-\mathrm{e}^{-v_n})} = 2 - \mathrm{e}^{-v_n} = 2 - \frac{1}{\mathrm{e}^{v_n}} = 2 - \frac{1}{u_n}.$$

2. À l'aide de la relation de récurrence démontrée à la question précédente, nous trouvons

$$u_2 = 2 - \frac{1}{u_1} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$
$$u_3 = 2 - \frac{1}{u_2} = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$
$$u_4 = 2 - \frac{1}{u_3} = 2 - \frac{3}{4} = \frac{5}{4}.$$

3. Démontrons par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a

$$u_n = \frac{n+1}{n}.$$

Initilisation. Pour $n = 1$, l'égalité s'écrit $u_1 = 2$. Elle est vraie.
Hérédité. Soit un entier $k \geqslant 1$. Supposons que $u_{k+1} = (k+1)/k$. Nous devons démontrer que $u_{k+2} = (k+2)/(k+1)$. Une démonstration directe donne

$$u_{k+2} = 2 - \frac{1}{u_{k+1}} = 2 - \frac{1}{(k+1)/k} = 2 - \frac{k}{k+1} = \frac{2(k+1)-k}{k+1} = \frac{k+2}{k+1}.$$

Conclusion. La propriété est vraie pour $n = 1$ et elle est héréditaire, donc elle est vraie pour tout entier $n \geqslant 1$.

PARTIE C. ÉTUDE DE (S_n)

1. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $v_n = \ln(u_n)$, puis $v_n = \ln((n+1)/n) = \ln(n+1) - \ln(n)$.
2. Calculons S_3 :

$$\mathrm{S}_3 = v_1 + v_2 + v_3 = \ln(2) - \ln(1) + \ln(3) - \ln(2) + \ln(4) - \ln(3) = \ln(4).$$

3. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{S}_n &= \sum_{k=1}^{n} v_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} \big(\ln(k+1) - \ln(k)\big) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \sum_{k=1}^{n} \ln(k) \\ &= \sum_{k=2}^{n+1} \ln(k) - \sum_{k=1}^{n} \ln(k).\end{aligned}$$

Les deux sommes ont tous leurs termes en commun à l'exception du dernier terme $\ln(n+1)$ de la première somme et le premier terme $\ln 1 = 0$ de la deuxième somme, si bien que

$$\mathrm{S}_n = \ln(n+1).$$

De $\lim_{n\to+\infty} n+1 = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} \ln(n) = +\infty$, nous déduisons

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty.$$

Exercice 5

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité.

1. On a

$$A^2 = \begin{pmatrix} (-4)^2+6\times(-3) & (-4)\times 6+6\times 5 \\ (-3)\times(-4)+5\times(-3) & (-3)\times 6+5^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$$

et

$$A+2I = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -3 & 7 \end{pmatrix},$$

donc on a bien $A^2 = A+2I$.

2. Multiplions les membres de l'égalité précédentes par A. Nous obtenons

$$A^3 = A^2+2A = A+2I+2A = 3A+2I.$$

Multiplions à nouveau par A. Il vient

$$A^4 = 3A^2+2A = 3(A+2I)+2A = 5A+6I.$$

3. Démontrons par récurrence sur l'entier n que

$$A^n = r_nA+s_nI$$

pour tout entier $n \geqslant 0$.

Initialisation. Pour $n=0$, l'égalité à démontrer s'écrit $A^0 = r_0A+s_0I$, soit $I=I$. Elle est bien entendu correcte.

Hérédité. Soit $k \geqslant 0$ un entier. Supposons que $A^k = r_kA+s_kI$. Nous devons montrer que $A^{k+1} = r_{k+1}A+s_{k+1}I$.

Multiplions l'hypothèse de récurrence par A :

$$A^{k+1} = r_kA^2+s_kA$$

soit, en utilisant $A^2 = A + 2I$,

$$A^{k+1} = r_k(A+2I) + s_k A = (r_k + s_k)A + 2r_k I.$$

Compte tenu de la définition des suites (r_n) et (s_n), nous trouvons

$$A^{k+1} = r_{k+1}A + s_{k+1}I.$$

Conclusion. D'après le principe de la démonstration par récurrence, l'égalité $A^n = r_n A + s_n I$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$.

4. Soit $n \geqslant 1$ un entier. On a

$$k_{n+1} = r_{n+1} - s_{n+1} = r_n + s_n - 2r_n = s_n - r_n = -k_n,$$

ce qui prouve que (k_n) est une suite géométrique de raison -1 de premier terme $k_1 = r_1 - s_1 = r_0 + s_0 - 2r_0 = 1$, donc

$$k_n = (-1)^{n-1}$$

5. Le premier terme de la suite (t_n) est $t_1 = r_1 + 1/3 = r_0 + s_0 + 1/3 = 2/3$, donc son terme terme général est

$$t_n = \frac{2}{3} \times 2^{n-1} = \frac{2^n}{3}.$$

pour tout entier $n \geqslant 1$.

6. Soit un entier $n \geqslant 1$. Alors

$$r_n = t_n - \frac{(-1)^n}{3} = \frac{2^n - (-1)^n}{3},$$

puis

$$s_n = r_n - k_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3} - (-1)^{n-1} = \frac{2^n + 2(-1)^n}{3}$$

7. Pour tout entier $n \geqslant 0$, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}^n &= r_n\mathrm{A} + s_n\mathrm{I} \\
&= \begin{pmatrix} -4r_n + s_n & 6r_n \\ -3r_n & 5r_n + s_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \left(\dfrac{-4}{3} + \dfrac{1}{3}\right) \times 2^n + \left(\dfrac{4}{3} + \dfrac{2}{3}\right) \times (-1)^n & 2^{n+1} - 2(-1)^n \\ -2^n + (-1)^n & \left(\dfrac{5}{3} + \dfrac{1}{3}\right) \times 2^n + \left(\dfrac{-5}{3} + \dfrac{2}{3}\right) \times (-1)^n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2^n + 2(-1)^n & 2^{n+1} + 2(-1)^{n+1} \\ -2^n + (-1)^n & 2^{n+1} + (-1)^{n+1} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Sujet 6

Asie

17 juin 2015

Exercice 1 (5 points)
Commun à tous les candidats.

Les 3 parties de cet exercice sont indépendantes. Les probabilités seront arrondies au millième.

Partie A

Un concurrent participe à un concours de tir à l'arc, sur une cible circulaire. À chaque tir, la probabilité qu'il atteigne la cible est égale à 0,8.

1. Le concurrent tire quatre flèches. On considère que les tirs sont indépendants. Déterminer la probabilité qu'il atteigne au moins trois fois la cible.
2. Combien de flèches le concurrent doit-il prévoir pour atteindre en moyenne la cible douze fois ?

Partie B

Entre deux phases du concours, pour se perfectionner, le concurrent travaille sa précision latérale sur une autre cible d'entraînement, représentée sur la figure 1. Pour cela, il tire des flèches pour essayer d'atteindre une bande verticale, de largeur 20 cm (en grisé sur la figure), le plus près possible de la ligne verticale centrale.

On munit le plan contenant la bande verticale d'un repère : la ligne centrale visée est l'axe des ordonnées.

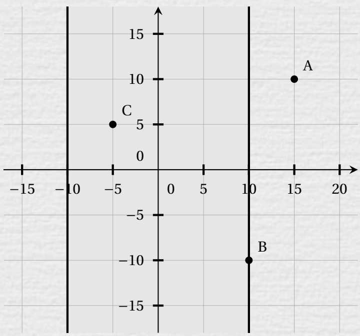


Figure 1

On note X la variable aléatoire qui, à toute flèche tirée atteignant ce plan, associe l'abscisse de son point d'impact.

Ainsi, par exemple :

— si la flèche atteint le point A, le tireur a raté la bande, et X prend la valeur 15 ;

— si elle atteint le point B, l'impact est à la limite de la bande, et X prend la valeur 10 ;

— si elle atteint le point C, l'impact est dans la bande et X prend la valeur −5.

On suppose que la variable aléatoire X suit une normale d'espérance 0 et d'écart-type 10.

1. Lorsque la flèche atteint le plan, déterminer la probabilité que son point d'impact soit situé hors de la bande grisée.
2. Comment modifier les bords de la bande grisée pour faire en sorte que, lorsque la flèche atteint le plan, son point d'impact soit situé à l'intérieur de la bande avec une probabilité égale à 0,6 ?

PARTIE C

La durée de vie (exprimée en heures) du panneau électrique affichant le score des concurrents est une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 10^{-4}$ (exprimée en h^{-1}).

1. Quelle est la probabilité que le panneau fonctionne au moins pendant 2 000 heures ?
2. **Restitution organisée des connaissances**

   Dans cette question, λ désigne un réel strictement positif.

   On rappelle que l'espérance mathématique de la variable aléatoire T suivant une loi exponentielle de paramètre λ, est définie par

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x \lambda t \mathrm{e}^{-\lambda t}\, \mathrm{d}t.$$

   a. On considère la fonction F, définie pour tout réel t par

$$\mathrm{F}(t) = \left(-t - \frac{1}{\lambda}\right)\mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

Démontrer que la fonction F est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie pour tout réel t par $f(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$.

b. En déduire que l'espérance mathématique de la variable aléatoire T est égale à $1/\lambda$. Quelle est l'espérance de durée de vie du panneau électrique affichant le score des concurrents ?

Exercice 2 (4 points)
Commun à tous les candidats.

Pour chacune des quatre affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, et justifier la réponse. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

Dans les questions 1 et 2, on munit l'espace d'un repère orthonormé, et on considère les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ d'équations respectives

$$x+y+z-5=0 \quad \text{et} \quad 7x-2y+z-2=0.$$

1. **Affirmation 1.** Les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont perpendiculaires.
2. **Affirmation 2.** Les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ se coupent suivant la droite de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t+1 \quad (t \in \mathbb{R}), \\ z = -3t+4. \end{cases}$$

3. Un joueur de jeux vidéo en ligne adopte toujours la même stratégie. Sur les 312 premières parties jouées, il en gagne 223. On assimile les parties jouées à un échantillon aléatoire de taille 312 dans l'ensemble des parties.

   On souhaite estimer la proportion de parties que va gagner le joueur, sur les prochaines parties qu'il jouera, tout en conservant la même stratégie.

   Affirmation 3. Au niveau de confiance de 95 %, la proportion de parties gagnées doit appartenir à l'intervalle $[0{,}658\,;0{,}771]$.
4. On considère l'algorithme de la figure 2 page suivante.

   Affirmation 4. Si l'on entre $a=1$, $b=2$ et $f(x) = x^2-3$, alors l'algorithme affiche en sortie le nombre 1,6875.

Variables	a, b sont deux nombres réels tels que $a < b$
	x est un nombre réel
	f est une fonction définie sur l'intervalle $[a\,;b]$
Traitement	Lire a et b
	Tant que $b - a > 0{,}3$
	x prend la valeur $(a+b)/2$
	Si $f(x)f(a) > 0$ alors
	a prend la valeur x
	sinon
	b prend la valeur x
	Fin Si
	Fin Tant que
	Afficher $(a+b)/2$

FIGURE 2

Exercice 3 (6 points)
Commun à tous les candidats.

Pour tout entier naturel n, on dédfinit la fonction f_n pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;1]$ par

$$f_n(x) = x + \mathrm{e}^{n(x-1)}.$$

On note $\mathscr{C}_n$ la représentation graphique de la fonction f_n dans un repère orthogonal.

Quelques-unes des courbes $\mathscr{C}_n$ sont représentées sur la figure 3 page suivante.

PARTIE A. GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS f_n

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, la fonction f_n est croissante et positive sur l'intervalle $[0\,;1]$.
2. Montrer que les courbes $\mathscr{C}_n$ ont toutes un point commun A, et préciser ses coordonnées.

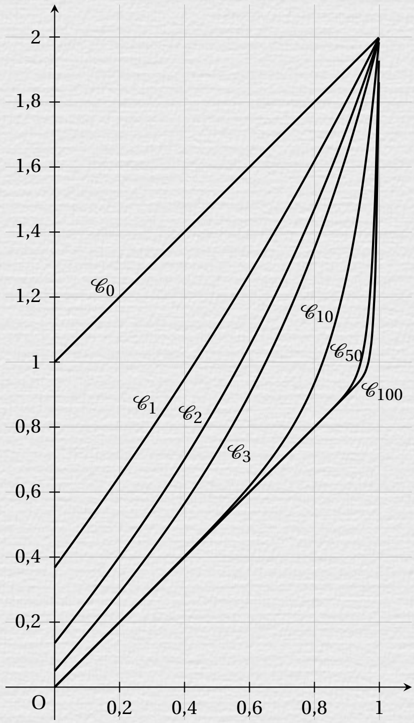


FIGURE 3

3. À l'aide des représentations graphiques, peut-on conjecturer le comportement des coefficients directeurs des tangentes en A aux courbes $\mathscr{C}_n$ pour les grandes valeurs de n ? Démontrer cette conjecture.

PARTIE B. ÉVOLUTION DE $f_n(x)$ LORSQUE x EST FIXÉ

Soit x un réel fixé de l'intervalle $[0;1]$. Pour tout entier naturel n, on pose

$$u_n = f_n(x).$$

1. Dans cette question, on suppose que $x = 1$. Étudier la limite éventuelle de la suite (u_n).

2. Dans cette question, on suppose que $0 \leqslant x < 1$. Étudier la limite éventuelle de la suite (u_n).

PARTIE C. AIRE SOUS LES COURBES $\mathscr{C}_n$

Pour tout entier naturel n, on note A_n l'aire exprimée en unité d'aire, du domaine situé entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}_n$ et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.

À partir des représentations graphiques, conjecturer la limite de la suite (A_n) lorsque l'entier n tend vers $+\infty$, puis démontrer cette conjecture.

Exercice 4 (5 points)
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On donne le nombre complexe

$$j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Le but de cet exercice est d'étudier quelques propriétés du nombre j, et de mettre en évidence un lien de ce nombre avec les triangles équilatéraux.

PARTIE A. PROPRIÉTÉS DU NOMBRE j

1. a. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation

$$z^2 + z + 1 = 0.$$

   b. Déterminer le module et un argument du nombre complexe j, puis donner sa forme exponentielle.

2. Démontrer les égalités suivantes :

   a. $j^3 = 1$;

   b. $j^2 = -1 - j$.

3. On note P, Q, R les images respectives des nombres complexes 1, j et j^2 dans le plan. Quelle est la nature du triangle PQR ? Justifier la réponse.

Partie B

Soit a, b, c trois nombres complexes vérifiant l'égalité $a + \mathrm{j}b + \mathrm{j}^2 c = 0$. On note A, B, C les images respectives des nombres a, b, c dans le plan.

1. En utilisant la question A-3-b, démontrer l'égalité $a - c = \mathrm{j}(c - b)$.
2. En déduire que AC = BC.
3. Démontrer l'égalité $a - b = \mathrm{j}^2(b - c)$.
4. En déduire que le triangle ABC est équilatéral.

Exercice 4 (5 points)
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité.

On dit qu'un entier naturel non nul N est un nombre triangulaire s'il existe un entier naturel n tel que $\mathrm{N} = 1 + 2 + \cdots + n$. Par exemple, 10 est un nombre triangulaire car $10 = 1 + 2 + 3 + 4$.

Le but de ce problème est de déterminer des nombres triangulaires qui sont les carrés d'un entier.

On rappelle que, pour tout entier naturel non nul n, on a

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Partie A. Nombres triangulaires et carrés d'entiers

1. Montrer que 36 est un nombre triangulaire, et qu'il est aussi le carré d'un entier.
2. a. Montrer que le nombre $1 + 2 + \cdots + n$ est le carré d'un entier si et seulement s'il existe un entier naturel p tel que $n^2 + n - 2p^2 = 0$.

   b. En déduire que le nombre $1 + 2 + \cdots + n$ est le carré d'un entier si et seulement s'il existe un entier naturel p tel que $(2n+1)^2 - 8p^2 = 1$.

Partie B. Étude de l'équation diophantienne associée

On considère l'équation diophantienne

$$x^2 - 8y^2 = 1, \qquad \text{(E)}$$

où x et y désignent des entiers relatifs.

1. Donner deux couples d'entiers naturels inférieurs à 10 qui sont solution de (E).
2. Démontrer que, si un couple d'entiers relatifs non nuls (x, y) est solution de (E), alors les entiers relatifs x et y sont premiers entre eux.

Partie C. Lien avec le calcul matriciel

Soit x et y deux entiers relatifs. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

On définit les entiers relatifs x' et y' par l'égalité

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

1. Exprimer x' et y' en fonction de x et de y.
2. Déterminer la matrice A^{-1}, puis exprimer x et y en fonction de x' et y'.
3. Démontrer que (x, y) est solution de (E) si et seulement si (x', y') est solution de (E).
4. On considère les suites (x_n) et (y_n) définies par $x_0 = 3$, $y_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,
$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}.$$
On admet que, ainsi définis, les nombres x_n et y_n sont des entiers naturels pour toute valeur de l'entier n.
Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, le couple (x_n, y_n) est solution de (E).

Partie D. Retour au problème initial

À l'aide des parties précédentes, déterminer un nombre triangulaire supérieur à 2015 qui est le carré d'un entier.

Exercice 1

Commun à tous les candidats.

PARTIE A

1. Formellement, le tireur exécute quatre épreuves de Bernoulli indépendantes, chacune ayant 0,8 pour probabilité de succès (« le joueur atteint la cible ») et 0,2 pour probabilité d'échec (« la joueur manque la cible »). La variable aléatoire qui compte le nombre de succès suit la loi binomiale $\mathscr{B}(4;0,8)$. Par conséquent, la probabilité d'atteindre k fois la cible ($0 \leqslant k \leqslant 4$) est donnée par la formule

$$\binom{4}{k} 0,8^k \times 0,2^{4-k}.$$

L'événement « le concurrent atteint au moins trois fois la cible » est égale à l'union des événements incompatibles « le concurrent atteint exactement trois fois la cible » et « le concurrent atteint quatre fois la cible ». Par conséquent, la probabilité que le concurrent atteigne au moins trois fois la cible est donc égale à

$$\binom{4}{3} 0,8^3 \times 0,2 + \binom{4}{4} 0,8^4 = 0,8192,$$

dont un arrondi au millième est 0,819.

2. Soit n un entier naturel. La variable aléatoire qui compte le nombre de fois que le concurrent atteint la cible s'il tire n flêches suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n;0,8)$. L'espérance de cette variable aléatoire est égale à $0,8n$, donc le nombre de flèches à prévoir pour atteindre en moyenne la cible douze fois est la solution de l'équation $0,8n = 12$, soit 15 flêches.

PARTIE B

1. La probabilité que le point d'impact de la flèche soit hors de la bande grisée est

$$1 - \mathbb{P}(-10 \leqslant X \leqslant 10) \approx 0,317.$$

2. Soit $2d$ la largeur de la bande de sorte que le point d'impact de la flêche se se situe dans la bande avec une probabilité de 0,6. Nous devons avoir

$$\mathbb{P}(-d \leqslant X \leqslant d) = 0,6.$$

c'est-à-dire

$$\mathbb{P}(X \leqslant d) = \frac{1}{2}\big(\mathbb{P}(-d \leqslant X \leqslant d) + 1\big) = \frac{1}{2}(0{,}6 + 1) = 0{,}8.$$

À l'aide d'une calculatrice, nous obtenons $d \approx 8{,}416$. Par conséquent, la probabilité pour que le point d'impact de la flêche soit situé dans la bande est égale à 0,6 si (et seulement si) la bande a une largeur égale, à 10^{-2} près, à 16,83 cm.

Partie C

1. La probabilité pour que le panneau ait une durée de vie inférieure à 2 000 heures est égale à

$$\mathbb{P}(T \leqslant 2000) = \int_0^{2000} 10^{-4}\mathrm{e}^{-10^{-4}t}\,\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-10^{-4}t}\right]_0^{2000} = 1 - \mathrm{e}^{-1/5},$$

donc la probabilité qu'il fonctionne au moins 2 000 heures est égale à

$$\mathbb{P}(T \geqslant 2000) = 1 - \mathbb{P}(T \leqslant 2000) = \mathrm{e}^{-1/5} \approx 0{,}819.$$

2. *Restitution organisée des connaissances*

   a. La fonction F est définie comme le produit des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$,

$$u\colon t \mapsto -t - \frac{1}{\lambda} \qquad \text{et} \qquad v\colon t \mapsto \mathrm{e}^{-\lambda t},$$

   donc la fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel t, on a

$$F'(t) = u'(t)v(t) + u(t)v'(t) = -\mathrm{e}^{-\lambda t} - \left(-t - \frac{1}{\lambda}\right)\lambda\mathrm{e}^{-\lambda t} = \lambda t\mathrm{e}^{-\lambda t},$$

   ce qui prouve que la fonction F est bien une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f.

   b. Nous déduisons de la question précédente que

$$\int_0^x \lambda t\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = F(x) - F(0) = \left(-x - \frac{1}{\lambda}\right)\mathrm{e}^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda}.$$

Posons $\varphi(x) = -\lambda x - 1$. De la relation

$$\left(-x - \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda x} = \frac{e}{\lambda} \varphi(x) e^{\varphi(x)}$$

et de la limite $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = -\infty$ (car $\lambda > 0$), nous déduisons que

$$\lim_{x\to+\infty} \left(-x - \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda x} = \frac{e}{\lambda} \lim_{x\to+\infty} \varphi(x) e^{\varphi(x)} = \frac{e}{\lambda} \lim_{x\to-\infty} x e^{x} = 0,$$

donc

$$E(T) = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x \lambda t e^{-\lambda t} \, dt = \frac{1}{\lambda}.$$

Selon cette formule le panneau électrique a une espérance de vie de 10 000 heures.

Exercice 2

Commun à tous les candidats.

1. **L'affirmation 1 est fausse.** Soient $\vec{n}_1(1;1;1)$ et $\vec{n}_2(7;-2;1)$ des vecteurs normaux aux plan $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ respectivement. Le repère étant orthonormé, leur produit scalaire est égal à

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 1 \times 7 + 1 \times (-2) + 1 \times 1 \neq 0,$$

par conséquent les vecteur $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ ne sont pas orthogonaux, donc les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ ne sont pas perpendiculaires.

2. **L'affirmation 2 est vraie.** Appelons Δ la droite définie dans l'énoncé. Pour tout réel t, le point $M_t(t; 2t+1; -3t+4)$ de paramètre t de la droite Δ appartient aux plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$; en effet,

$$t + (2t+1) + (-3t+4) - 5 = 0 \quad \text{et} \quad 7t - 2(2t+1) + (-3t+4) - 2 = 0.$$

Cela démontre que la droite Δ est incluse dans l'intersection des plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$. De plus, les vecteurs $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ ne sont pas colinéaires, donc les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ ne sont pas confondus ainsi leur intersection est la droite Δ.

3. **L'affirmation 3 est probablement vraie** La taille $n = 312$ de l'échantillon et la proportion de parties gagnées $f = 223/312$ vérifient les inégalités $n \geqslant 30$, $nf = 223 \geqslant 5$ et $n(1-f) = 89 \geqslant 5$, donc un intervalle de confiance au seuil de 95 % de la proportion de parties que va gagner le joueur est
$$\mathrm{I} = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}\,; f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[\frac{223}{312} - \frac{1}{\sqrt{312}}\,; \frac{223}{312} + \frac{1}{\sqrt{312}}\right].$$
Or $\max(\mathrm{I}) \approx 0{,}7713 \geqslant 0{,}771$, donc l'intervalle de confiance I n'est pas inclus dans l'intervalle $[0{,}658\,; 0{,}771]$ et par conséquent l'affirmation est fausse. Cependant, l'intervalle proposé dans l'énoncé est probablement une approximation à 10^{-3} près, auquel cas l'affirmation est vraie.
4. **L'affirmation 4 est fausse.** D'après la table 1, lorsque l'on entre $a = 1$ et $b = 2$ le programme affiche $(1{,}5 + 1{,}75)/2 = 1{,}625$.

Itération	a	b	$b-a$	x	$f(x)f(a) > 0$
0	1	2	1		
1	1,5	2	0,5	1,5	Oui
2	1,5	1,75	0,25	1,75	Non

TABLE 1 – *État du programme au début de la première itération pour $n = 0$ et à la fin de la n-ième itération pour $n > 0$.*

Exercice 3

Commun à tous les candidats.

PARTIE A. GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS f_n

1. Soit n un entier naturel et a,b deux réels tels que $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant 1$. Comparons $f_n(a)$ et $f_n(b)$. On a
$$a - 1 \leqslant b - 1.$$
Multiplions par l'entier positif n. Il vient
$$n(a-1) \leqslant n(b-1).$$

La fonction exponentielle est croissante et positive sur $\mathbb{R}$, donc

$$e^{n(a-1)} \leqslant e^{n(b-1)}.$$

Ajoutons a au membre de gauche et b au membre de droite. Comme $a \leqslant b$, on a

$$a + e^{n(a-1)} \leqslant b + e^{n(b-1)},$$

soit

$$f_n(a) \leqslant f_n(b),$$

ce qui démontre que la fonction f_n est croissante.

La fonction f_n est définie comme la somme de deux fonctions positives sur $[0;1]$, donc elle est positive.

> *Solution alternative.* Soit n un entier naturel. Les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto e^{n(x-1)}$ sont dérivables sur $[0;1]$, donc leur somme f_n est dérivable. Pour tout $x \in [0;1]$, on a $f_n'(x) = 1 + ne^{n(x-1)}$. La fonction exponentielle est positive et n est positif, donc $f_n'(x) > 0$ pour tout $x \in [0;1]$, donc la fonction f_n est croissante. De plus x et $e^{n(x-1)}$ sont positifs sur $[0;1]$, donc f_n est positive.

2. Le graphique suggère que le point A$(1;2)$ est un point commun aux courbes $(\mathscr{C}_n)_{n\geqslant 0}$. Vérifions. Pour tout entier naturel n, on a $f_n(1) = 1 + e^0 = 2$, ce qui confirme que $A \in \mathscr{C}_n$.

3. Pour tout entier naturel n, notons a_n le coefficient directeur de de tangente à la courbe $\mathscr{C}_n$ au point A.

Conjecture. *On a*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty.$$

Démontrons cette conjecture. Soit n un entier naturel. La fonction f_n est dérivable sur $[0;1]$ car somme des deux fonctions dérivables $x \mapsto x$ et $x \mapsto e^{n(x-1)}$. Pour tout $x \in [0;1]$, on a $f_n'(x) = 1 + ne^{n(x-1)}$. Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_n$ au point d'abscisse 1 est $f_n'(1)$, donc $a_n = 1 + n$. Puisque $\lim_{n\to+\infty} 1 + n = +\infty$, la conjecture est démontrée.

PARTIE B. ÉVOLUTION DE $f_n(x)$ LORSQUE x EST FIXÉ

1. Pour $x = 1$, on a $u_n = f_n(1) = 2$ pour tout entier $n \geqslant 0$. La suite (u_n) est constante, donc sa limite en $+\infty$ est 2.
2. Cette fois, $0 \leqslant x < 1$. Le terme général de la suite (u_n) est $u_n = x + \mathrm{e}^{n(x-1)}$. Puisque $x - 1 < 0$, on a $\lim_{n\to+\infty} n(x-1) = -\infty$, donc

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{n(x-1)} = \lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{x} = 0.$$

Nous en déduisons que la suite (u_n) est convergente de limite x.

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = x.$$

PARTIE C. AIRE SOUS LES COURBES $\mathscr{C}_n$

Il semble que la courbe $\mathscr{C}_n$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$ délimitent une région qui tend vers le triangle de sommets l'origine O et les points de coordonnées $(1,0)$ et $(1,1)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Conjecture. *La suite* (A_n) *est convergente de limite* $1/2$.

Démontrons la conjecture. Soit n un entier naturel. On a

$$\mathrm{A}_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x + \frac{1}{n}\left(n\mathrm{e}^{n(x-1)}\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{1}{n}\mathrm{e}^{n(x-1)}\right]_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n}\mathrm{e}^{-n}.$$

Étant donné que $\lim_{n\to+\infty} 1/n = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-n} = \lim_{n\to-\infty} \mathrm{e}^{n} = 0$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{A}_n = \frac{1}{2}.$$

Exercice 4

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.

PARTIE A. PROPRIÉTÉ DU NOMBRE j

1. a. Le polynôme du second degré $z^2 + z + 1$ a un déterminant égal à $1^2 - 4 \times 1^2 = -3$. Il est strictement négatif, donc l'équation $z^2 + z + 1 = 0$ admet deux racines complexes conjuguées :

$$\mathrm{j} = \frac{-1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad \bar{\mathrm{j}} = \frac{-1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}.$$

b. Voir la question précédente.

2. Le module de j est

$$|j| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1.$$

Un argument θ de j vérifie $\cos\theta = -1/2$ et $\sin\theta = \sqrt{3}/2$, donc $\theta \equiv 2\pi/3$ (mod 2π). Par conséquent, la forme exponentielle de j est $e^{2i\pi/3}$.

3. a. À l'aide de la forme exponentielle de j, nous obtenons

$$j^3 = \left(e^{2i\pi/3}\right)^3 = e^{2i\pi} = 1.$$

Solution alternative. Pour tout complexe $z \neq 1$, on a

$$z^2 + z + 1 = \frac{z^3 - 1}{z - 1}.$$

En particulier pour $z = j$, on obtient $j^3 = 1$.

b. La relation $j^2 = -1 - j$ découle immédiatement du fait que j est une solution de l'équation $z^2 + z + 1 = 0$.

4. Calculons les longueurs des côtés du triangle PQR :

$$\begin{aligned} PQ &= \left|1 - j\right|, \\ QR &= \left|j^2 - j\right| = |j|\,|j - 1| = |j - 1| \\ PR &= \left|j^2 - 1\right| = \left|j^2 - j^3\right| = |j|^2\,|1 - j| = \left|1 - j\right|. \end{aligned}$$

Le triangle PQR a ses trois côtés de même longueur, donc c'est un triangle équilatéral.

Solution alternative. On a

$$\begin{aligned} (\widehat{\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}}) &\equiv \arg j - \arg 1 \equiv \frac{2\pi}{3} \quad (\text{mod } 2\pi), \\ (\widehat{\overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OR}}) &\equiv \arg j^2 - \arg j \equiv 2\arg j - \arg j \equiv \arg j \equiv \frac{2\pi}{3} \quad (\text{mod } 2\pi). \end{aligned}$$

Les affixes des sommets du triangle PQR sont des nombres complexes de module 1, donc le cercle de centre O et de rayon 1 est le cercle circonscrit au triangle PQR. Il s'ensuit que

$$\widehat{PRQ} = \frac{1}{2}\widehat{POQ} = \frac{\pi}{3} \qquad \text{et} \qquad \widehat{RPQ} = \frac{1}{2}\widehat{ROQ} = \frac{\pi}{3},$$

donc le triangle PQR est équilatéral.

PARTIE B

1. Réécrivons $a + \mathrm{j}b + \mathrm{j}^2 c = 0$ en tenant compte de $\mathrm{j}^2 = -1 - j$. Nous obtenons $a + \mathrm{j}b - (1 + \mathrm{j})c = 0$, soit
$$a - c = \mathrm{j}(c - b).$$
2. De l'égalité précédente, nous déduisons que $|a - c| = \left|\mathrm{j}(c - b)\right| = \left|\mathrm{j}\right| |c - b|$. Or $\left|\mathrm{j}\right| = 1$, $|a - c| = \mathrm{AC}$ et $|c - b| = \mathrm{BC}$, si bien que $\mathrm{AC} = \mathrm{BC}$.
3. Écrivons
$$a - b = a - c + c - b,$$
utilisons l'égalité démontrée en B.1,
$$a - b = \mathrm{j}(c - b) + c - b = (\mathrm{j} + 1)(c - b),$$
puis utilisons la relation $\mathrm{j} + 1 = -\mathrm{j}^2$,
$$a - b = \mathrm{j}^2 (b - c).$$
4. On déduit de B.1 et B.3 que
$$|a - b| = \left|\mathrm{j}^2\right| |b - c| = \left|\mathrm{j}\right|^2 |b - c| = \left|\mathrm{j}\right| |b - c| = \left|\mathrm{j}(b - c)\right| = |a - c|.$$
Par conséquent $\mathrm{AB} = \mathrm{AC}$. En B.2 nous avons montré que $\mathrm{AC} = \mathrm{BC}$, donc le triangle ABC est équilatéral.

Exercice 4

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité.

PARTIE A. NOMBRES TRIANGULAIRES ET CARRÉS D'ENTIERS

1. D'après la formule donnant la somme des premiers entiers, montrer que 36 est un nombre triangulaire revient à trouver un entier n tel que $n(n+1) = 72$. On trouve sans difficulté que $n = 8$ [1] convient.
2. a. Le nombre $1 + 2 + \cdots + n = n(n + 1)/2$ est le carré d'un entier si et seulement s'il existe un entier p tel que $n(n + 1)/2 = p^2$, équation que nous réécrivons $n^2 + n - 2p^2 = 0$.

1. Ceux qui ne connaissent toujours pas leurs tables de multiplication peuvent toujours résoudre l'équation du second degré $x^2 + x - 72 = 0$.

b. Pour tous entiers n et p, on a

$$\begin{aligned}(2n+1)^2 - 8p^2 - 1 &= 4n^2 + 4n + 4 - 8p^2 - 1\\ &= 4(n^2 + n - 2p^2) - 1.\end{aligned}$$

Il s'ensuit que $n^2 + n - 2p^2 = 0$ si et seulement si $(2n+1)^2 - 8p^2 = 1$. Par conséquent, d'après la question A.2.a, le nombre $1 + 2 + \cdots + n$ est le carré d'un entier si et seulement s'il existe un entier naturel p tel que $(2n+1)^2 - 8p^2 = 1$.

Partie B. Étude de l'équation diophantienne associée

1. Les couples $(1,0)$ et $(3,1)$ sont deux solutions de l'équation (E).
2. Soit (x, y) une solution de l'équation (E). Notons d un diviseur commun de x et y. Puisque d divise x^2 et y^2, il divise également $x^2 - 8y^2 = 1$, d'où $d = -1$ ou $d = 1$. Nous avons montré que les entiers x et y sont premiers entre eux.

   Remarque. L'hypothèse $(x, y) \neq (0,0)$ est inutile.

Partie C. Lien avec le calcul matriciel

1. La formule de définition de la multiplication de deux matrices donne immédiatement

$$\begin{cases} x' = 3x + 8y \\ y' = x + 3y. \end{cases}$$

2. Appliquons la formule du cours

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

   On trouve

$$\mathrm{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

   Nous en déduisons x' et y' en fonction de x et y :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathrm{A}^{-1}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x' - 8y' \\ -x' + 3y' \end{pmatrix},$$

donc

$$\begin{cases} x = 3x' - 8y' \\ y = -x' + 3y'. \end{cases}$$

3. L'identité

$$\begin{aligned} x'^2 - 8y'^2 &= (3x+8y)^2 - 8(x+3y)^2 \\ &= 9x^2 + 64y^2 + 48xy - 8x^2 - 72y^2 - 48xy \\ &= x^2 - 8y^2 \end{aligned}$$

montre que (x, y) est une solution de (E) si et seulement si (x', y') est une solution de (E).

4. Démontrons par récurrence sur l'entier n que (x_n, y_n) est une solution de (E) pour tout entier naturel n.

   Le couple $(x_0, y_0) = (3, 1)$ est une solution de (E) et si (x_p, y_p) est une solution de (E), alors d'après la question C.3, (x_{p+1}, y_{p+1}) est une solution de (E), donc (x_n, y_n) est une solution de (E) pour tout entier naturel n.

PARTIE D. RETOUR AU PROBLÈME INITIAL

D'après la question A.2.b, le problème revient à trouver un couple $(2n+1, p)$ solution de (E) telle que $1+2+\cdots+n \geqslant 2015$. L'inégalité précédente est équivalente à l'inégalité $n(n+1) \geqslant 4030$ d'où $n \geqslant 63$. Cherchons un couple (x_k, y_k) telle que x_k est impair et $x_k \geqslant 2 \times 63 + 1 = 127$. À la main ou avec une calculatrice, nous trouvons $(x_1, y_1) = (99, 35)$, $(x_2, y_2) = (577, 204)$, ... Le nombre triangulaire 41 616 est une solution du problème :

$$41616 = 1+2+\cdots+\frac{577-1}{2} \qquad \text{et} \qquad 41616 = 204^2.$$

Sujet 7

Métropole

22 juin 2015

Exercice 1 (6 points)
Commun à tous les candidats.

Les résultats des probabilités seront arrondis à 10^{-3} près.

PARTIE A

1. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre λ, où λ est un réel strictement positif donné.

   On rappelle que la densité de probabilité de cette loi est la fonction f définie $[0;+\infty[$ par $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$.

   a. Soit c et d deux réels tels que $0 \leqslant c \leqslant d$. Démontrer que la probabilité $\mathbb{P}(c \leqslant X \leqslant d)$ vérifie $\mathbb{P}(c \leqslant X \leqslant d) = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}$.

   b. Déterminer une valeur de λ à 10^{-3} près de telle sorte que la probabilité $\mathbb{P}(X > 20)$ soit égale à 0,05.

   c. Donner l'espérance de la variable aléatoire X.

   Dans la suite de l'exercice on prend $\lambda = 0{,}15$**.**

   d. Calculer $\mathbb{P}(10 \leqslant X \leqslant 20)$.

   e. Calculer la probabilité de l'événement $(X > 18)$.

2. Soit Y une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance 16 et d'écart-type 1,95.

   a. Calculer la probabilité de l'événement $(20 \leqslant Y \leqslant 21)$.

   b. Calculer la probabilité de l'événement $(Y < 11) \cup (Y > 21)$.

PARTIE B

Une chaîne de magasins souhaite fidéliser ses clients en offrant des bons d'achat à ses clients privilégiés. Chacun d'eux reçoit un bon d'achat de couleur verte ou rouge sur lequel est inscrit un montant.

Les bons d'achat sont distribués de façon à avoir, dans chaque magasin, un quart de bons rouges et trois quarts de bons verts.

Les bons d'achat verts prennent la valeur de 30 euros avec une probabilité égale à 0,067 ou des valeurs comprises entre 0 et 15 euros avec des probabilités non précisées ici.

De façon analogue, les bons d'achat rouges prennent les valeurs 30 ou 100 euros avec des probabilités respectivement égales à 0,015 et 0,010 ou des valeurs comprises entre 10 et 20 euros avec des probabilités non précisées ici.

1. Calculer la probabilité d'avoir un bon d'achat d'une valeur supérieure ou égale à 30 euros sachant qu'il est rouge.
2. Montrer qu'une valeur approchées à 10^{-3} près de la probabilité d'avoir un bon d'achat d'une valeur supérieure ou égale à 30 euros vaut 0,057.

   Pour la question suivante, on utilise cette valeur.
3. Dans un des magasins de cette chaîne, sur 200 cleints privilégiés, 6 ont reçu un bon d'chat d'une valeur supérieure ou égale à 30 euros.

   Le directeur du magasin considéré estime que ce nombre est insuffisant et doute de la répartition au hasard des bons d'achat dans les différents magasins de la chaîne.

   Ses doutes sont-ils justifiés ?

Exercice 2 (3 points)
Commun à tous les candidats.

Dans un repère orthonormé (O, I, J, K) d'unité 1 cm, on considère les points $A(0; -1; 5)$, $B(2; -1; 5)$, $C(11; 0; 1)$, $D(11; 4; 4)$.

Un point M se déplace sur la droite (AB) dans le sens A vers B à la vitesse de 1 cm/s. Un point N se déplace sur la droite (CD) dans le sens de C vers D à la vitesse de 1 cm/s. À l'instant $t = 0$ le point M est en A et le point N est en C. On note M_t et N_t les positions des points M et N au bout de t secondes, t désignant un nombre réel positif.

On admet que M_t et N_t ont pour coordonnées $M_t(t;-1;5)$ et $N_t(11;0{,}8t;1+0{,}6t)$.

Les questions 1 *et* 2 *sont indépendantes.*

1. a. La droite (AB) est parallèle à l'un des axes (OI), (OJ) ou (OK). Lequel ?
   b. La droite (CD) se trouve dans un plan $\mathscr{P}$ parallèle à l'un des plans (OIJ), (OIK) ou (OJK). Lequel ? On donnera une équation de ce plan $\mathscr{P}$.
   c. Vérifier que la droite (AB), orthogonale au plan $\mathscr{P}$, coupe ce plan au point $E(11;-1;5)$.
   d. Les droites (AB) et (CD) sont-elles sécantes ?
2. a. Montrer $M_tN_t^2 = 2t^2 - 25{,}2t + 138$.
   b. À quel instant t la longueur M_tN_t est-elle minimale ?

Exercice 3 (5 points)
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation (E) d'inconnue z :
$$z^2 - 8z + 64 = 0.$$
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.
2. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 4+4i\sqrt{3}$, $b = 4-4i\sqrt{3}$ et $c = 8i$.
   a. Calculer le module et un argument du nombre a.
   b. Donner la forme exponentielle des nombres a et b.
   c. Montrer que les points A, B et C sont sur un même cercle $\mathscr{C}$ de centre O dont on déterminera le rayon.
   d. Placer les points A, B et C dans le repère $(O;\vec{u};\vec{v})$.

   Pour la suite de l'exercice, on pourra s'aider de la figure de la question 2.d complétée au fur et à mesure de l'avancement des questions.
3. On considère les points A′, B′ et C′ d'affixes respectives $a' = ae^{i\pi/3}$, $b' = be^{i\pi/3}$ et $c' = ce^{i\pi/3}$.
   a. Montrer que $b' = 8$.

b. Calculer le module et un argument du nombre a'.

Pour la suite on admet que $a' = -4 + 4\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $c' = -4\sqrt{3} + 4\mathrm{i}$.

4. On admet que si M et N sont deux points du plan d'affixes respectives m et n alors le milieu I du point segment [MN] a pour affixe $(m+n)/2$ et la longueur MN est égale à $|n-m|$.

   a. On note r, s et t les affixes des milieux respectifs R, S et T des segments [A′B], [B′C] et [C′A].
   Calculer r et s. On admet que $t = 2 - 2\sqrt{3} + \mathrm{i}(2 + 2\sqrt{3})$.

   b. Quelle conjecture peut-on faire quant à la nature du triangle RST ? Justifier ce résultat.

Exercice 3 (5 points)
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité.

1. On considère l'équation à résoudre dans $\mathbb{Z}$:

$$7x - 5y = 1 \qquad \text{(E)}$$

   a. Vérifier que le couple $(3;4)$ est solution de (E).

   b. Montrer que le couple d'entiers $(x;y)$ est solution de (E) si et seulement si $7(x-3) = 5(y-4)$.

   c. Montrer que les solutions entières de l'équation (E) sont exactement les couples $(x;y)$ d'entiers relatifs tels que

$$\begin{cases} x = 5k+3 \\ y = 7k+4 \end{cases} \qquad (k \in \mathrm{Z}).$$

2. Une boîte contient 25 jetons, des rouges, des verts et des blancs. Sur les 25 jetons il y a x jetons rouges et y jetons verts. Sachant que $7x - 5y = 1$, quels peuvent être les nombres de jetons rouges, verts et blancs ?
   Dans la suite, on supposera qu'il y a 3 jetons rouges et 4 jetons verts.

3. On considère la marche aléatoire suivante d'un pion sur un triangle ABC. À chaque étape, on tire au hasard un des jetons parmi les 25, puis on le remet dans la boîte.

Lorsqu'on est en A : si le jeton tiré est rouge, le pion va en B. Si le jeton tiré est vert, le pion va en C. Si le jeton tiré est blanc, le pion reste en A.

Lorsqu'on est en B : si le jeton tiré est rouge, le pion va en A. Si le jeton tiré est vert, le pion va en C. Si le jeton tiré est blanc, le pion reste en B.

Lorsqu'on est en C : si le jeton tiré est rouge, le pion va en A. Si le jeton tiré est vert, le pion va en B. Si le jeton tiré est blanc, le pion reste en C.

Au départ, le pion est sur le sommet A.

Pour tout entier naturel n, on note a_n, b_n et c_n les probabilités que le pion soit respectivement sur les sommets A, B et C à l'étape n.

On note X_n la matrice ligne $(a_n \ b_n \ c_n)$ et T la matrice

$$\begin{pmatrix} 0{,}72 & 0{,}12 & 0{,}16 \\ 0{,}12 & 0{,}72 & 0{,}16 \\ 0{,}12 & 0{,}16 & 0{,}72 \end{pmatrix}.$$

Donner la matrice ligne X_n et montrer que pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = X_n T$.

4. On admet que $T = PDP^{-1}$ où

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 3/10 & 37/110 & 4/11 \\ 1/10 & -1/10 & 0 \\ 0 & 1/11 & -1/11 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}56 \end{pmatrix}.$$

a. À l'aide de la calculatrice, donner les coefficients de la matrice P. On pourra remarquer qu'ils sont entiers.

b. Montrer que $T^n = PD^nP^{-1}$.

c. Donner sans justification les coefficients de la matrice D^n.

On note α_n, β_n, γ_n les coefficients de la première ligne de la matrice T^n ainsi :

$$T^n = \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n & \gamma_n \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

On admet que

$$\alpha_n = \frac{3}{10} + \frac{7}{10} \times 0{,}6^n \quad \text{et} \quad \beta_n = \frac{37 - 77 \times 0{,}6^n + 40 \times 0{,}56^n}{110}.$$

On ne cherchera pas à calculer les coefficents de la deuxième ligne ni ceux de la troisième ligne.

5. On rappelle que, pour tout entier naturel n, $X_n = X_0 T^n$.
   a. Déterminer les nombres a_n, b_n à l'aide des coefficents α_n et β_n. En déduire c_n.
   b. Détermner les limites des suites (a_n), (b_n) et (c_n).
   c. Sur quel sommet a-t-on le plus de chance de se retouver après un grand nombre itérations de cette marche aléatoire ?

Exercice 4 (6 points)
Commun à tous les candidats.

Une municipalité a décidé d'installer un module de skateboard dans un parc de la commune. Le dessin de la figure 1 en fournit une perspective cavalière. Les quadrilatères OAD′D, DD′C′C et OAB′B sont des rectangles. Le plan de face (OBD) est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). L'unité est le mètre. La largeur du module est de 10 m, autrement dit, DD′ = 10, sa longueur OD est de 20 m.

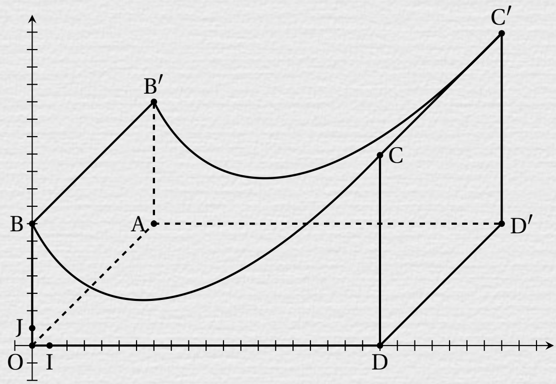


FIGURE 1

Le but du problème est de déterminer l'aire des différentes surfaces à peindre.

Le profil du module de skateboard a été modélisé à partir d'une photo par la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;20]$ par

$$f(x) = (x+1)\ln(x+1) - 3x + 7.$$

On note f' la fonction dérivée de la fonction f et $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le repère $(\mathrm{O}, \mathrm{I}, \mathrm{J})$.

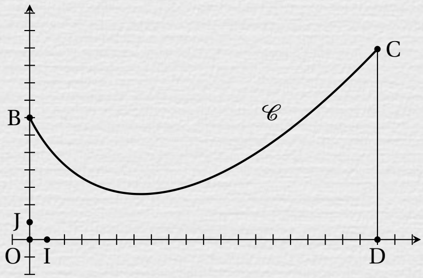


FIGURE 2

PARTIE A

1. Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0\,;20]$, on a

$$f'(x) = \ln(x+1) - 2.$$

2. En déduire les variations de f sur l'intervalle $[0\,;20]$ et dresser son tableau de variation.
3. Calculer le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0. La valeur absolue de ce coefficient est appelée l'inclinaison du module de skateboard au point B.
4. On admet que la fonction g définie sur l'intervalle $[0\,;20]$ par

$$g(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2\ln(x+1) - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x$$

a pour dérivée la fonction g' définie sur l'intervalle $[0\,;20]$ par

$$g'(x) = (x+1)\ln(x+1).$$

Déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;20]$.

PARTIE B

Les trois questions de cette partie sont indépendantes.

1. Les propositions suivantes sont-elles exactes ? Justifier les réponses.

   P1 : la différence de hauteur entre le point le plus haut et le point le plus bas de la piste est au moins égale à 8 m.

   P2 : L'inclinaison de la piste est presque deux fois plus grande en B qu'en C.

2. On souhaite recouvrir les quatre faces latérales de ce module d'une couche de peinture rouge. La peinture utilisée permet de couvrir une surface de $5\ \text{m}^2$ par litre.

   Déterminer, à 1 litre près, le nombre minimum de litres de peinture nécessaires.

3. On souhaite peindre en noir la piste roulante, autrement dit la surface supérieure du module.

   Afin de déterminer une valeur approchée de l'aire de la partie à peindre, on considère dans le repère $(\text{O}, \text{I}, \text{J})$ du plan de face, les points $\text{B}_k(k\,;f(k))$ pour k variant de 0 à 20. Ainsi, $\text{B}_0 = \text{B}$.

   On décide d'approcher l'arc de la courbe $\mathscr{C}$ allant de B_k à B_{k+1} par le segment $[\text{B}_k\text{B}_{k+1}]$. Ainsi l'aire de la surface à peindre sera approchée par la somme des aires des rectangles du type $\text{B}_k\text{B}_{k+1}\text{B}'_{k+1}\text{B}'_k$ (voir figure 3).

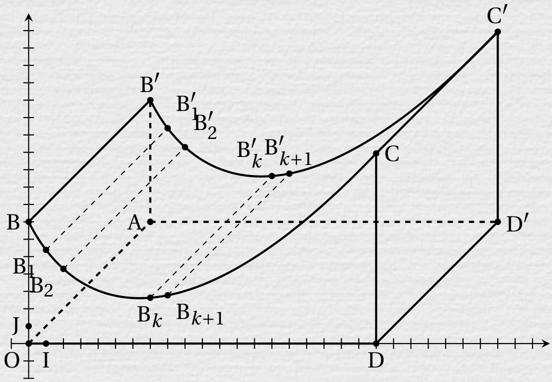


FIGURE 3

a. Montrer que pour tout entier k variant de 0 à 19,

$$\mathrm{B}_k\mathrm{B}_{k+1} = \sqrt{1 + \left(f(k+1) - f(k)\right)^2}.$$

b. Compléter l'algorithme de la figure 4 pour qu'il affiche une estimation de l'aire de la partie roulante.

Variables	S : réel
	K : entier
Fonction	f : définie par $f(x) = (x+1)\ln(x+1) - 3x + 7$
Traitement	S prend pour valeur 0
	Pour K variant de .... à ....
	S prend pour valeur ....
	Fin Pour
Sortie	Afficher ....

FIGURE 4

Exercice 1

Commun à tous les candidats.

Partie A

1. a. Puisque X est une loi à densité, pour tous réels c et d tels que $0 \leqslant c \leqslant d$, on a

$$\mathbb{P}(c \leqslant X \leqslant d) = \int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x = \int_c^d \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_c^d = \mathrm{e}^{-\lambda c} - \mathrm{e}^{-\lambda d}.$$

b. On a $\mathbb{P}(X > 20) = 1 - \mathbb{P}(X \leqslant 20)$ ou encore $\mathbb{P}(X > 20) = 1 - \mathbb{P}(0 \leqslant 0 \leqslant 20)$ puisque X est à valeurs dans l'intervalle $[0\,;+\infty[$. À l'aide de la formule démontrée à la question précédente, nous trouvons

$$\mathbb{P}(X > 20) = 1 - (\mathrm{e}^0 - \mathrm{e}^{-20\lambda}) = \mathrm{e}^{-20\lambda}.$$

Par conséquent,

$$\mathbb{P}(X > 20) = 0{,}05 \iff \mathrm{e}^{-20\lambda} = \frac{1}{20} \iff -20\lambda = -\ln(20) \iff \lambda = \frac{1}{20}\ln(20).$$

c. L'espérance de la variable X est $1/\lambda = 20/\ln(20)$.

d. Encore avec la formule de la question A.1.a, nous trouvons

$$\mathbb{P}(10 \leqslant X \leqslant 20) = \mathrm{e}^{-0{,}15\times 10} - \mathrm{e}^{-0{,}15\times 20} = \mathrm{e}^{-1{,}5} - \mathrm{e}^{-3} \approx 0{,}173.$$

e. Le contraire de l'événement $\{X > 18\}$ est l'événement $\{X \leqslant 18\}$ qui a la même probabilité que l'événement $\{0 \leqslant X \leqslant 18\}$, donc

$$\mathbb{P}(X > 18) = 1 - \mathbb{P}(0 \leqslant X \leqslant 18) = 1 - (\mathrm{e}^0 - \mathrm{e}^{-0{,}15\times 18}) = \mathrm{e}^{-2{,}7} \approx 0{,}067.$$

2. a. À l'aide de la calculatrice,

$$\mathbb{P}(20 \leqslant Y \leqslant 21) \approx 0{,}015.$$

b. Les événements $\{Y < 11\}$ et $\{Y > 21\}$ sont incompatibles, donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{Y < 11\} \cup \{Y > 21\}) &= \mathbb{P}(Y < 11) + \mathbb{P}(Y > 21)\\ &= \mathbb{P}(Y < 16 - 5) + \mathbb{P}(Y > 16 + 5)\\ &= 2 \times \mathbb{P}(Y < 11)\\ &\approx 0{,}010.\end{aligned}$$

Partie B

1. Notons R l'événement « le bon d'achat est rouge ». Soit V la variable aléatoire qui représente la valeur d'un bon d'achat. L'événement $\{V \geqslant 30\} \cap R$ est égale à l'union des événements incompatibles $\{V = 30\} \cap R$ et $\{V = 100\} \cap R$, donc la probabilité pour qu'un bon d'achat rouge ait une valeur supérieur ou égale à 30 euros est égale à

$$\mathbb{P}_R(V \geqslant 30) = \mathbb{P}_R(V = 30) + \mathbb{P}_R(V = 100) = 0{,}015 + 0{,}010 = 0{,}025.$$

2. Utilisons la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(V \geqslant 30) &= \mathbb{P}(R) \times \mathbb{P}_R(V \geqslant 30) + \mathbb{P}(\overline{R}) \times \mathbb{P}_{\overline{R}}(V \geqslant 30)\\ &= 0{,}25 \times 0{,}025 + 0{,}75 \times 0{,}067\\ &= 0{,}0565.\end{aligned}$$

La probabilité de recevoir un bon d'achat d'une valeur supérieure ou égale à 30 euros est, à 10^{-3} près, égale à 0,057.

3. La taille $n = 200$ de l'échantillon et la probabilité $p = 0{,}057$ de recevoir un bon d'achat d'une valeur supérieure ou égale à 30 euros vérifient les inégalités $n \geqslant 30$, $np = 11{,}4 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 188{,}6 \geqslant 5$, donc un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de confiance de 95 % de la proportion de bons d'achat d'une valeur supérieure ou égale à 30 euros dans un échantillon de taille 200 est

$$\begin{aligned}I &= \left[p - 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\,;\, p + 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]\\ &= \left[0{,}057 + 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}057 \times 0{,}943}{200}}\,;\, 0{,}057 + 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}057 \times 0{,}943}{200}}\right]\\ &\approx [0{,}024\,;\,0{,}089].\end{aligned}$$

Dans l'échantillon, la proportion de bons d'achat d'une valeur supérieure ou égale à 30 euros est égale à $f = 6/200 = 0{,}03$. Étant donné que $f \in$ i, les doutes du directeur du magasin ne sont pas justifiés.

Exercice 2

Commun à tous les candidats.

1. a. Les points A et B ont la même côte et même ordonnées, par conséquent la droite (AB) est parallèle à l'axe des abscisses (OI).

   Solution alternative. Le vecteur $\overrightarrow{AB}(2;0;0)$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{OI}(1;0;0)$, donc la droite (AB) est parallèle à la droite (OI).

   b. Les points C et D ont la même abscisse, donc la droite (CD) est parallèle au plan d'équation $x = 0$, c'est-à-dire (OJK). Nous en déduisons que le vecteur $\overrightarrow{OI}(1;0;0)$ est normal au plan $\mathscr{P}$, et donc une équation paramétrique de ce plan est $x + d = 0$ où d est un réel. Pour déterminer d il suffit d'écrire que le point C vérifie cette équation. Nous obtenons ainsi $11 + d = 0$, soit $d = -11$. Finalement, une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ est $x - 11 = 0$.

   c. Les points A et B appartiennent aux plans d'équations $y = -1$ et $z = 5$, donc la droite (AB) est l'intersection de ces plans.

   Le point E appartient aux plans d'équations $x = 11$, $y = -1$ et $z = 5$, donc c'est le point d'intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la droite (AB).

   d. Nous déduisons de la question précédente que les droites (AB) et (CD) sont sécantes si, et seulement si, le point E appartient à la droite (CD), c'est-à-dire si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{CD}(0;4;3)$ et $\overrightarrow{CE}(0;-1;4)$ sont colinéaires ce qui n'est clairement pas le cas $(4/(-1) \neq 3/4)$; les droites (AB) et (CD) ne sont donc pas sécantes.

2. a. Le repère est orthonormé, donc pour tout réel $t \geqslant 0$, on a

$$\begin{aligned} M_tN_t^2 &= (11-t)^2 + (0{,}8t+1)^2 + (1+0{,}6t-5)^2 \\ &= 121 - 22t + t^2 + 0{,}64t^2 + 1{,}6t + 1 + 0{,}36t^2 - 4{,}8t + 16 \\ &= 2t^2 - 25{,}2t + 138. \end{aligned}$$

   b. Étant donnée que la longueur M_tN_t est positive, celle-ci est minimale si, et seulement si, $M_tN_t^2$ est minimal. Or $M_tN_t^2$ est une fonction polynomiale du second de la variable t dont la forme canonique est

$$M_tN_t^2 = 2(t^2 - 12{,}6t) + 138 = 2(t-6{,}3)^2 - 2 \times 6{,}3^2 + 138,$$

   par conséquent la distance M_tN_t est minimale à l'instant $t = 6{,}3$.

Exercice 3

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.

1. Le discriminant du polynôme du second degré $z^2-8z+64$ est égal à $(-8)^2 - 4\times 1\times 64 = -192 = (8\mathrm{i}\sqrt{3})^2$. L'équation $z^2-8z+64$ possède deux racines complexes conjuguées

$$\frac{8-8\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = 4-4\mathrm{i}\sqrt{3} \quad \text{et} \quad 4+4\mathrm{i}\sqrt{3}.$$

2. a. Le module de a est égale à

$$|a| = \sqrt{4^2+(4\sqrt{3})^2} = 8.$$

Soit θ un argument de a. Il vérifie

$$a = 8(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta),$$

d'où $\cos\theta = 1/2$ et $\sin\theta = \sqrt{3}/2$, donc $\theta = \pi/3$.

b. Nous déduisons de la question précédente que la forme exponentielle de a est

$$a = 8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}.$$

Puisque a et b sont conjugués, ils ont le même module et des arguments opposés, donc la forme exponentielle de b est

$$b = 8\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3}.$$

c. On a $\mathrm{OA} = |a| = 8$, $\mathrm{OB} = |b| = 8$ et $\mathrm{OC} = |c| = 8\,|\mathrm{i}| = 8$. Par conséquent, les points A, B et C sont situés sur le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 8.

d. Voir la figure 5 page suivante.

3. a. À l'aide de la forme exponentielle du nombre b, nous trouvons

$$b' = b\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3} = 8\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3} = 8\mathrm{e}^{0} = 8.$$

b. On a

$$\left|a'\right| = \left|a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}\right| = |a|\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}\right| = |a| = 8$$

et

$$\arg a' \equiv \arg(a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}) \equiv \arg a + \arg \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3} \equiv \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \equiv \frac{2\pi}{3} \pmod{2\pi}.$$

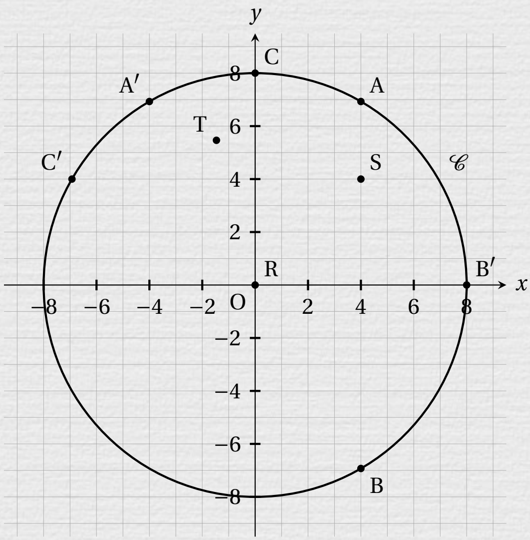


FIGURE 5

4. Les points R et S ont pour affixes respectives

$$r = \frac{a' + b}{2} = \frac{-4 + 4\mathrm{i}\sqrt{3} + 4 - 4\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = 0 \quad \text{et} \quad s = \frac{b' + c}{2} = \frac{8 + 8\mathrm{i}}{2} = 4 + 4\mathrm{i}.$$

5. La figure suggère la conjecture suivante :

Conjecture. *Le triangle* RST *est équilatéral.*

Démontrons-la. Calculons

$$\begin{aligned}
RS^2 &= |s-r|^2 = |4+4i|^2 = 4^2+4^2 = 32\\
RT^2 &= |t-r|^2 = \left|2-2\sqrt{3}+i(2+2\sqrt{3})\right|^2\\
&= (2-2\sqrt{3})^2+(2+2\sqrt{3})^2\\
&= 2^2+(2\sqrt{3})^2 = 32\\
ST^2 &= |s-t|^2 = \left|2+2\sqrt{3}+i(2-2\sqrt{3})\right|^2\\
&= (2+2\sqrt{3})^2+(2-2\sqrt{3})^2\\
&= 2^2+(2\sqrt{3})^2 = 32.
\end{aligned}$$

De RS = RT = ST, nous déduisons que le triangle RST est équilatéral.

Exercice 3

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité.

1. a. Le couple $(3,4)$ est un couple d'entiers tel que $7\times 3-5\times 4 = 21-20 = 1$, donc il est bien solution de l'équation (E).

   b. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{cases} 7x-5y = 1\\ (x,y)\in\mathbb{Z}^2 \end{cases} \iff 7x-5y = 7\times 3-5\times 4 \iff 7(x-3) = 5(y-4).$$

   c. Soit (x,y) une solution de (E). Alors, d'après la question précédente,

$$7(x-3) = 5(y-3). \qquad \text{(E')}$$

   Nous voyons que 5 divise $7(x-3)$, mais étant donné que 5 et 7 sont premiers entre eux, le théorème de Gauss affirme que 5 divise $x-3$. Ainsi il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que

$$x = 3+5k.$$

   En substituant dans l'équation (E'), on obtient

$$7\times 5k = 5(y-4)$$

d'où on tire

$$y = 4 + 7k.$$

Ainsi toute solution de (E) est de la forme $(3+5k, 4+7k)$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Réciproquement, on montre que tout couple de cette forme est une solution de (E). En effet,

$$7(3+5k) - 5(4+7k) = 21 + 35k - 20 - 35k = 1.$$

Nous avons démontré que l'ensemble des solutions de l'équation (E) est

$$\left\{(3+5k, 4+7k) \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

2. Le nombre de jetons rouges et verts vérifient les conditions suivantes :

$$\begin{cases} 7x - 5y = 1 \\ 0 \leqslant x + y \leqslant 25 \end{cases} \tag{1}$$

$$(1) \iff \begin{cases} k \in \mathbb{Z} \\ x = 5k+3 \\ y = 7k+4 \\ 0 \leqslant 12k + 7 \leqslant 25 \end{cases} \iff \begin{cases} k \in \mathbb{Z} \\ x = 5k+3 \\ y = 7k+4 \\ -7/12 \leqslant k \leqslant 3/2. \end{cases}$$

Donc $k = 0$ ou $k = 1$. Si $k = 0$, il y a 3 jetons rouges, 4 jetons verts et 18 jetons blancs. Si $k = 1$, il y a 8 jetons rouges, 11 jetons verts et 6 jetons blancs.

3. On a $\mathrm{X}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4. a. La calculatrice donne

$$\mathrm{P} = (\mathrm{P}^{-1})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 1 & -3 & 4 \\ 1 & -3 & -7 \end{pmatrix}.$$

b. Démontrons par récurrence sur l'entier n que $\mathrm{T}^n = \mathrm{PD}^n\mathrm{P}^{-1}$ pour tout entier $n \geqslant 0$.

Initialisation. Pour $n = 0$, $\mathrm{T}^n = \mathrm{I}$ et $\mathrm{PD}^n\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{PP}^{-1} = \mathrm{I}$, donc l'égalité est vraie.

Hérédité. Soit un entier $k \geqslant 0$. Supposons que $T^k = PD^kP^{-1}$. Alors

$$T^{k+1} = (PDP^{-1})(PD^kP^{-1}) = PD(P^{-1}P)D^kP^{-1} = PDD^kP^{-1} = PD^{k+1}P^{-1}.$$

Conclusion. L'égalité est vraie pour $n = 0$ et si elle est vraie pour l'entier $n = k$ alors elle est vraie pour $n = k+1$, donc d'après le principe de la démonstration par récurrence, l'égalité est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$.

c. On a

$$D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}6^n & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}56^n \end{pmatrix}.$$

5. a. D'après la question précédente,

$$X_n = X_0T^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n & \gamma_n \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n & \gamma_n \end{pmatrix}.$$

donc

$$a_n = \alpha_n = \frac{3}{10} + \frac{7}{10} \times 0{,}6^n,$$
$$b_n = \beta_n = \frac{37 - 77 \times 0{,}6^n + 40 \times 0{,}56^n}{110},$$
$$c_n = 1 - a_n - b_n = \frac{4 - 4 \times 0{,}56^n}{11}.$$

b. Étant donné que $\lim_{n\to+\infty} 0{,}6^n = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} 0{,}56^n = 0$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{3}{10}, \qquad \lim_{n\to+\infty} b_n = \frac{37}{110} \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} c_n = \frac{4}{11}.$$

c. Étant donné que $\lim_{n\to+\infty} c_n > \lim_{n\to+\infty} b_n > \lim_{n\to+\infty} c_n$, il existe un entier $N \geqslant 0$ tel que $c_n > b_n > a_n$ pour tout entier $n \geqslant N$. En d'autres termes, à partir de N itérations, le jeton à plus de chance de se trouver en C.

x	0		e^2-1		20
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	7	$\searrow$	$10-e^2$	$\nearrow$	$21\ln(21)-53$

FIGURE 6 – *Tableau de variation de la fonction f.*

Exercice 4

Commun à tous les candidats.

PARTIE A

1. La fonction f, définie comme la somme et le produit de fonctions dérivables sur l'intervalle $[0;20]$, est dérivable et pour tout $x \in [0;20]$, on a

$$f'(x) = \ln(x+1) + \frac{x+1}{x+1} - 3 = \ln(x+1) - 2.$$

2. Résolvons l'équation $f'(x) = 0$ sur $[0;20]$:

$$f'(x) = 0 \iff \ln(x+1) = 2 \iff x+1 = e^2 \iff x = e^2 - 1.$$

La fonction logarithme est strictement croissante, donc la fonction dérivée f' est strictement croissante sur $[0;20]$ et s'annule en $x = e^2 - 1$, d'où le tableau de variation de la fonction f de la figure 6.

Le minimum de la fonction f est

$$f(e^2-1) = e^2\ln(e^2) - 3(e^2-1) + 7 = 2e^2\ln(e) - 3e^2 + 10 = 10 - e^2.$$

3. Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 est égale à $f'(0) = \ln(1) - 2 = -2$.

4. Remarquons d'abord que $f(x) = g'(x) - 3x + 7$ pour tout $x \in [0;20]$. On en déduit immédiatement que la fonction F définie sur l'intervalle $[0;20]$ par

$$F(x) = g(x) - \frac{3}{2}x^2 + 7x = \frac{1}{2}(x+1)^2 \ln(x+1) - \frac{7}{4}x^2 + \frac{13}{2}x.$$

est une primitive de la fonction f.

PARTIE B

1. *Proposition 1.* L'étude du sens de variation de la fonction f montre que celle-ci possède un minimum global en $e^2 - 1$ de valeur $10 - e^2$ et des maxima locaux en 0 et 20 de valeurs 7 et $21\ln(21) - 53 \approx 10{,}93$. Par conséquent, la différence de hauteur entre le point le plus haut et le point le plus bas est égale à $21\ln(21) - 53 - (10 - e^2) \approx 8{,}32$, soit un peu plus de 8 mètres ; la proposition est vraie.

   Proposition 2. L'inclinaison au point B est $\left|f'(0)\right| = |\ln(1) - 2| = 2$, et l'inclinaison au point C est $\left|f'(20)\right| = |\ln(21) - 2| \approx 1{,}045$. La pente en B est effectivement presque deux fois plus grande que celle en C ; la proposition est vraie.

2. Déterminons l'aire des faces latérales du module.

   — *Face de profil gauche.* C'est un rectangle dont les dimensions sont $f(0) = 7$ et $OA = DD' = 10$, donc son aire est égale à

   $$\mathscr{A}_{\text{face gauche}} = 7 \times 10 = 70.$$

   — *Face de profil droite.* C'est un rectangle de dimensions $f(20) = 21\ln(21) - 53$ et $DD' = 10$, donc son aire est égale à

   $$\mathscr{A}_{\text{face droite}} = 210\ln(21) - 530.$$

   — *Face de front.* Elle est délimitée par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 20$. De plus, la fonction f est positive, donc l'aire de cette face est égale à l'intégrale de la fonction f sur l'intervalle $[0;20]$:

   $$\mathscr{A}_{\text{face de front}} = \int_0^{20} f(x)\,dx = F(20) - F(0) = \frac{441}{2}\ln(21) - 570.$$

L'aire totale de la surface à peindre est égale à

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_{\text{faces latérales}} &= \mathscr{A}_{\text{face gauche}} + \mathscr{A}_{\text{face droite}} + 2 \times \mathscr{A}_{\text{face de front}} \\ &= 4651 \ln(21) - 1600.\end{aligned}$$

Nous en déduisons que la quantité de peinture nécessaire est égale à

$$\frac{\mathscr{A}_{\text{faces latérales}}}{5} = \frac{4651}{5} \ln(21) - 320,$$

soit 77 litres en arrondissant au litre (supérieur évidemment).

3. a. Soit $k \in \{0, 1, \ldots, 19\}$. Puisque le repère est orthonormé,

$$B_k B_{k+1} = \sqrt{\left((k+1) - k\right)^2 + \left(f(k+1) - f(k)\right)^2} = \sqrt{1 + \left(f(k+1) - f(k)\right)^2}.$$

   b. L'aire de la partie roulante est égale à la somme des aires des rectangles $B_k B_{k+1} B'_{k+1} B'_k$ pour $k \in \{0, 1, \ldots, 19\}$, soit

$$\sum_{k=0}^{19} B_k B'_k \times B_k B_{k-1} = 10 \sum_{k=0}^{19} \sqrt{1 + \left(f(k+1) - f(k)\right)^2}$$

   Nous en déduisons l'algorithme de la figure 7.

Variables	S : réel
	K : entier
Fonction	f : définie par $f(x) = (x+1)\ln(x+1) - 3x + 7$
Traitement	S prend pour valeur 0
	Pour K variant de 0 à 19
	S prend pour valeur $S + \sqrt{1 + \left(f(K+1) - f(K)\right)^2}$
	Fin Pour
Sortie	Afficher $10 \times S$

FIGURE 7

Remarque. On pouvait également compléter l'algorithme comme sur la figure 8 page suivante. Cependant cette solution rejette plus de CO_2 à cause des 19 multiplications supplémentaires.

Variables	S : réel
	K : entier
Fonction	f : définie par $f(x) = (x+1)\ln(x+1) - 3x + 7$
Traitement	S prend pour valeur 0
	Pour K variant de 0 à 19
	S prend pour valeur $\mathrm{S} + 10\sqrt{1 + \left(f(\mathrm{K}+1) - f(\mathrm{K})\right)^2}$
	Fin Pour
Sortie	Afficher S

FIGURE 8

Sujet 8

Antilles-Guyanne

22 juin 2015

Exercice 1 (6 points)
Commun à tous les candidats.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \ln x$. Pour tout réel a strictement positif, on définit sur $]0\,;+\infty[$ la fonction g_a par $g_a(x) = ax^2$. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f et Γ_a suivant les valeurs du réel strictement positif a.

PARTIE A

On a construit (voir la figure 1 page suivante) les courbes $\mathscr{C}$, $\Gamma_{0,05}$, $\Gamma_{0,1}$, $\Gamma_{0,19}$ et $\Gamma_{0,4}$.

1. Nommer les différentes courbes sur le graphique. Aucune justification n'est demandée.
2. Utiliser le graphique pour émettre une conjecture sur le nombre de points d'intersection de $\mathscr{C}$ et Γ_a suivant les valeurs (à préciser) du réel a.

PARTIE B

Pour un réel a strictement positif, on considère la fonction h_a définie sur $]0\,;+\infty[$ par

$$h_a(x) = \ln x - ax^2.$$

1. Justifier que x est l'abscisse d'un point M appartenant à l'intersection de $\mathscr{C}$ et Γ_a si et seulement si $h_a(x) = 0$.
2. a. On admet que la fonction h_a est dérivable sur $]0\,;+\infty[$, et on note h'_a la dérivée de la fonction h_a sur cet intervalle. Le tableau de variation de la fonction h_a est donné ci-dessous. Justifier, par le calcul, le signe de $h'_a(x)$ pour x appartenant à $]0\,;+\infty[$.

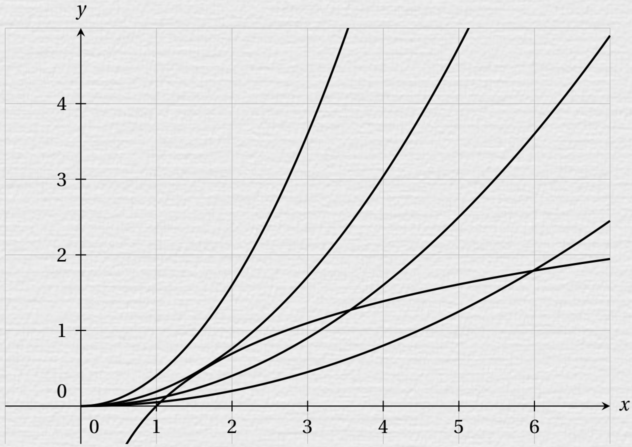


FIGURE 1

b. Rappeler la limite de $(\ln x)/x$ en $+\infty$. En déduire la limite de la fonction h_a en $+\infty$. On ne demande pas de justifier la limite de h_a en 0.

3. Dans cette question et uniquement dans cette question, on suppose que $a = 0{,}1$.

   a. Justifier que, dans l'intervalle $]0\,;1/\sqrt{0{,}2}]$, l'équation $h_{0,1}(x) = 0$ admet une unique solution. On admet que cette question a aussi une seule solution dans l'intervalle

$$]1/\sqrt{0{,}2}\,;+\infty[.$$

   b. Quel est le nombre de points d'intersection de $\mathscr{C}$ et $\Gamma_{0,1}$?

4. Dans cette question et uniquement dans cette question, on suppose que $a = 1/(2\mathrm{e})$.

   a. Déterminer la valeur du maximum de $h_{1/(2\mathrm{e})}$.

   b. En déduire le nombre de points d'intersection des courbes $\mathscr{C}$ et $\Gamma_{1/(2\mathrm{e})}$. Justifier.

Exercice 2 (5 points)
Commun à tous les candidats.

La partie C *peut être traitée indépendamment des parties A et B.*

Partie A

On considère une variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$. On rappelle que, pour tout réel a strictement positif,

$$\mathbb{P}(X \leqslant a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda t}\, dt.$$

On se propose de calculer l'espérance mathématique de X, notée E(X), et définie par

$$E(X) = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\, dt.$$

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

On admet que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(t) = -(t + 1/\lambda)e^{-\lambda t}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$.

1. Soit x un nombre réel strictement positif. Vérifier que

$$\int_0^x \lambda t e^{-\lambda t}\, dt = \frac{1}{\lambda}(-\lambda x e^{-\lambda x} - e^{-\lambda x} + 1).$$

2. En déduire que $E(X) = 1/\lambda$.

Partie B

La durée de vie, exprimée en années, d'un composant électronique peut être modélisée par une variable aléatoire notée X suivant la loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$.

La courbe de la fonction densité associée est représentée sur la figure 2 page suivante.

1. Sur le graphique de la figure 2 page suivante (à rendre avec la copie) :
   a. Représenter la probabilité $\mathbb{P}(X \leqslant 1)$.
   b. Indiquer où se lit directement la valeur de λ.
2. On suppose que $E(X) = 2$.

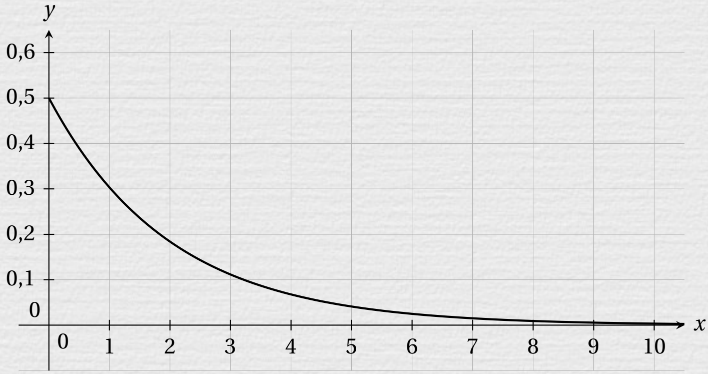


FIGURE 2

a. Que représente dans le cadre de l'exercice la valeur de l'espérance mathématique de la variable aléatoire X ?

b. Calculer la valeur λ.

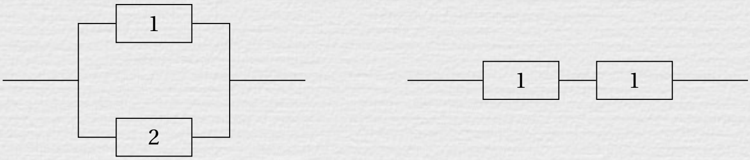
c. Calculer $\mathbb{P}(X \leqslant 2)$. On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie à 0,01 près. Interpréter ce résultat.

d. Sachant que la composant a déjà fonctionné une année, quelle est la probabilité que sa durée de vie totale soit d'au moins trois années ? On donnera la valeur exacte.

PARTIE C

Un circuit électronique est composé de deux composants identiques numérotés 1 et 2. On note D_1 l'événement « le composant 1 est défaillant avant un an » et on note D_2 l'événement « le composant 2 est défaillant avant un an ». On suppose que les deux événements D_1 et D_2 sont indépendants et que $\mathbb{P}(D_1) = \mathbb{P}(D_2) = 0{,}39$. Deux montages possibles sont envisagés, présentés sur la figure 3 page suivante.

1. Lorsque les deux composants sont montés « en parallèle », le circuit A est défaillant uniquement si les deux composants sont défaillants en même temps. Calculer la probabilité que le circuit A soit défaillant avant un an.



(a) *Circuit en parallèle A* (b) *Circuit en série B*

FIGURE 3

2. Lorsque les deux composants sont montés « en série », le circuit B est défaillant dès que l'un au moins des deux composants est défaillant. Calculer la probabilité que le circuit B soit défaillant avant un an.

Exercice 3 (4 points)
Commun à tous les candidats.

PARTIE A

On appelle $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$ on a placé un point M d'affixe z appartenant à $\mathbb{C}$, puis le point R intersection du cercle de centre O passant par M et du demi-axe $[O; \vec{u})$.

1. Exprimer l'affixe du point R en fonction de z.
2. Soit le point M$'$ d'affixe z' définie par

$$z' = \frac{1}{2}\left(\frac{z+|z|}{2}\right).$$

Reproduire la figure 4 page suivante sur la copie et construire le point M$'$.

PARTIE B

On définit la suite de nombres complexes (z_n) par un premier terme z_0 appartenant à $\mathbb{C}$ et, pour tout entier naturel n, par la relation de récurrence

$$z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{4}.$$

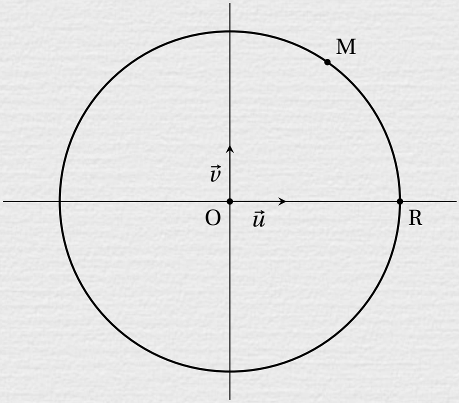


FIGURE 4

Le but de cette partie est d'étudier si le comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$ dépend du choix de z_0.

1. Que peut-on dire du comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$ quand z_0 est un nombre réel négatif ?
2. Que peut-on dire du comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$ quand z_0 est un nombre réel positif ?
3. On suppose désormais que z_0 n'est pas un nombre réel.
   a. Quelle conjecture peut-on faire sur le comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$?
   b. Démontrer cette conjecture, puis conclure.

Exercice 4 (5 points)
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.

PARTIE A

On considère l'algorithme de la figure 5 page suivante.

Faire fonctionner cet algorithme pour $p = 2$ en indiquant les valeurs des variables à chaque étape. Quel nombre obtient-on en sortie ?

Variables	k et p sont des entiers naturels
	u est un réel
Entrée	Demander la valeur de p
Traitement	Affecter à u la valeur 5
	Pour k variant de 1 à p
	Affecter à u la valeur $0{,}5u + 0{,}5(k-1) - 1{,}5$
	Fin de pour
Sortie	Afficher u

FIGURE 5

PARTIE B

Soit (u_n) la suite définie par son premier terme $u_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n par

$$u_{n+1} = 0{,}5u_n + 0{,}5n - 1{,}5.$$

1. Modifier l'algorithme de la première partie pour obtenir en sortie toutes les valeurs de u_n pour n variant de 1 à p.
2. À l'aide de l'algorithme modifié, après avoir saisi $p = 4$, on obtient les résultats de la table 1.

n	1	2	3	4
u_n	1	$-0{,}5$	$-0{,}75$	$-0{,}375$

TABLE 1

Peut-on affirmer, à partir de ces résultats, que la suite (u_n) est décroissante ? Justifier.

3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, $u_{n+1} > u_n$. Que peut-on en déduire quant au sens de variation de la suite (u_n) ?
4. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par

$$v_n = 0{,}1u_n - 0{,}1n + 0{,}5.$$

Variables	c est un entier naturel
	a et b sont des entiers naturels non nuls
Entrées	Demander a
	Demander b
Traitement	Affecter à c le nombre $r(a,b)$
	Tant que $c \neq 0$
	Affecter à a le nombre b
	Affecter à b la valeur de c
	Affecter à c le nombre $r(a,b)$
	Fin Tant que
Sortie	Afficher b

FIGURE 6

Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,5 et exprimer alors v_n en fonction de n.

5. En déduire que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = 10 \times 0{,}5^n + n - 5.$$

6. Déterminer alors la limite de la suite (u_n).

Exercice 4 (5 points)
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité.

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

PARTIE A

Pour deux entiers naturels non nuls a et b, on note $r(a,b)$ le reste de la division euclidienne de a par b.

On considère l'algorithme de la figure 11 page 160.

1. Faire fonctionner cet algorithme avec $a = 26$ et $b = 9$ en indiquant les valeurs de a, b et c à chaque étape.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

TABLE 2

2. Cet algorithme donne en sortie le PGCD des entiers naturels non nuls a et b. Le modifier pour qu'il indique si deux entiers naturels non nuls a et b sont premiers entre eux ou non.

PARTIE B

À chaque lettre de l'alphabet on associe grâce à la table 2 un nombre entier compris entre 0 et 25.

On définit un procédé de codage de la façon suivante :

Étape 1. on choisit deux entiers naturels p et q compris entre 0 et 25.

Étape 2. à la lettre que l'on veut coder, on associe l'entier x correspondant dans la table 2.

Étape 3. on calcul l'entier x' défini par les relations $x' \equiv px + q \pmod{26}$ et $0 \leqslant x' \leqslant 25$.

Étape 4. à l'entier x', on associe la lettre correspondante dans la table.

1. Dans cette question, on choisit $p = 9$ et $q = 2$.
   a. Démontrer que la lettre V est codée par la lettre J.
   b. Citer le théorème qui permet d'affirmer l'existence de deux entiers relatifs u et v tels que $9u + 26v = 1$. Donner sans justifier un couple (u, v) qui convient.
   c. Démontrer que $x' \equiv 9x + 2 \pmod{26}$ équivaut à $x \equiv 3x' + 20 \pmod{26}$.
   d. Décoder la lettre R.
2. Dans cette question, on choisit $q = 2$ et p est inconnu. On sait que J est codé par D. Déterminer la valeur de p (on admettra que p est unique).

3. Dans cette question, on choisit $p = 13$ et $q = 2$. Coder les lettres B et D. Que peut-on dire de ce codage ?

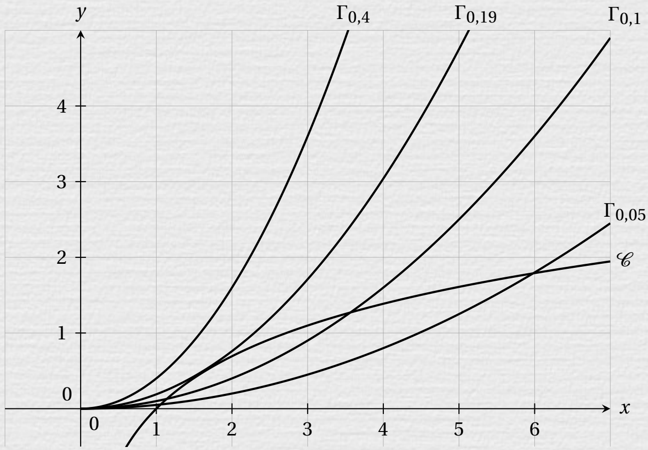


FIGURE 7

Exercice 1

Commun à tous les candidats.

PARTIE A

1. Voir la figure 7.
2. Les courbes de la figure 1 page 140 suggère la conjecture suivante :

   Conjecture. *Il existe un réel* $\alpha > 0$*, « proche » de* 0,19*, tel que le nombre de points d'intersection des courbes* $\mathscr{C}$ *et* Γ_a *(a réel strictement positif) est :*

$$\begin{cases} 2 & si\ a < \alpha \\ 1 & si\ a = \alpha \\ 0 & si\ a > \alpha. \end{cases}$$

PARTIE B

1. Soit un réel fixé $a > 0$. Les abscisses des points d'intersection des courbes $\mathscr{C}$ et Γ_a sont les solutions de l'équation $f(x) = g_a(x)$, c'est-à-dire $\ln x = ax^2$ ou encore $h_a(x) = 0$.

2. a. Calculons la dérivée de la fonction h_a. Pour tout réel $x > 0$, on a

$$h'_a(x) = \frac{1}{x} - 2ax = \frac{1-2ax^2}{x} = \frac{(1-\sqrt{2a}x)(1+\sqrt{2a}x)}{x}.$$

Puisque $x > 0$, le signe de $h'_a(x)$ est le même que celui de l'expression affine $1-\sqrt{2a}x$ où $\sqrt{2a} > 0$:

$$h'_a(x)\begin{cases} >0 & \text{si } 0 < x < 1/\sqrt{2a} \\ =0 & \text{si } x = 1/\sqrt{2a} \\ <0 & \text{si } x > 1/\sqrt{2a}. \end{cases}$$

b. Pour tout $x > 0$, nous pouvons écrire

$$h_a(x) = x^2\left(\frac{1}{x}\times\frac{\ln x}{x} - a\right).$$

On a $\lim_{x\to+\infty}(\ln x)/x = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} 1/x = 0$, donc

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\times\frac{\ln x}{x} - a = -a < 0.$$

Enfin, $\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ nous permet de conclure que

$$\lim_{x\to+\infty} h_a(x) = -\infty.$$

3. a. La fonction $h_{0,1}$ est strictement monotone sur l'intervalle $]0;1/\sqrt{0,2}]$, donc l'équation $h_{0,1}(x) = 0$ admet au plus une solution sur $]0;1\sqrt{0,2}]$.
La fonction $h_{0,1}$ est continue sur l'intervalle $]0;1/\sqrt{0,2}]$, $\lim_{x\to+\infty} h_{0,1}(x) = -\infty < 0$ et $h(1/\sqrt{0,2}) = (-1-\ln(0,2))/2 > 0$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $h_{0,1}(x) = 0$ admet au moins une solution sur l'intervalle $]0;1/\sqrt{0,2}]$.
Nous concluons que l'équation $h_{0,1}(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $]0;1/\sqrt{0,2}]$.

b. D'après les question B.1 et B.3.a, les courbes $\mathscr{C}$ et $\Gamma_{0,1}$ se coupent en exactement deux points.

4. a. D'après le tableau de variations de la fonction h_a, le maximum de $h_{1/(2\mathrm{e})}$ est $(-1-\ln(1/\mathrm{e}))/2 = (-1+\ln \mathrm{e})/2 = 0$.

b. D'après le tableau de variation, pour tout $x \neq 1/\sqrt{\mathrm{e}}$, $h_{1/(2\mathrm{e})}(x) < 0$, donc d'après la question précédente, l'équation $h_{1/2\mathrm{e}}(x) = 0$ a exactement une solution sur $]0\,;+\infty[$. Il s'ensuit que les courbes $\mathscr{C}$ et $\Gamma_{1/(2\mathrm{e})}$ ont un unique point d'intersection.

5. Les courbes $\mathscr{C}$ et Γ_a n'ont aucun point d'intersection si et seulement si l'équation $h_a(x) = 0$ n'a pas de solution, c'est-à-dire, si et seulement si le maximum de h_a est strictement négatif. Nous avons vu que la fonction $x \mapsto (-1-\ln(2x))/2$ s'annule pour $x = 1/(2\mathrm{e})$. De plus, comme la fonction $x \mapsto -\ln(x)$, elle est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$. Par conséquent, le maximum de h_a est strictement négatif si et seulement si $a > 1/(2\mathrm{e})$.

   Les courbes $\mathscr{C}$ et Γ_a ne se coupent pas si et seulement si $a > 1/(2\mathrm{e})$.

Exercice 2

Commun à tous les candidats.

Partie A

1. Pour tout réel $x > 0$, on a

$$\int_0^x \lambda t \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(0) = -\left(x + \frac{1}{\lambda}\right)\mathrm{e}^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}\left(-\lambda x \mathrm{e}^{-\lambda x} - \mathrm{e}^{-\lambda x} + 1\right).$$

2. Comme $\lambda > 0$, on a $\lim_{x\to+\infty} -\lambda x = -\infty$, donc

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x} = \lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{x} = 0$$

   et

$$\lim_{x\to+\infty} -\lambda x \mathrm{e}^{-\lambda x} = \lim_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^{x} = 0.$$

   Par conséquent,

$$\mathrm{E(X)} = \frac{1}{\lambda}.$$

Partie B

1. a. Par définition,

$$\mathbb{P}(\mathrm{X} \leqslant 1) = \int_0^1 \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t,$$

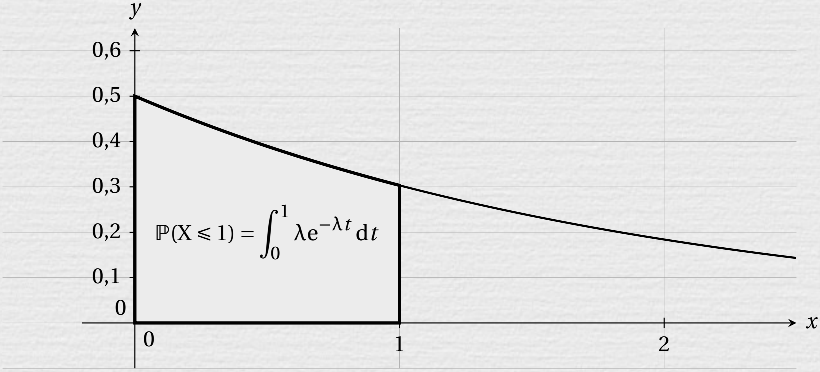


FIGURE 8

donc $\mathbb{P}(X \leqslant 1)$ est égale à l'aire de la région délimitée par l'axe des abscisses, la courbe représentative de la fonction densité, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$.

b. Le paramètre λ est l'ordonnée du point d'intersection de la courbe représentative de la fonction densité et de l'axe des ordonnées ; en effet, $f(0) = \lambda$.

2. a. L'espérance de la variable aléatoire X représente la durée de vie moyenne (en années) d'un composant électronique.

b. Les égalités $E(X) = 1/\lambda$ et $E(X) = 2$ entraînent $\lambda = 1/2$.

c. Calculons $\mathbb{P}(X \leqslant 2)$:

$$\mathbb{P}(X \leqslant 2) = \int_0^2 \frac{1}{2} e^{-t/2}\,dt.$$

Une primitive sur $[0;2]$ de la fonction $t \mapsto \frac{1}{2}e^{-t/2}$ est $t \mapsto -e^{-t/2}$, donc

$$\mathbb{P}(X \leqslant 2) = \left[-e^{-t/2}\right]_0^2 = -e^{-1} + 1 = 1 - \frac{1}{e},$$

soit $\mathbb{P}(X \leqslant 2) \approx 0{,}63$ à 0,01 près. Nous interprétons ce résultat ainsi : la probabilité pour qu'un composant électronique ait une durée de vie inférieure à deux années (ou l'espérance de X) est égale à 0,63.

d. La probabilité que la durée de vie d'un composant dépasse trois années sachant qu'il a déjà fonctionné une année est $\mathbb{P}_{X\geqslant 1}(X \geqslant 3)$. Or, une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle est sans mémoire, c'est-à-dire que $\mathbb{P}_{X\geqslant 1}(X \geqslant 3) = \mathbb{P}(X \geqslant 2)$. Compte tenu de la valeur de $\mathbb{P}(X \leqslant 2)$ trouvée à la question précédente, il vient

$$\mathbb{P}_{X\geqslant 1}(X \geqslant 3) = 1 - \mathbb{P}(X \leqslant 2) = \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

PARTIE C

1. La probabilité que le circuit A soit défaillant avant un an est égale à $\mathbb{P}(D_1 \cap D_2)$. Puisque les événements D_1 et D_2 sont indépendants, nous avons

$$\mathbb{P}(D_1 \cap D_2) = \mathbb{P}(D_1) \times \mathbb{P}(D_2) = 0{,}39^2 = 0{,}1521.$$

2. La probabilité pour que le circuit B soit défaillant avant un an est égale à

$$\mathbb{P}(D_1 \cup D_2) = \mathbb{P}(D_1) + \mathbb{P}(D_2) - \mathbb{P}(D_1 \cap D_2) = 2 \times 0{,}39 - 0{,}1521 = 0{,}6279.$$

Exercice 3

Commun à tous les candidats.

PARTIE A

1. Notons w l'affixe du point R. Le point R appartient au cercle de centre O passant par M, donc

$$|w| = |z|,$$

de plus, R appartient au demi-axe $[O; \vec{u})$ donc

$$\arg z \equiv 0 \quad (\text{mod } 2\pi).$$

Étant donné que $w = |w|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg w}$, nous en déduisons que

$$w = |z|.$$

2. Le point N d'affixe $(z + |z|)/2$ est le milieu des point $M(z)$ et $R(|z|)$, donc le point M' est le milieu du segment [ON]. Voir la construction du point M' sur la figure 9 page suivante.

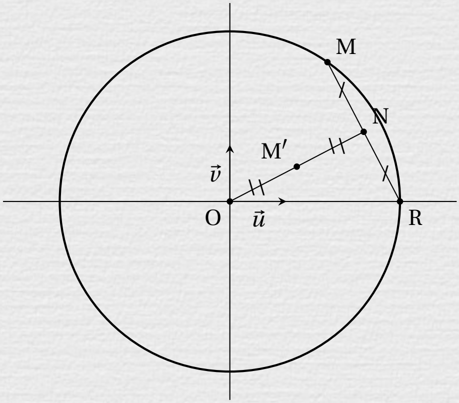


FIGURE 9

PARTIE B

1. Soit $z_0 \in \mathbb{R}_-$. Montrons par récurrence sur l'entier n la propriété

$$\mathscr{P}(n) : « \ z_n = 0 \ »$$

pour tout entier $n \geqslant 1$.

Initialisation. Puisque z_0 est réel négatif, on a $|z_0| = -z_0$. Par conséquent, $z_1 = (z_0 + |z_0|)/4 = 0$, donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

Hérédité. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour un entier $n \geqslant 1$. On a alors $z_n = 0$, ce qui entraîne $|z_n| = 0$. Il s'ensuit que

$$z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{4} = 0.$$

Conclusion. Nous avons $\mathscr{P}(1)$ vraie, et $\mathscr{P}(n)$ implique $\mathscr{P}(n+1)$, donc d'après principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 1$. Par conséquent, $(|z_n|)$ est la suite constante égale à 0 et $\lim_{n\to+\infty} |z_n| = 0$.

2. Soit $z_0 \in \mathbb{R}_+$. Montrons que la suite (z_n) est géométrique de raison $1/2$. Notons $\mathscr{P}(n)$ la propriété « $z_{n+1} = \frac{1}{2} z_n$ et $z_n \geqslant 0$ » pour tout entier $n \geqslant 0$.

Initialisation. Comme $z_0 \geqslant 0$, on a $|z_0| = z_0$, donc $z_1 = \frac{1}{2} z_0$.

Hérédité. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour un entier $n \geqslant 0$. On a donc

$$z_{n+1} = \frac{1}{2} z_n \qquad \text{et} \qquad z_n \geqslant 0$$

Nous en déduisons que $z_{n+1} \geqslant 0$ et

$$z_{n+2} = \frac{z_{n+1} + |z_{n+1}|}{4} = \frac{z_{n+1} + z_{n+1}}{4} = \frac{1}{2} z_{n+1}.$$

Conclusion. Étant donné que $\mathscr{P}(0)$ est vraie et que $\mathscr{P}(n)$ entraîne $\mathscr{P}(n+1)$, d'après le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$.

La suite $(|z_n|)$ vérifie la relation $|z_{n+1}| = \frac{1}{2}|z_n|$, donc c'est une suite géométrique de raison $1/2$ et $\lim_{n\to+\infty} |z_n| = 0$.

3. a. Proposons la conjecture suivante :

   Conjecture. *Pour tout $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, la suite $(|z_n|)$ est convergente de limite nulle.*

   b. Démontrons par récurrence que $|z_n| \leqslant |z_0|/2^n$ pour tout entier $n \geqslant 0$.

   Pour $n = 0$, l'inégalité s'écrit $|z_0| \leqslant |z_0|$. Elle est vraie.

   Soit $p \in \mathbb{N}$. Supposons que

$$\left|z_p\right| \leqslant \frac{1}{2^p}|z_0|.$$

   Nous avons

$$\left|z_{p+1}\right| = \left|\frac{z_p + \left|z_p\right|}{4}\right| = \frac{\left|z_p + \left|z_p\right|\right|}{4}.$$

   Appliquons l'inégalité triangulaire :

$$\left|z_{p+1}\right| \leqslant \frac{\left|z_p\right| + \left|\left|z_p\right|\right|}{4}.$$

   Bien entendu, puisque $\left|z_p\right| \geqslant 0$, on a $\left|\left|z_p\right|\right| = \left|z_p\right|$, donc

$$\left|z_{p+1}\right| \leqslant \frac{1}{2}\left|z_p\right|.$$

   Enfin, utilisons l'hypothèse de récurrence :

$$\left|z_{p+1}\right| \leqslant \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^p}|z_0| = \frac{1}{2^{p+1}}|z_0|.$$

L'inégalité est vraie pour $n = 0$, et si elle est vraie pour $n = p$ alors elle est vraie pour $n = p+1$, donc l'inégalité

$$|z_n| \leqslant \frac{1}{2^n}|z_0|$$

est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$.

En faisant tendre n vers $+\infty$ dans le membre de droite de l'inégalité, nous voyons que

$$\lim_{n \to +\infty} |z_n| = 0.$$

Dans cette partie, nous avons démontré, que pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$, la suite $(|z_n|)$ est convergente de limite nulle.

Exercice 4

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.

Partie A

La table 3 montre les valeurs des variables u et k lors de l'execution des instructions de la section *Traitement* de l'algorithme pour $p = 2$.

Instruction	**Variable k**	**Variable u**
Affecter à u la valeur de 5	Non définie	5
Pour k variant de 1 à p	1	5
Affecter à u la valeur de $0{,}5u + 0{,}5(k-1) - 1{,}5$	1	1
Pour k variant de 1 à p	2	1
Affecter à u la valeur de $0{,}5u + 0{,}5(k-1) - 1{,}5$	2	$-0{,}5$

Table 3

En sortie, le nombre affiché est $-0{,}5$.

Partie B

1. L'algorithme de la figure 10 page ci-contre affiche les termes de la suite (u_n) de rang 1 à p.

Le cas $p = 0$ que l'énoncé n'interdit pas est problématique. l'expression « pour n variant de 1 à p » signifie que n prend les valeurs 1 puis 0, et donc il faut afficher les valeurs de u_1 et u_0.

Variables	k est un entier naturel
	p est un entier strictement positif
	u est un réel
Entrée	Demander la valeur de p
Traitement	Affecter à u la valeur 5
	Pour k variant de 1 à p
	Affecter à u la valeur $0,5u + 0,5(k-1) - 1,5$
	Afficher u
	Fin de pour

FIGURE 10

2. On a $u_1 > u_2 > u3$ et $u_3 < u_4$, donc la suite n'est pas décroissante.
3. Pour tout entier $n \geqslant 3$, notons $\mathscr{P}(n)$ la propriété « $u_{n+1} > u_n$ ». Démontrons par récurrence sur l'entier n que $\mathscr{P}(n)$ pour tout $n \geqslant 3$.

   $\mathscr{P}(3)$ *est vraie*. La propriété $\mathscr{P}(0)$ s'écrit $u_4 > u_3$. D'après le table de valeurs 1 page 145 cette inégalité est vraie.

   $\mathscr{P}(n) \implies \mathscr{P}(n+1)$. Cela revient à démontrer que $u_{n+1} > u_n$ entraîne $u_{n+2} > u_{n+1}$. Supposons donc que

$$u_{n+1} > u_n.$$

   Il vient

$$0,5u_{n+1} > 0,5u_n,$$

   puis

$$0,5u_{n+1} + 0,5(n+1) - 1,5 > 0,5u_n + 0,5(n+1) - 1,5,$$

   soit

$$0,5u_{n+1} + 0,5(n+1) - 1,5 > 0,5u_n + 0,5n - 1,5 + 0,5$$

   c'est-à-dire

$$u_{n+2} > u_{n+1} + 0,5,$$

d'où $u_{n+2} > u_{n+1}$.

Conclusion. Nous avons démontré que $\mathscr{P}(3)$ est vraie et que $\mathscr{P}(n) \implies \mathscr{P}(n+1)$, donc le principe de la récurrence nous permet de conclure que $\mathscr{P}(n)$, c'est-à-dire $u_{n+1} > u_n$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 3$.

En d'autres termes, la suite (u_n) est croissante à partir du terme de rang 3.

4. Pour tout entier naturel n, on a

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= 0{,}1u_{n+1} - 0{,}1(n+1) + 0{,}5 \\ &= 0{,}1(0{,}5u_n + 0{,}5n - 1{,}5) - 0{,}1(n+1) + 0{,}5 \\ &= 0{,}05u_n + 0{,}05n - 0{,}15 - 0{,}1(n+1) + 0{,}5 \\ &= 0{,}05u_n - 0{,}05n + 0{,}25 \\ &= 0{,}5(0{,}1u_n - 0{,}1n + 0{,}5) \\ &= 0{,}5v_n, \end{aligned}$$

donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0{,}5$ et de premier terme $v_0 = 0{,}1u_0 + 0{,}5 = 1$. Le terme général de la suite (v_n) est donc

$$v_n = v_0 q^n = 0{,}5^n.$$

5. Nous en déduisons le terme général de la suite (u_n) :

$$u_n = 10(v_n + 0{,}1n - 0{,}5) = 10 \times 0{,}5^n + n - 5.$$

6. Étant donné que $(10 \times 0{,}5^n)$ est une suite géométrique de raison $q = 0{,}5$ telle que $|q| < 1$, on a $\lim_{n\to+\infty} 10 \times 0{,}5^n = 0$. De plus, $\lim_{n\to+\infty} n - 5 = +\infty$. Nous concluons que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$

Exercice 4

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité.

Partie A

1. La table 4 page ci-contre montre les valeurs de a, b et c lors de l'execution des instructions de la section *Traitement* de l'algorithme.

2.

Instruction	**Variable** a	**Variable** b	**Variable** c
Affecter à c le nombre $r(a,b)$	26	9	8
Affecter à a le nombre b	9	9	8
Affecter à b la valeur de c	9	8	8
Affecter à c le nombre $r(a,b)$	9	8	1
Affecter à a le nombre b	8	8	1
Affecter à b le nombre c	8	1	1
Affecter à c le nombre $r(a,b)$	8	1	0

TABLE 4

PARTIE B

1. a. La lettre V est codé par l'entier $x = 21$. L'entier x' est le reste de la division euclidienne de $px + q = 9 \times 21 + 2 = 191$ par 26, soit $x' = 9$. L'entier 9 code la lettre J. Par conséquent, la lettre V est codée pa la lettre J.

   b. L'existence de deux entiers relatifs u et v tels que $9u+26v = 1$ est assurée par le théorème de Bézout suivant :

   Théorème. *Deux entiers relatifs a et b sont premiers entre eux si et seulement si il existe deux entiers relatifs u et v tels que* $au + bv = 1$.

   On trouve facilement la solution $(u, v) = (3, -1)$.

   c. L'équation $9u + 26v = 1$ entraîne $9u \equiv 1 \pmod{26}$. Donc, d'après la question précédente, 3 est un inverse de 9 modulo 26.
   Supposons maintenant que

$$x' \equiv 9x + 2 \pmod{26}.$$

   Isolons x. Ajoutons -2 à chaque membre de l'égalité, nous obtenons ainsi l'égalité équivalente

$$9x \equiv x' - 2 \pmod{26}.$$

Variables	c est un entier naturel
	a et b sont des entiers naturels non nuls
Entrées	Demander a
	Demander b
Traitement	Affecter à c le nombre $r(a, b)$
	Tant que $c \neq 0$
	Affecter à a le nombre b
	Affecter à b la valeur de c
	Affecter à c le nombre $r(a, b)$
	Fin Tant que
Sortie	Si $b = 1$ alors
	Afficher "a et b sont premiers entre eux"
	Sinon
	Afficher "a et b ne sont pas premiers entre eux"
	Fin Si
	Afficher b

FIGURE 11

Multiplions les deux membres de l'égalité par 3 pour obtenir l'égalité équivalente

$$x \equiv 3x' - 6 \pmod{26}.$$

Et enfin, vu que $-6 \equiv 20 \pmod{26}$, il vient

$$x \equiv 3x' + 20 \pmod{26}.$$

d. D'après la question précédente, nous pouvons utiliser l'égalité $x \equiv 3x' + 20 \pmod{26}$ pour décoder. La lettre R est codée par l'entier $x' = 17$. Donc $x \equiv 3 \times 17 + 20 \equiv 71 \equiv 19 \pmod{26}$. La lettre R code la vingtième lettre de l'alphabet, soit T.

2. Les lettres J et D sont représentées par les entiers 9 de 3 respectivement. Puisque D code la lettre J, l'inconnue p est solution de l'équation

$$3 \equiv 9p + 2 \pmod{26},$$

équivalente à

$$9p \equiv 1 \pmod{26},$$

d'où nous déduisons immédiatement que $p = 3$.

3. La lettre B est représentée par l'entier 1. De $x' \equiv 13 \times 1 + 2 \equiv 15 \pmod{26}$, nous déduisons que la lettre B est codée P.

   La lettre D est représentée par l'entier 3. L'égalité $x' \equiv 13 \times 3 + 2 \equiv 15 \pmod{26}$ montre que la lettre D est codée P.

   Les lettres B et D sont codées P : le codage n'est pas inversible.