# Annales

# *de* mathématiques

# *du* baccalauréat scientifique

## Édition 2018

Sujets & corrigés détaillés

Éric Guirbal

Éric Guirbal
Professeur indépendant de mathématiques
Toulouse
eric.guirbal@lecons-de-maths.fr
www.lecons-de-maths.fr

Ce document est disponible à l'adresse
http://www.lecons-de-maths.fr/ressources/cours-et-exercices#annales_bac_s

Version du 13 août 2018

# *Sommaire*

ÉNONCÉ

**Sujet 1**

# *Amérique du Nord*

29 mai 2018

**Exercice 1** (6 points)
*Commun à tous les candidats*

On étudie certaines caractéristiques d'un supermarché d'une petite ville.

### Partie A. Démonstration préliminaire

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre 0,2. On rappelle que l'espérance de la variable aléatoire X, noté $\mathbb{E}(X)$, est égale à

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \int_0^x 0{,}2te^{-0{,}2t}\,dt\,.$$

Le but de cette partie est de démontrer que $\mathbb{E}(X) = 5$.

1. On note $g$ la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par

$$g(t) = 0{,}2te^{-0{,}2t}.$$

On définit la fonction G sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par

$$G(t) = (-t-5)e^{-0{,}2t}.$$

Vérifier que G est une primitive de $g$ sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

2. En déduire que la valeur exacte de $\mathbb{E}(X)$ est 5.

*Indication : on pourra utiliser, sans le démontrer, le résultat suivant :*

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} xe^{-0{,}2x} = 0.$$

## Partie B. Étude de la durée de présence d'un client dans le supermarché

Une étude commandée par le gérant du supermarché permet de modéliser la durée, exprimée en minutes, passée dans le supermarché par un client choisi au hasard par une variable aléatoire T. Cette variable T suit une loi normale d'espérance 40 minutes et d'écart-type un réel positif noté $\sigma$. Grâce à cette étude, on estime que $\mathbb{P}(T < 10) = 0,067$.

1. Déterminer une valeur arrondie du réel $\sigma$ à la seconde près.
2. Dans cette question, on prend $\sigma = 20$ minutes. Quelle est alors la proportion de clients qui passent plus d'une heure dans le supermarché ?

## Partie C. Durée d'attente pour le paiement

Ce supermarché laisse le choix au client d'utiliser seul des bornes automatiques de paiement ou bien de passer par une caisse gérée par un opérateur.

1. La durée d'attente à une borne automatique, exprimée en minutes, est modélisée par une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $0{,}2\,\text{min}^{-1}$.

   *a)* Donner la durée moyenne d'attente d'un client à une borne automatique de paiement.

   *b)* Calculer la probabilité, arrondie à $10^{-3}$, que la durée d'attente d'un client à une borne automatique de paiement soit supérieure à 10 minutes.

2. L'étude commandée par le gérant conduit à la modélisation suivante :
   - parmi les clients ayant choisi de passer par une borne automatique, 86 % attendent moins de 10 minutes ;
   - parmi les clients passent en caisse, 63 % attendent moins de 10 minutes.

   On choisit un cleint du magasin au hasard et on définit les événements suivants :
   - B : « le client paye à une borne automatique » ;
   - $\overline{B}$ : « le client paye à une caisse avec opérateur » ;

— S : « la durée d'attente du client lors du paiement est inférieure à 10 minutes ».

Une attente supérieure à dix minutes à une caisse avec opérateur ou à une borne automatique engendre chez le client une perception négative du magasin. Le gérant souhaite que plus de 75 % des clients attendent moins de 10 minutes.

Quelle est la proportion minimale de clients qui doivent choisir une borne automatique de paiement pour que cet objectif soit atteint ?

### Partie D. Bons d'achat

Lors du paiement, des cartes à gratter, gagnantes ou perdantes, sont distribuées aux clients. Le nombre de cartes distribuées dépend du montant des achats. Chaque client a droit à une carte à gratter par tranche de 10 € d'achats. Par exemple, si le montant des achats est 58,64 €, alors le client obtient 5 cartes ; si le montant est 124,31 €, le client obtient 12 cartes. Les cartes gagnantes représentent 0,5 % de l'ensemble du stock de cartes. De plus, ce stock est suffisamment grand pour assimiler la distribution d'une carte à un tirage avec remise.

1. Un client effectue des achats pour un montant de 158,02 €. Quelle est la probabilité, arrondie à $10^{-2}$, qu'il obtienne au moins une carte gagnante ?
2. À partir de quel montant d'achats, arrondi à 10 €, la probabilité d'obtenir au moins une carte gagnante est-elle supérieure à 50 % ?

## Exercice 2 (4 points)

*Commun à tous les candidats*

Lors d'une expérience en laboratoire, on lance un projectile dans un milieu fluide. L'objectif est de déterminer pour quel angle de tir $\theta$ par rapport à l'horizontale la hauteur du projectile ne dépasse pas 1,6 mètre.

Comme le projectile ne se déplace pas dans l'air mais dans un fluide, le modèle parabolique usuel n'est pas adopté. On modélise ici le projectile par un point qui se déplace dans un plan vertical, sur la courbe représentative de la fonction $f$ définie sur l'intervalle $[0\,;1[$ par

$$f(x) = bx + 2\ln(1 - x)$$

où $b$ est un paramètre réel supérieur ou égal à 2, $x$ est l'abscisse du projectile, $f(x)$ son ordonnée, toutes les deux exprimées en mètres.

1. La fonction $f$ est dérivable sur l'intervalle $[0\,;1[$. On note $f'$ sa fonction dérivée. On admet que la fonction $f$ possède un maximum l'intervalle $[0\,;1[$ et que, pour tout réel $x$ de l'intervalle $[0\,;1[$,

$$f'(x) = \frac{-bx + b - 2}{1 - x}.$$

   Montrer que le maximum de la fonction $f$ est égal à $b - 2 + 2\ln\left(\frac{2}{b}\right)$.
2. Déterminer pour quelles valeurs du paramètre $b$ la hauteur maximale du projectile ne dépasse pas 1,6 mètres.
3. Dans cette question, on choisit $b = 5{,}69$. L'angle de tir $\theta$ correspond à l'angle entre l'axe des abscisses et la tangente à la courbe de la fonction $f$ au point d'abscisse 0 comme indiqué sur la figure 1 page ci-contre. Déterminer une valeur approchée au dixième de degré près de l'angle $\theta$.

**Exercice 3** (5 points)
*Commun à tous les candidats*

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé dont l'origine est le point A. On considère les points $B(10\,;-8\,;2)$, $C(-1\,;-8\,;5)$ et $D(14\,;4\,;8)$.

1. *a)* Déterminer un système d'équations paramétriques de chacune des droites (AB) et (CD).

   *b)* Vérifier que les droites (AB) et (CD) ne sont pas coplanaires.
2. On considère le point I de la droite (AB) d'abscisse 5 et le point J de la droite (CD) d'abscisse 4.

   *a)* Déterminer les coordonnées des points I et J et en déduire la distance IJ.

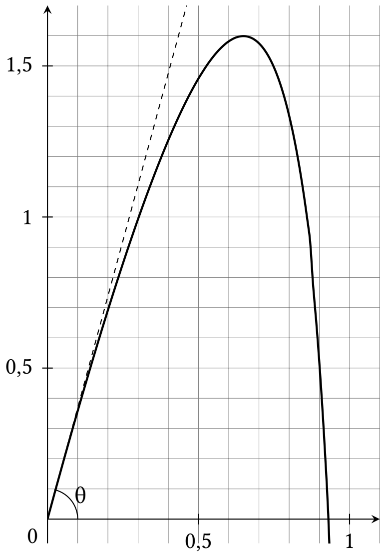



FIGURE 1

*b)* Démontrer que la droite (IJ) est perpendiculaire aux droites (AB) et (CD). La droite (IJ) est appelée perpendiculaire commune aux droites (AB) et (CD).

3. Cette question a pour but de vérifier que la distance IJ est la distance minimale entre les droites (AB) et (CD). Sur la figure 2 page suivante on a représenté les droites (AB) et (C), les points I et J, et la droite $\Delta$ parallèle à la droite (CD) passant par I. On considère un point M de la droite (AB) distinct du point I. On considère un point M′ de la droite (CD) distinct du point J.

   *a)* Justifier que la parallèle à la droite (IJ) passant par le point M′ coupe la droite $\Delta$ en un point que l'on notera P.

   *b)* Démontrer que le triangle MPM′ est rectangle en P.

   *c)* Justifier que $MM' > IJ$ et conclure.

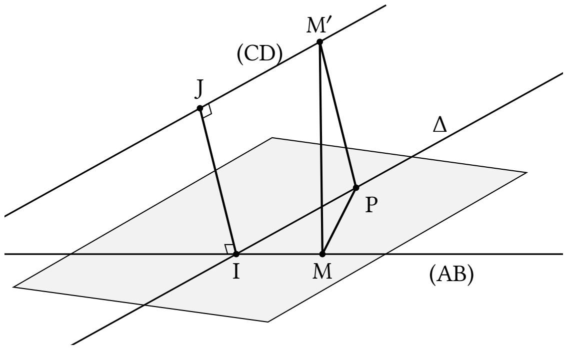



FIGURE 2

**Exercice 4** (5 points)
*Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité*

Un scooter radiocommandé se déplace en ligne droite à la vitesse constante de $1\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$. Il est poursuivi par un chien qui se déplace à la même vitesse. On représente la situation vue de dessus dans un repère orthonormé du plan d'unité 1 mètre. L'origine de ce repère est la position initiale du chien. Le scooter est représenté par un point appartenant à la droite d'équation $x = 5$. Il se déplace sur cette droite dans le sens des ordonnées croissantes.

Dans la suite de l'exercice, on étudie deux modélisations différentes de la trajectoire du chien.

## PARTIE A. MODÉLISATION À L'AIDE D'UNE SUITE

La situation est représentée par le graphique de la figure 3 page ci-contre. À l'instant initial, le scooter est représenté par le point $S_0$. Le chien qui le poursuit est représenté par le point $M_0$. On considère qu'à chaque seconde, le chien s'oriente instantanément en direction du scooter et se déplace en ligne droite sur une distance de 1 mètre.

Ainsi, à l'instant initial, le chien s'oriente en direction du point $S_0$, et une seconde plus tard il se trouve un mètre plus loin au point $M_1$. À cet instant, le scooter est au point $S_1$. Le chien s'oriente en direction de $S_1$ et se déplace en ligne droite en parcourant 1 mètre, et ainsi de suite.

On modélise alors les trajectoires du chien et du scooter par deux suites de points notées $(M_n)$ et $(S_n)$. Au bout de $n$ secondes, les coordonnées du point $S_n$ sont $(5\,;n)$. On note $(x_n\,;y_n)$ les coordonnées du point $M_n$.

1. Construire sur la figure 3 les points $M_2$ et $M_3$.

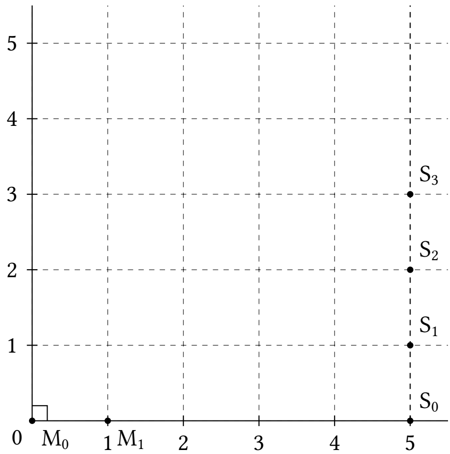



FIGURE 3

2. On note $d_n$ la distance entre le chien et le scooter $n$ secondes après le début de la poursuite. On a donc $d_n = M_nS_n$. Calculer $d_0$ et $d_1$.
3. Justifier que le point $M_2$ a pour coordonnées $\left(1 + \frac{4}{\sqrt{17}}\,;\frac{1}{\sqrt{17}}\right)$.
4. On admet que, pour tout entier naturel $n$,

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \dfrac{5 - x_n}{d_n} \\ y_{n+1} = y_n + \dfrac{n - y_n}{d_n}. \end{cases}$$

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | $n$ | $M_n$ | | $S_n$ | | $d_n$ |
| **2** | | $x_n$ | $y_n$ | 5 | $n$ | |
| **3** | 0 | 0 | 0 | 5 | 0 | 5 |
| **4** | 1 | 1 | 0 | 5 | 1 | 4,12310563 |
| **5** | 2 | 1,9701425 | 0,24253563 | 5 | 2 | 3,50267291 |
| **6** | 2 | 2,83515547 | 0,74428512 | 5 | 3 | 3,12646789 |
| **7** | 3 | 3,52758047 | 1,46577498 | 5 | 4 | 2,93092404 |
| **...** | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| **28** | 24 | 4,99979751 | 21,2268342 | 5 | 24 | 2,7731658 |
| **29** | 25 | 4,99987053 | 22,2268342 | 5 | 25 | 2,7731658 |

TABLE 1

*a)* La table 1, obtenue à l'aide d'un tableur, donne les coordonnées des points $M_n$ et $S_n$ ainsi que la distance $d_n$ en fonction de $n$. Quelles formules doit-on écrire dans les cellules C5 et F5 et recopier vers le bas pour remplir les colonnes C et F ?

*b)* On admet que la suite $(d_n)$ est strictement décroissante. Justifier que cette suite est convergente et conjecturer sa limite à l'aide du tableau.

## PARTIE B. MODÉLISATION À L'AIDE D'UNE FONCTION

On modélise maintenant la trajectoire du chien à l'aide de la courbe $\mathscr{F}$ de la fonction $f$ définie pour tout réel $x$ de l'intervalle $[0\,;5[$ par

$$f(x) = -2{,}5\ln(1 - 0{,}2x) - 0{,}5x + 0{,}05x^2.$$

Cela signifie que le chien se déplace sur la courbe $\mathscr{F}$ de la fonction $f$.

1. Lorsque le chien se trouve au point M de coordonnées $(x\,;f(x))$ de la courbe $\mathscr{F}$, où $x$ appartient à l'intervalle $[0\,;5[$, le scooter se trouve au point S, d'ordonnée notée $y_S$. Ainsi le point S a pour coordonnées $(5\,;y_S)$. La tangente à la courbe $\mathscr{F}$ au point M passe par le point S. Cela traduit le fait que le chien s'oriente toujours en direction du scooter. On note $d(x)$ la distance MS entre le chien et le scooter lorsque M a pour abscisse $x$.

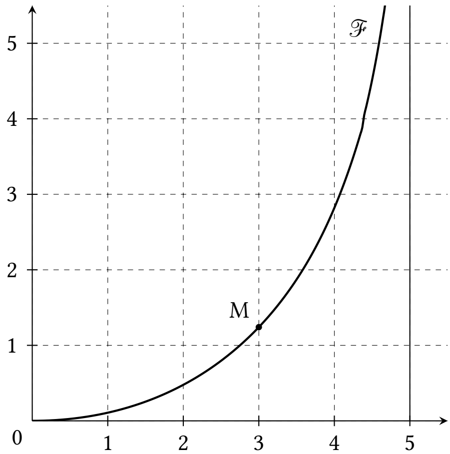



FIGURE 4

*a)* Sur le graphique de la figure 4, construire, sans calcul, le point S donnant la position du scooter lorsque le chien se trouve au point d'abscisse 3 de la courbe $\mathscr{F}$ et lire les coordonnées du point S.

*b)* On note $f'$ la fonction dérivée de la fonction $f$ sur l'intervalle $[0\,;5[$ et on admet que, pour tout $x$ de l'intervalle $[0\,;5[$,

$$f'(x) = \frac{x(1 - 0{,}1x)}{5 - x}.$$

Déterminer par le calcul une valeur approchée au centième de l'ordonnée du point S lorsque le chien se trouve au point d'abscisse 3 de la courbe $\mathscr{F}$.

2. On admet que $d(x) = 0{,}1x^2 - x + 5$ pour tout réel $x$ de l'intervalle $[0\,;5[$. Justifier qu'au cours du temps la distance MS se rapproche d'une valeur limite que l'on déterminera.

**Exercice 4** (5 points)
*Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité*

Dans une région, on s'intéresse à la cohabitation de deux espèces animales : les campagnols et les renards, les renards étant les prédateurs des campagnols. Au 1er juillet 2012, on estime qu'il y a dans cette région approximativement deux millions de campagnols et cent-vingt renards. On note $u_n$ le nombre de campagnols et $v_n$ le nombre de renards au 1er juillet de l'année $2012 + n$.

## Partie A. Un modèle simple

On modélise l'évolution des populations par les relations suivantes :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 1{,}1u_n - 2000v_n \\ v_{n+1} = 2\times 10^{-5}u_n + 0{,}6v_n \end{cases}$$

pour tout entier $n \geqslant 0$ avec $u_0 = 2\,000\,000$ et $v_0 = 120$.

1. *a)* On considère la matrice colonne $\mathrm{U}_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ pour tout entier $n \geqslant 0$. Déterminer la matrice A telle que $\mathrm{U}_{n+1} = \mathrm{A} \times \mathrm{U}_n$ pour tout entier $n$ et donner la matrice $\mathrm{U}_0$.

   *b)* Calculer le nombre de campagnols et de renards estimés grâce à ce modèle au 1er juillet 2018.

2. Soit les matrices

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 20\,000 & 5000 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}7 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{P}^{-1} = \frac{1}{15\,000} \times \begin{pmatrix} 1 & -5000 \\ -1 & 20\,000 \end{pmatrix}.$$

   On admet que $\mathrm{P}^{-1}$ est la matrice inverse de P et que $\mathrm{A} = \mathrm{P} \times \mathrm{D} \times \mathrm{P}^{-1}$.

   *a)* Montrer que pour tout entier naturel $n$, $\mathrm{U}_n = \mathrm{P} \times \mathrm{D}^n \times \mathrm{P}^{-1} \times \mathrm{U}_0$.

   *b)* Donner sans justification l'expression de la matrice $\mathrm{D}^n$ en fonction de $n$.

*c)* On admet que, pour tout entier naturel $n$,

$$\begin{cases} u_n = \dfrac{2{,}8 \times 10^7 + 2 \times 10^6 \times 0{,}7^n}{15} \\ v_n = \dfrac{1400 + 400 \times 0{,}7^n}{15}. \end{cases}$$

Décrire l'évolution des deux populations.

### Partie B. Un modèle plus conforme à la réalité

Dans la réalité, on observe que si le nombre de renards a suffisamment baissé, alors le nombre de campagnols augmente à nouveau, ce qui n'est pas le cas avec le modèle précédent. On construit donc un autre modèle, plus précis, qui tient compte de ce type d'observations à l'aide des relations suivantes :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 1{,}1u_n - 0{,}001u_n \times v_n \\ v_{n+1} = 2 \times 10^7 u_n \times v_n + 0{,}6v_n \end{cases}$$

pour tout entier $n \geqslant 0$ avec $u_0 = 2\,000\,000$ et $v_0 = 120$.

La table 2 page suivante présente ce nouveau modèle sur les 25 premières années en donnant les effectifs des populations arrondis à l'unité :

1. Quelles formules faut-il écrire dans les cellules B4 et C4 et recopier vers le bas pour remplir les colonnes B et C ?
2. Avec le deuxième modèle, à partir de quelle année observe-t-on le phénomène décrit (baisse des renards et hausse des campagnols) ?

### Partie C

Dans cette partie on utilise le modèle de la partie B. Est-il possible de donner à $u_0$ et $v_0$ des valeurs afin que les deux populations restent stables d'une année sur l'autre, c'est-à-dire telles que pour tout entier naturel $n$ on ait $u_{n+1} = u_n$ et $v_{n+1} = v_n$ ? (On parle alors d'état stable.)

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| 1 | Modèle de la **partie B** | | |
| 2 | $n$ | $u_n$ | $v_n$ |
| 3 | 0 | 2 000 000 | 120 |
| 4 | 1 | 1 960 000 | 120 |
| 5 | 2 | 1 920 800 | 119 |
| 6 | 3 | 1 884 228 | 117 |
| 7 | 4 | 1 851 905 | 114 |
| 8 | 5 | 1 825 160 | 111 |
| 9 | 6 | 1 804 988 | 107 |
| 10 | 7 | 1 792 049 | 103 |
| 11 | 8 | 1 786 692 | 99 |
| 12 | 9 | 1 789 005 | 94 |
| 13 | 10 | 1 798 854 | 91 |
| 14 | 11 | 1 815 930 | 87 |
| 15 | 12 | 1 839 780 | 84 |
| 16 | 13 | 1 869 827 | 81 |
| 17 | 14 | 1 905 378 | 79 |
| 18 | 15 | 1 945 622 | 77 |
| 19 | 16 | 1 989 620 | 77 |
| 20 | 17 | 2 036 288 | 76 |
| 21 | 18 | 2 084 374 | 77 |
| 22 | 19 | 2 132 440 | 78 |
| 23 | 20 | 2 178 846 | 80 |
| 24 | 21 | 2 221 746 | 83 |
| 25 | 22 | 2 259 109 | 87 |
| 26 | 23 | 2 288 766 | 91 |
| 27 | 24 | 2 308 508 | 97 |

TABLE 2

## Exercice 1

*Commun à tous les candidats*

### Partie A. Démonstration préliminaire

1. La fonction G est dérivable et pour tout réel $t \geqslant 0$, on a

$$G'(t) = -e^{-0,2t} + (-t-5) \times (-0,2)e^{-0,2t} = 0,2te^{-0,2t} = g(t).$$

   Ainsi la fonction G est bien une primitive de la fonction $g$.

2. D'après la question précédente, l'intégrale de la fonction $g$ sur l'intervalle $[0\,;x]$ où $x \geqslant 0$ est égale à

$$\begin{aligned}\int_0^x 0,2te^{-0,2t}\,dt &= G(x) - G(0)\\ &= (-x-5)e^{-0,2x} + 5\\ &= -xe^{-0,2x} - 5e^{-0,2x} + 5.\end{aligned}$$

   Or

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty} -5e^{-0,2x} = 0 \quad \text{car} \quad \begin{cases}\displaystyle\lim_{x\longrightarrow+\infty} -0,2x = -\infty\\ \displaystyle\lim_{x\longrightarrow-\infty} e^x = 0\end{cases},$$

   et

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty} -xe^{-0,2x} = 0,$$

   donc

$$\mathbb{E}(X) = \lim_{x\longrightarrow+\infty} \int_0^x 0,2te^{-0,2t}\,dt = 5.$$

### Partie B. Étude de la durée de présence d'un client dans le supermarché

1. Soit $Z = (T-40)/\sigma$ la variable normale centrée réduite. Les inégalités $T < 10$ et $Z < -30/\sigma$ sont équivalentes, donc $\mathbb{P}(T < 10) = 0,067$ si et seulement si $\mathbb{P}(Z < -30/\sigma) = 0,067$. Avec la calculatrice, nous obtenons $-30/\sigma = -1,498\ldots$, d'où $\sigma \approx 20,02$. Donc l'écart-type de la variable aléatoire Z est, à la seconde près, égal à 1201 s.

2. À l'aide de la calculatrice, on obtient $\mathbb{P}(T > 60) \approx 0{,}1587$. On conclut que 15,87 % des clients passent plus d'heure dans le supermarché.

### Partie C. Durée d'attente pour le paiement

1. *a)* La variable aléatoire qui modélise le temps d'attente à une borne automatique est la variable aléatoire X définie dans la partie A. D'après la question A.1, la durée d'attente moyenne à une borne automatique est égale à 5 min.

   *b)* La probabilité que la durée d'attente d'un client à une borne automatique de paiement soit supérieure à 10 min est égale à

$$\mathbb{P}(X > 10) = 1 - e^{-10\times 0{,}2} = e^{-2} \approx 0{,}135.$$

2. D'après la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(S) = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}_B(S) + \mathbb{P}(\overline{B}) \times \mathbb{P}_{\overline{B}}(S).$$

Or $\mathbb{P}_B(S) = 0{,}86$, $\mathbb{P}_{\overline{B}}(S) = 0{,}63$ et $\mathbb{P}(\overline{B}) = 1 - \mathbb{P}(B)$, donc

$$\mathbb{P}(S) = 0{,}23\mathbb{P}(B) + 0{,}63.$$

Ainsi pour avoir $\mathbb{P}(S) \geqslant 0{,}75$, il faut et il suffit que

$$\mathbb{P}(B) \geqslant \frac{0{,}75 - 0{,}63}{0{,}23} = \frac{12}{23} \approx 0{,}52.$$

On conclut qu'il faut (et il suffit) qu'au moins 52 % des clients utlisent la borne automatique pour que plus de 75 % d'entre eux attendent moins de 10 min.

### Partie D. Bons d'achat

1. Le client reçoit 15 cartes à gratter. La distribution étant assimilée à un tirage avec remise, la probabilité qu'une carte soit gagnante est égale à $0{,}5/100 = 0{,}005$. Il s'ensuit que la probabilité que les 15 cartes soient perdantes est égale à $(1 - 0{,}005)^{15} = 0{,}995^{15}$, donc la probabilité que le client ait au moins une carte gagnante est égale à $1 - 0{,}995^{15} \approx 0{,}07$.

2. Soit $n$ le nombre de cartes reçues par le client. Le raisonnement de la question précédente s'applique : la probabilité que le client ait au moins une carte gagnante est égale à $1 - 0{,}995^n$. Cette probabilité est supérieure à 0,5 si et seulement si
$$0{,}995^n < 0{,}5.$$
Comme la fonction logarithme est strictement croissante, cette inégalité équivaut à
$$\ln 0{,}995^n < \ln 0{,}5,$$
soit
$$n \ln 0{,}995 < \ln 0{,}5.$$
La fonction logarithme est strictement négative sur l'intervalle $]0\,;1[$, d'où
$$n > \frac{\ln 0{,}5}{\ln 0{,}995} \approx 138{,}3,$$
c'est-à-dire $n \geqslant 139$ puisque $n$ est un entier. Nous concluons que la probabilité d'obtenir au moins une carte gagnante est supérieure à 50 % à partir de 1390 € d'achats.

## Exercice 2

*Commun à tous les candidats*

1. Sur $[0\,;1[$, on a $1 - x > 0$, donc la signe de $f'(x)$ est celui de son dénominateur. L'expression algébrique $-bx + b - 2$ s'annule en $x = 1 - 2/b$. On vérifie que $1 - 2/b \in [0\,;1[$ car $b \geqslant 2$. De plus $-b < 0$, donc $f'(x) > 0$ si $x \in [0\,;1 - 2/b[$ et $f'(x) < 0$ si $x \in ]1 - 2/b\,;1[$. Le sens de variation de la fonction $f$ s'en déduit :
   - $f$ est strictement croissante sur $[0\,;1 - 2/b]$ ;
   - $f$ est strictement décroissante sur $[1 - 2/b\,;1[$.

   Par conséquent, la fonction $f$ admet un maximum en $1 - 2/b$ égal à
$$f\left(1 - \frac{2}{b}\right) = b - 2 + 2\ln\frac{2}{b}.$$

2. Il nous faut résoudre l'inéquation

$$b - 2 + 2\ln\frac{2}{b} \leqslant 1{,}6.$$

Pour cela, considérons la fonction $h$ définie sur $[2\,;+\infty[$ par

$$h(x) = x - 2 + 2\ln\frac{2}{x}.$$

Elle est dérivable, et pour tout réel $x \geqslant 2$, on a

$$h'(x) = 1 + 2 \times \frac{-\frac{2}{x^2}}{\frac{2}{x}} = 1 - \frac{2}{x}.$$

Si $x > 2$, alors $2/x < 1$, donc $h'(x) > 0$ : la fonction $h$ est strictement croissante. On vérifie que $h(2) = 0$ et que

$$h(2\mathrm{e}^2) = 2\mathrm{e}^2 - 2 + 2\ln\frac{1}{\mathrm{e}^2} = 2\mathrm{e}^2 - 2 - 4 = 2\mathrm{e}^2 - 6 > 2 \times 2^2 - 6 = 2.$$

La fonction $h$ est continue et strictement monotone sur l'intervalle $[2\,;2\mathrm{e}^2]$, $h(2) < 1{,}6$ et $h(\mathrm{e}^2) > 1{,}6$, le théorème de bijection permet alors de conclure que l'équation $h(x) = 1{,}6$ possède une unique solution $b_{1,6}$ sur l'intervalle $[2\,;+\infty[$. La calculatrice donne $b_0 \approx 5{,}69$ comme valeur approchée par défaut de cette solution. Par conséquent, la fonction $f$ étant croissante, il faut choisir $b \in [2\,;b_{1,6}]$ pour que la hauteur maximale du projectile ne dépasse par 1,6 m.

3. Le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de la fonction $f$ au point d'abscisse 0 est $f'(0) = 5{,}69 - 2 = 3{,}69$. Nous en déduisons que $\vec{u}(1\,;3{,}69)$ est un vecteur directeur de la tangente. L'angle $\theta$ s'obtient alors par la formule

$$\cos\theta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{\imath}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{\imath}\|}.$$

Le repère étant orthonormé,

$$\cos\theta = \frac{1 \times 1 + 3{,}69 \times 0}{\sqrt{1^2 + 3{,}69^2}} = \frac{1}{\sqrt{14{,}6161}}.$$

La calculatrice donne $\theta \approx 74{,}8°$.

## Exercice 3

*Commun à tous les candidats*

1. *a)* Une équation paramétrique de la droite (AB), passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}(10\,;-8\,;2)$, est

$$\begin{cases} x = 10t \\ y = -8t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 2t. \end{cases}$$

Une équation paramétrique de la droite (CD), passant par C et de vecteur directeur $\overrightarrow{CD}(15\,;12\,;3)$, est

$$\begin{cases} x = -1 + 15t \\ y = -8 + 12t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 5 + 3t. \end{cases}$$

*b)* Supposons que les droites (AB) et (CD) sont coplanaires. Comme les $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires, les droites (AB) et (CD) sont sécantes. Déterminons leur point d'intersection. Pour cela, résolvons le système

$$\begin{cases} 10s - 15t = -1 \\ -8s - 12t = -8 \\ 2s - \phantom{1}3t = 5. \end{cases}$$

L'équation $2s - 3t = 5$ est équivalente à l'équation $10s - 15t = 25$. On doit donc avoir à la fois $10s - 15t = 25$ et $10s - 15t = -1$, ce qui implique que $25 = -1$. De cette contradiction, nous déduisons que les droites (AB) et (CD) ne sont pas coplanaires.

2. *a)* Le point I est le point de la droite (AB) d'abscisse 5, donc son paramètre est le réel $t$ tel que $10t = 5$. On trouve $t = 1/2$. Les coordonnées du point I sont $(5\,;-8 \times 1/2\,;2 \times 1/2)$, soit $(5\,;-4\,;1)$.

De même, le paramètre $t$ du point J vérifie $-1 + 15t = 4$, d'où $t = 1/3$. On en déduit que les coordonnées du point J sont $(4\,;-8 + 12 \times 1/3\,;5 + 3 \times 1/3)$, soit $(4\,;-4\,;6)$.

*b)* Le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ a pour coordonnées $(-1\,;0\,;5)$. Le repère étant orthonormé, les produits scalaires $\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{CD}$ sont

$$\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{AB} = -1\times 10 + 0\times(-8) + 5\times 2 = 0$$

et

$$\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{CD} = -1\times 15 + 0\times 12 + 5\times 3 = 0.$$

De plus, la droite (IJ) coupe les droites (AB) et (CD). Nous en déduisons que la droite (IJ) est perpendiculaire aux droites (AB) et (CD).

3. *a)* La droite $\Delta$ passe par le point I et est parallèle à la droite (JM′), elle appartient donc au plan (IJM′). Soit $\Delta'$ la droite passant par M′ et parallèle à la droite (IJ). La droite $\Delta'$ appartient également au plan (IJM′). Dans le plan (IJM′), les droites (IJ) et $\Delta'$ sont parallèles et les droites (IJ) et $\Delta$ sont sécantes, donc les droites $\Delta'$ et $\Delta$ sont sécantes.

   *b)* La droite (IJ) est perpendiculaire à la droite (CD) et les droites (CD) et (IP) sont parallèles, donc la droite (IJ) est perpendiculaire à la droite (IP). La droite (IJ) est perpendiculaire aux deux droites distinctes (IM) et (IP) du plan (IMP), donc la droite (IJ) est orthogonale au plan (IMP). Puisque les droites (M′P) et (IJ) sont parallèles, la droite (M′P) est également orthogonale au plan (IMP), donc la droite (M′P) est perpendiculaire à la droite (MP). On conclut que le triangle MPM′ est rectangle en P.

   *c)* Le résultat de la question précédene entraîne $MM' > PM'$. De plus, le quadrilatère IJM′P dont les côtés oppposés sont parallèles deux à deux est un parallélogramme, donc $PM' = IJ$. Il s'ensuit que $MM' > IJ$, prouvant ainsi que IJ est la distance minimale entre les droites (AB) et (CD).

## Exercice 4

*Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité*

### Partie A. Modélisation à l'aide d'une suite

1. Voir la figure 5 page suivante.

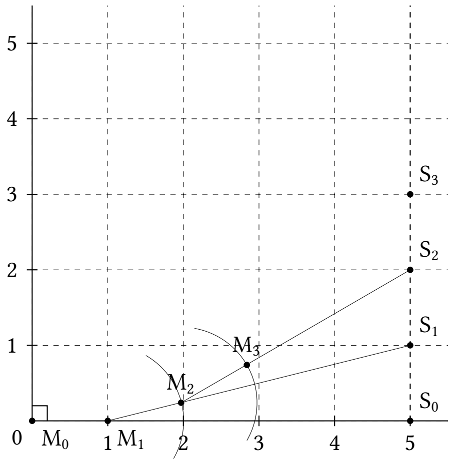



FIGURE 5

2. Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{M_0S_0}$ et $\overrightarrow{M_1S_1}$ sont $(5\,;0)$ et $(4\,;1)$, donc

$$d_0 = 5 \quad \text{et} \quad d_1 = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}.$$

3. Le point $M_2$ appartenant au segment $[M_1S_1]$, il existe un réel $t \geqslant 0$ tel que

$$\overrightarrow{M_1M_2} = t\overrightarrow{M_1S_1},$$

Il s'ensuit que

$$M_1M_2 = |t|M_1M_2 = t\sqrt{(5-1)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{17}t,$$

par conséquent $M_1M_2 = 1$ si et seulement si $t = 1/\sqrt{17}$. La relation vectorielle ci-dessus donne les coordonnées du point $M_2$ :

$$\begin{cases} x_{M_2} - 1 = \dfrac{4}{\sqrt{17}} \\ y_{M_2} = \dfrac{1}{\sqrt{17}}. \end{cases}$$

Le point $M_2$ a pour coordonnées $(1 + 4/\sqrt{17}\,; 1/\sqrt{17})$.

La droite $(M_1S_1)$ passe par le point $M_1$ et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{M_1S_1}(4\,;1)$, elle admet donc l'équation paramétrique

$$\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = t. \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

Soit M le point de paramètre $t$ de la droite $(M_1S_1)$. On a

$$M_1M^2 = \big((1+4t)-1\big)^2 + (t-0)^2 = 17t^2.$$

Par conséquent, $M_1M = 1$ si et seulement si $t \in \{-1/\sqrt{17}, 1/\sqrt{17}\}$. Comme le point $M_2$ appartient au segment $[M_1S_1]$, son paramètre est positif, donc égal à $1/\sqrt{17}$. Nous en déduisons les coordonnées du point $M_2$ :

$$\left(1 + \frac{4}{\sqrt{17}}\,;\frac{1}{\sqrt{17}}\right).$$

*Solution alternative.* Le point $M_2$ est le point d'intersection du cercle de centre $M_1$ et de rayon 1 avec le segment $[M_1S_1]$. Une équation du cercle est

$$(x-1)^2 + y^2 = 1.$$

La droite $(M_1S_1)$ a pour coefficient directeur $\frac{1}{4}$. Son ordonnée à l'origine est $y_{M_1} - a = -\frac{1}{4}$. Donc une équation de la droite est $y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$, ou encore,

$$4y - x + 1 = 0.$$

De l'équation de la droite, nous tirons $x - 1 = 4y$. Substituons $4y$ à $x - 1$ dans l'équation du cercle. Nous obtenons ainsi, après réduction, l'équation

$$17y^2 = 1$$

dont les solutions sont $-1/\sqrt{17}$ et $1/\sqrt{17}$. Puisque $M_2$ appartient au segment $[M_1S_1]$, l'ordonnée de $M_2$ est la solution positive. En substituant $1/\sqrt{17}$ à $y$ dans l'équation de la droite, nous obtenons l'abscisse du point $M_2$ : $1 + 4/\sqrt{17}$. Finalement, le point $M_2$ a pour coordonnées

$$\left(\frac{4}{1+\sqrt{17}}\,;\frac{1}{\sqrt{17}}\right).$$

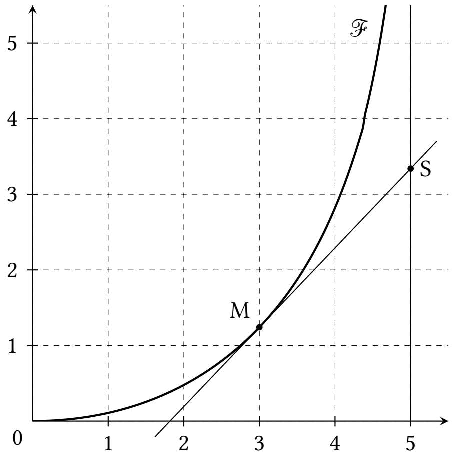



FIGURE 6

4. *a)* Dans la cellule C5, il faut saisir la formule `=$C4+($E4-$C4)/$F4` et dans la cellule F5, il faut saisir la formule `=SQRT(($B5-$D5)^2+($C5-$E5)^2)`.

   *b)* Par définition, $d_n \geqslant 0$. La suite $(d_n)$ est décroissante et minorée, donc elle converge. Le tableau suggère la conjecture suivante :

   **Conjecture.** *La limite de la suite* $(d_n)$ *est* 2,773165 … .

## Partie B. Modélisation à l'aide d'une fonction

1. *a)* Voir la figure 6.

   *b)* Le coefficient directeur de la tangente au point M à la courbe $\mathscr{F}$ est $f'(3)$, d'où

$$y_S - f(3) = f'(3)(5-3).$$

   Or

$$f'(3) = \frac{3(1-0{,}1\times 3)}{5-3} = 1{,}05,$$

et

$$f(3) = -2{,}5\log(1-0{,}2\times 3) - 0{,}5\times 3 + 0{,}05\times 3^2 = 2{,}5\log 2{,}5 - 1{,}05,$$

donc l'ordonnée du point S est

$$y_S = 1{,}05 + 2{,}5\log 2{,}5 \approx 3{,}34.$$

2. Le chien se déplace en direction du scooter, donc il se déplace sur la courbe $\mathscr{F}$ dans le sens des abscisses croissantes. Ainsi lorsque le temps $t$ tend vers $+\infty$, l'abscisse $x(t)$ du chien tend vers 5, donc

$$\lim_{t\to+\infty} d(x(t)) = \lim_{x\to 5} d(x) = 0{,}1\times 5^2 - 5 + 5 = 2{,}5.$$

Ainsi la valeur limite de MS est égale à 2,5 m lorsque $t$ tend vers $+\infty$.

## Exercice 4

*Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité*

### Partie A. Un modèle simple

1. *a)* La matrice A telle que $U_{n+1} = AU_n$ se lit dans les définitions des suites $(u_n)$ et $(v_n)$,

$$A = \begin{pmatrix} 1{,}1 & -2000 \\ 2\times 10^{-5} & 0{,}6 \end{pmatrix},$$

et sans plus de difficulté,

$$U_0 = \begin{pmatrix} 2\,000\,000 \\ 120 \end{pmatrix}.$$

*b)* À l'aide de la calculatrice, on trouve

$$U_6 = A^6 U_0 = \begin{pmatrix} 1\,882\,353{,}2 \\ 96{,}470\,64 \end{pmatrix}.$$

Au 1er juillet 2018, on estime le nombre de campagnols à 1 882 353 et le nombre de renards à 96.

2. *a)* Démontrons par récurrence sur l'entier $n$ la propriété

$$\mathscr{P}(n) : \mathrm{U}_n = \mathrm{PD}^n\mathrm{P}^{-1}\mathrm{U}_0.$$

*Initialisation.* On a $\mathrm{PD}^0\mathrm{P}^{-1}\mathrm{U}_0 = \mathrm{PP}^{-1}\mathrm{U}_0 = \mathrm{U}_0$, donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

*Hérédité.* Supposons $\mathscr{P}(k)$ vraie pour un entier naturel $k$. On a alors

$$\mathrm{U}_{k+1} = \mathrm{AU}_k = \mathrm{PDP}^{-1}\mathrm{PD}^k\mathrm{P}^{-1}\mathrm{U}_0 = \mathrm{PD}^{k+1}\mathrm{P}^{-1}\mathrm{U}_0,$$

donc $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.

*Conclusion.* La propriété est vraie au rang 0 et est héréditaire, donc d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel $n$.

*b)* Pour tout entier naturel $n$, on a

$$\mathrm{D}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}7^n \end{pmatrix}.$$

*c)* On a donc

$$\begin{cases} u_n = \dfrac{2{,}8\times 10^7}{15} + \dfrac{2\times 10^6}{15}\times 0{,}7^n \\ v_n = \dfrac{1400}{15} + \dfrac{400}{15}\times 0{,}7^n. \end{cases}$$

La suite $(0{,}7^n)$ est une suite géométrique de raison $0{,}7 \in ]0\,;1[$, donc elle est strictement décroissante et de limite nulle. En conséquence, les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont strictement décroissantes,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{2{,}8\times 10^7}{15} \approx 1\,866\,666{,}67 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{1400}{15} \approx 93,33.$$

Le modèle décris prévoit une décroissance des populations de campagnols et de renards vers un état stable d'environ 1 866 667 campagnols et 93 renards.

### Partie B. Un modèle plus conforme à la réalité

1. Dans la cellule B4 il faut mettre la formule `=1,1*$B3-0,001*$B3*$C3`, et dans la cellule C4 il faut mettre la formule `=2e-7*$B3*$C3+0,6*$C3`.
2. On observe une baisse de la population de renards et une hausse des celles des campagnols à partir de l'année 2021.

### Partie C

Il nous faut trouver les suites constantes $(u_n)$ et $(v_n)$ vérifiant les relations de récurrences suivantes :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 1,1u_n - 0,001u_n \times v_n \\ v_{n+1} = 2 \times 10^{-7} u_n \times v_n + 0,6v_n. \end{cases}$$

ou ce qui revient au même à résoudre le système d'inconnues $(u_0, v_0)$ suivant :

$$\begin{cases} u_0 = 1,1u_0 - 0,001u_0 \times v_0 \\ v_0 = 2 \times 10^{-7} u_0 \times v_0 + 0,6v_0, \end{cases}$$

que l'on peut réécrire sous la forme

$$\begin{cases} (0,001v_0 - 0,1)u_0 = 0 \\ (0,4 - 2 \times 10^{-7} u_0)v_0 = 0, \end{cases}$$

à partir de laquelle nous tirons sans difficulté les deux solutions suivantes :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ v_0 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = \dfrac{0,1}{0,001} = 100 \\ u_0 = \dfrac{0,4}{2 \times 10^{-7}} = 2 \times 10^6. \end{cases}$$

Le modèle prédit des populations de campagnols et de renards stables pour deux états initiaux : $u_0 = 0$, $v_0 = 0$ et $u_0 = 2\,000\,000$, $v_0 = 100$.

**Sujet 2**

# *Antilles-Guyanne*

19 juin 2018

**Exercice 1** (5 points)
*Commun à tous les candidats*

L'exploitant d'une forêt communale décide d'abattre des arbres afin de les vendre, soit aux habitants de la commune, soit à des entreprises. On admet que :

- parmi les arbres abattus, 30 % sont des chênes, 50 % sont des sapins et les autres sont des arbres d'essence secondaire (ce qui signifie qu'ils sont de moindre valeur) ;
- 45,9 % des chênes et 80 % des sapins abattus sont vendus aux habitants de la commune ;
- les trois-quarts des arbres d'essence secondaire abattus sont vendus à des entreprises.

## Partie A

Parmi les arbres abattus, on en choisit un au hasard. On considère les événements suivants :

- C : « l'arbre abattu est un chêne » ;
- S : « l'arbre abattu est un sapin » ;
- E : « l'arbre abatu est un arbre d'essence secondaire » ;
- H : « l'arbre abattu est vendu à un habitant de la commune ».

1. Construire un arbre pondéré complet traduisant la situation.
2. Calculer la probabilité que l'arbre abattu soit vendu à un habitant de la commune est égale à 0,5877.

3. Quelle est la probabilité qu'un arbre abattu vendu à un habitant de la commune soit un sapin ? On donnera le résultat arrondi à $10^{-3}$.

### Partie B

Le nombre d'arbres sur un hectare de cette forêt peut être modélisé par une variable aléatoire X suivant une loi normale d'espérance $\mu = 4000$ et d'écart-type $\sigma = 300$.

1. Détermner la probabilité qu'il y ait entre 3400 et 4600 arbres sur un hectare donné de cette forêt. On donnera le résultat arrondi à $10^{-3}$.
2. Calculer la probabilité qu'il y ait plus de 4500 arbres sur un hectare donné de cette forêt. On donnera le résultat arrondi à $10^{-3}$.

### Partie C

L'exploitant affirme que la densité de sapins dans cette forêt communale est de 1 sapin pour 2 arbres. Sur une parcelle, on a compté 106 sapins dans un échantillon de 200 arbres. Ce résultat remet-il en cause l'affirmation de l'exploitant ?

## Exercice 2 (5 points)

*Commun à tous les candidats*

Un artiste souhaite réaliser une sculpture composée d'un tétraèdre posé sur un cube de 6 mètres d'arête. Ces deux solides sont représentés par le cube ABCDEFGH et par le tétraèdre SELM de la figure 1 page suivante.

On munit l'espace du repère orthonormé $(A ; \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{AK})$ tel que $I \in [AB]$, $J \in [AD]$, $K \in [AE]$ et $AI = AJ = AK = 1$, l'unité graphique représentant 1 mètre.
Les points L, M et S sont définis de la façon suivante :

- L est le point tel que $\overrightarrow{FL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{FE}$ ;
- M est le point d'intersection du plan (BDL) et de la droite (EH) ;
- S est le point d'intersection des droites (BL) et (AK).

1. Démontrer, sans calcul de coordonnées, que les droites (LM) et (BD) sont parallèles.

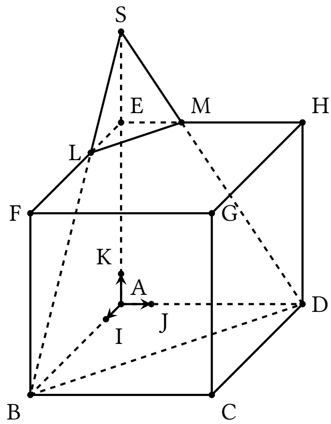



Figure 1

2. Démontrer que les coordonnées du point L sont $(2\,;0\,;6)$.
3. *a)* Donner une représentation paramétrique de la droite (BL).

   *b)* Vérifier que les coordonnées du point S sont $(0\,;0\,;9)$.
4. Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $(3\,;3\,;2)$.

   *a)* Vérifier que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (BDL).

   *b)* Démontrer qu'une équation cartésienne du plan (BDL) est

$$3x + 3y + 2z - 18 = 0.$$

   *c)* On admet que la droite (EH) a pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = s \\ z = 6 \end{cases} \quad (s \in \mathbb{R}).$$

   Calculer les coordonnées du point M.

5. Calculer le volume du tétraèdre SELM. On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est donné par la formule suivante :

$$V = \frac{1}{3} \times \text{Aire de la base} \times \text{Hauteur}.$$

6. L'artiste souhaite que la mesure de l'angle $\widehat{\text{SLE}}$ soit comprise entre 55° et 60°.

**Exercice 3** (5 points)

*Commun à tous les candidats*

Un publicitaire souhaite imprimer le logo de la figure 2 sur un T-shirt.

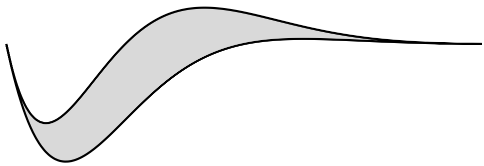


FIGURE 2

Il dessine ce logo à l'aide des courbes de deux fonctions $f$ et $g$ définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}(-\cos x + \sin x + 1) \quad \text{et} \quad g(x) = -\mathrm{e}^{-x}\cos x.$$

On admet que les fonctions $f$ et $g$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

## PARTIE A. ÉTUDE DE LA FONCTION $f$

1. Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$-\mathrm{e}^{-x} \leqslant f(x) \leqslant 3\mathrm{e}^{-x}.$$

2. En déduire la limite de $f$ en $+\infty$.
3. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \mathrm{e}^{-x}(2\cos x - 1)$ où $f'$ est la fonction dérivée de $f$.
4. Dans cette question, on étudie la fonction $f$ sur l'intervalle $[-\pi\,;\pi]$.
   *a)* Déterminer le signe de $f'(x)$ pour $x$ appartenant à l'intervalle $[-\pi\,;\pi]$.
   *b)* En déduire ls variations de $f$ sur $[-\pi\,;\pi]$.

### Partie B. Aire du logo

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les représentations graphiques des fonctions $f$ et $g$ dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. L'unité graphique est de 2 centimètres. Ces deux courbes sont tracées sur la figure 3.

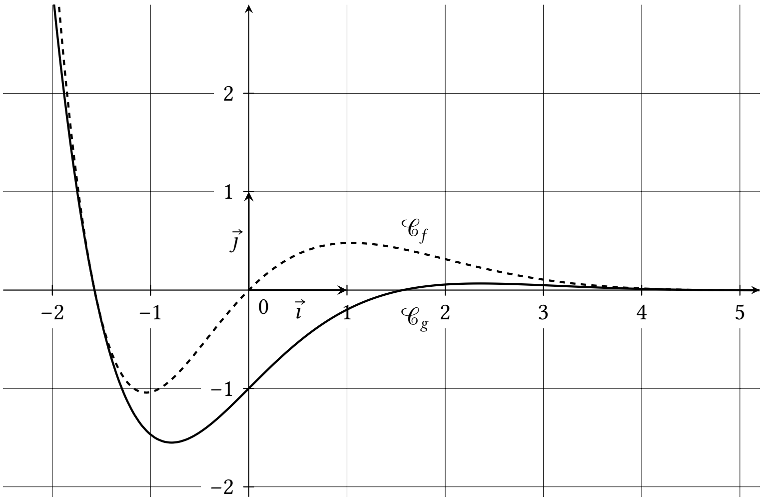



Figure 3

1. Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la courbe $\mathscr{C}_g$ sur $\mathbb{R}$.
2. Soit H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\mathrm{H}(x) = \left(-\frac{\cos x}{2} - \frac{\sin x}{2} - 1\right)\mathrm{e}^{-x}.$$

On admet que H est une primitive de la fonction $x \mapsto (\sin x + 1)\mathrm{e}^{-x}$ sur $\mathbb{R}$. On note $\mathscr{D}$ le domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, la courbe $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équation $x = -\frac{\pi}{2}$ et $x = \frac{3\pi}{2}$.

*a)* Hachurer le domaine $\mathscr{D}$ sur la figure 3 à rendre avec la copie.

*b)* Calculer, en unité d'aire, l'aire du domaine $\mathcal{D}$, puis en donner une valeur approchée à $10^{-2}$ près en $\text{cm}^2$.

**Exercice 4** (5 points)
*Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité*

Le directeur d'une réserve marine a recensé 3000 cétacés dans cette réserve au 1er juin 2017. Il est inquiet car il sait que le classement de la sone en « réserve marine » ne sera pas reconduit si le nombre de cétacés de cette réserve devient inférieur à 2000.

Une étude lui permet d'élaborer un modèle selon lequel, chaque année :

— entre le 1er juin et le 31 octobre, 80 cétacés arrivent dans la réserve marine ;

— entre le 1er novembre et le 31 mai, la réserve subit une baisse de 5 % de son effectif par rapport à celui du 31 octobre qui précède.

On modélise l'évolution du nombre de cétacés par une suite $(u_n)$. Selon ce modèle, pour tout entier naturel $n$, $u_n$ désigne le nombre de cétacés au 1er juin de l'année $2017 + n$. On a donc $u_0 = 3000$.

1. Justifier que $u_1 = 2926$.
2. Justifier que, pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = 0{,}95u_n + 76$.
3. À l'aide d'un tableur (table 1), on a calculé les 8 premiers termes de la suite $(u_n)$. Le directeur a configuré le format des cellules pour que ne soient affichés que des nombres arrondis à l'unité.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| **2** | $u_n$ | 3000 | 2926 | 2856 | 2789 | 2725 | 2665 | 2608 | 2553 |

TABLE 1

Quelle formule peut-on entrer dans la cellule C2 afin d'obtenir, par recopie vers la droite, les termes de la suite $(u_n)$ ?

4. *a)* Démontrer que, pour tout entier naturel $n$, $u_n \geqslant 1520$.

*b)* Démontrer que la suite $(u_n)$ est décroissante.

*c)* Justifier que la suite $(u_n)$ est convergente. On ne cherchera pas ici la valeur de la limite.

5. On désigne par $(v_n)$ la suite définie par, pour tout entier naturel $n$, $v_n = u_n - 1520$.

   *a)* Démontrer que la suite $(v_n)$ est une suite géométrique de raison 0,95 dont on précisera le premier terme.

   *b)* En déduire que, pour tout entier naturel $n$, $u_n = 1480 \times 0{,}95^n + 1520$.

   *c)* Déterminer la limite de la suite $(u_n)$.

6. Recopier et compléter l'algorithme (figure 4) pour déterminer l'année à partir de laquelle le nombre de cétacés présents dans la réserve marine sera inférieur à 2000.

```
n ← 0
u ← 3000
Tant que .......
    n ← .......
    u ← .......
Fin de Tant que
```

FIGURE 4

   La notation « ← » correspond à une affectation de valeur, ainsi « $n \leftarrow 0$ » signifie « Affecter à $n$ la valeur 0 ».

7. La réserve marine fermera-t-elle un jour ? Si oui, déterminer l'année de fermeture.

**Exercice 4** (5 points)
*Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité*

Le droit de pêche dans une réserve marine est réglementé : chaque pêcheur doit posséder une carte d'accréditation annuelle. Il existe deux types de carte :

- une carte de pêche dite « libre » (le pêcheur n'est pas limité en nombre de poissons pêchés);
- une carte de pêche dite « avec quota » (le pêcheur ne doit pas dépasser une certaine quantité hebdomadaire de poissons).

On suppose que le nombre total de pêcheurs reste constant d'année en année. On note, pour l'année $2017 + n$ :

- $\ell_n$ la proportion de pêcheurs possédant la carte de pêche libre;
- $q_n$ la proportion de pêcheurs possédant la carte de pêche avec quota.

On observe que :

- chaque année, 65 % des possésseurs de la carte de pêche libre achétant de nouveau une carte de pêche libre l'année suivante;
- chaque année, 45 % des possesseurs de la carte de pêche avec quota achètent une carte de pêche libre l'année suivante;
- en 2017, 40 % des pêcheurs ont acheté une carte de pêche libre. On a donc $\ell_0 = 0{,}4$ et $q_0 = 0{,}6$.

On note, pour tout entier naturel $n$, $\mathrm{P}_n = \begin{pmatrix} \ell_n \\ q_n \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que, pour tout entier naturel $n$, $\mathrm{P}_{n+1} = \mathrm{MP}_n$, où M est la matrice carrée
$$\begin{pmatrix} 0{,}65 & 0{,}45 \\ 0{,}35 & 0{,}55 \end{pmatrix}.$$
2. Calculer la proposition de pêcheurs achetant une carte de pêche avec quota en 2019.
3. Un logiciel de calcul formel donne les résultats ci-dessous :
   En vous appuyant sur les résultats précédents, répondre aux deux questions suivantes :

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 ∘ | `M:={{0.65,0.45},{0.35,0.55}}` <br> ✓ $M := \begin{pmatrix} 0.65 & 0.45 \\ 0.35 & 0.55 \end{pmatrix}$ | 5 ∘ | `TQ` <br> $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ |
| 2 ∘ | `P_0:={{0.4},{0.6}}` <br> ✓ $P_0 := \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.6 \end{pmatrix}$ | 6 ∘ | `QT` <br> $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ |
| 3 ∘ | `Q:={{9,1},{7,-1}}` <br> ✓ $Q := \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$ | 7 ∘ | `D:=TMQ` <br> $\rightarrow D := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$ |
| 4 ∘ | `T:={{1/16,1/16},{7/16,-9/16}}` <br> $\rightarrow Q := \begin{pmatrix} \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\ \frac{7}{16} & -\frac{9}{16} \end{pmatrix}$ | | |

FIGURE 5

*a)* Justifier que Q est une matrice inverseible et préciser sa matrice inverse. On notera $Q^{-1}$ la matrice inverse de Q.

*b)* Justifier que $M = QDQ^{-1}$ et démontrer que, pour tout entier naturel $n$ non nul :

$$M^n = QD^nQ^{-1}.$$

4. On admet que, pour tout entier naturel $n$ non nul,

$$M^n = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 9 + 7 \times 0{,}2^n & 9 - 9 \times 0{,}2^n \\ 7 - 7 \times 0{,}2^n & 7 + 9 \times 0{,}2^n \end{pmatrix}.$$

*a)* Démontrer que pour tout entier naturel $n$, $P_n = M^n P_0$.

*b)* Justifier que, pour tout entier naturel $n$ :

$$\ell_n = \frac{9}{16} - \frac{13}{80} \times 0{,}2^n.$$

5. La proportion de pêcheurs achetant la carte de pêche libre dépassera-t-elle 60 % ?

## Exercice 1

*Commun à tous les candidats*

### PARTIE A

1. Voir la figure 6.

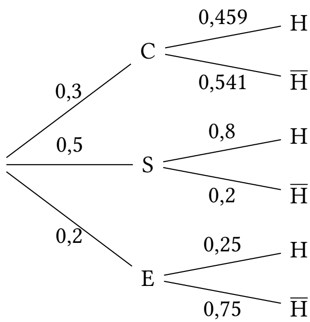



FIGURE 6

2. La probabilité pour que l'arbre abattu soit un chêne vendu à un habitant de la commune est $\mathbb{P}(\mathrm{C} \cap \mathrm{H}) = \mathbb{P}(\mathrm{C}) \times \mathbb{P}_{\mathrm{C}}(\mathrm{H}) = 0{,}3 \times 0{,}459 = 0{,}1377$.

3. D'après la formule des probabilités totales, la pobabilité pour que l'arbre abattu soit vendu à un habitant de la commune est

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\mathrm{H}) &= \mathbb{P}(\mathrm{C}) \times \mathbb{P}_{\mathrm{C}}(\mathrm{H}) + \mathbb{P}(\mathrm{S}) \times \mathbb{P}_{\mathrm{S}}(\mathrm{H}) + \mathbb{P}(\mathrm{E}) \times \mathbb{P}_{\mathrm{E}}(\mathrm{H}) \\ &= 0{,}3 \times 0{,}459 + 0{,}5 \times 0{,}8 + 0{,}2 \times 0{,}25 \\ &= 0{,}5877.\end{aligned}$$

4. La probabilité qu'un arbre abattu vendu à un habitant de la commune soit un sapin est

$$\mathbb{P}_{\mathrm{H}}(\mathrm{S}) = \frac{\mathbb{P}(\mathrm{H} \cap \mathrm{S})}{\mathbb{P}(\mathrm{H})} = \frac{\mathbb{P}(\mathrm{S})\mathbb{P}_{\mathrm{S}}(\mathrm{H})}{\mathbb{P}(\mathrm{H})} = \frac{0{,}5 \times 0{,}8}{0{,}5877} \approx 0{,}681.$$

### Partie B

1. La probabilité qu'il y ait entre 3400 et 4600 arbres sur un hectare donné est égale à $\mathbb{P}(3400 \leqslant X \leqslant 4600) = \mathbb{P}(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 0{,}954$.

2. À l'aide de la calculatrice, on trouve que la probabilité qu'il y ait plus de 4500 arbres sur un hectore donné est égale à $\mathbb{P}(X > 4500) \approx 0{,}048$.

### Partie C

Testons l'hypothèse : « La densité de sapins dans cette forêt communale est égale à $p = 0{,}5$. » La taille $n = 200$ de l'échantillon vérifie les inégalités $n \geqslant 30$, $np = 200 \times 0{,}5 = 100 \geqslant 5$ et $n(1-p) = np \geqslant 200$, donc un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence des sapins est

$$\left[p - 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\,;p + 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$$
$$= \left[0{,}5 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}5 \times (1-0{,}5)}{200}}\,;0{,}5 + 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}5 \times (1-0{,}5)}{200}}\right]$$
$$\approx [0{,}430\,;0{,}570].$$

La fréquence des sapins dans l'échantillon, égale à $106/200 = 0{,}53$, appartient à l'intervalle de fluctuation asymptotique ; au seuil de 95 %, nous ne pouvons pas rejeter l'hypothèse et nous acceptons l'affirmation de l'exploitant.

## Exercice 2

*Commun à tous les candidats*

1. Les plans (EFG) et (ABC) sont parallèles. Or l'intersection du plan (BDL) et du plan (ABC) est la droite (BD), donc le plan (BDL) coupe le plan (EFG) ; l'intersection est une droite passant L et M. Par conséquent, la droite (LM) est parallèle à la droite (BD).

2. De $\overrightarrow{FL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{FE}$, on tire

$$\overrightarrow{EL} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FL} = \overrightarrow{EF} - \frac{2}{3}\overrightarrow{EF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EF} = 2\overrightarrow{AI},$$

puis

$$\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EL} = 2\overrightarrow{AI} + 0\overrightarrow{AJ} + 6\overrightarrow{AK},$$

ce qui signifie que les coordonnées du point L sont $(2\,;0\,;6)$.

3. *a)* Une représentation paramétrique de la droite (BL) passant par B$(6\,;0\,;0)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{BL}(-4\,;0\,;6)$ est

$$\begin{cases} x = 6 - 4t \\ y = 0 \\ z = 6t. \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

*b)* La droite (AE) est l'axe des cotes ; c'est l'ensemble des points d'abscisse et d'ordonnée nulles. Le paramètre du point S est donc la solution de l'équation $6 - 4t = 0$. On trouve $t = \frac{3}{2}$ ; par conséquent, les coordonnées du point S sont $\left(0\,;0\,;6 \times \frac{3}{2}\right)$, soit $(0\,;0\,;9)$.

4. *a)* Le repère est orthonormé, donc les produits scalaires du vecteur $\vec{n}(3\,;3\,;2)$ avec les vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{BD}(-6\,;6\,;0)$ et $\overrightarrow{BL}(-4\,;0\,;6)$ sont

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{BD} = 3 \times (-6) + 3 \times 6 + 2 \times 0 = 0$$

et

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{BL} = 3 \times (-4) + 3 \times 0 + 2 \times 6 = 0,$$

donc le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (BDL).

*b)* D'après la question précédente, une équation cartésienne du plan (BDL) est

$$3x + 3y + 2z + d = 0$$

où $d$ est un réel que nous déterminons en écrivant que les coordonnées du point B$(6\,;0\,;0)$ vérifient l'équation, ce qui donne $3 \times 6 + 3 \times 0 + 2 \times 0 + d = 0$, d'où $d = -18$. Par conséquent, une équation cartésienne du plan (BDL) est

$$3x + 3y + 2z - 18 = 0$$

*c)* Puisque M appartient à la droite (EH), ses coordonnées sont de la forme $(0\,;s\,;6)$ où $s$ est un réel. Or le point M appartient au plan (BDL) si et seulement si $s$ vérifie $3\times 0+3s+2\times 6-18=0$, d'où $s=2$. Il s'ensuit que les coordonnées du point M sont $(0\,;2\,;6)$.

5. La droite (AE) est perpendiculaire au plan (ELM), donc [SE] est la hauteur issue du sommet S du tétraèdre SELM. Le volume $\mathcal{V}$ du tétraèdre SELM est, en unité de volume, égal à

$$\mathcal{V}=\frac{1}{3}\times\frac{\mathrm{EL}\times\mathrm{EM}}{2}\times\mathrm{SE}=\frac{1}{3}\times\frac{2\times 2}{2}\times 3=2,$$

soit $2\,\mathrm{m}^3$.

6. Dans le triangle ELS rectangle en E, on a

$$\tan\widehat{\mathrm{ELS}}=\frac{\mathrm{ES}}{\mathrm{EL}}=\frac{3}{2}.$$

La calculatrice donne $\widehat{\mathrm{ELS}}\approx 56{,}3°$. La contrainte d'angle est bien respectée.

## Exercice 3

*Commun à tous les candidats*

### Partie A. Étude de la fonction $f$

1. Pour tout réel $x$, nous avons les encadrements

$$-1\leqslant\cos x\leqslant 1\quad\text{et}\quad -1\leqslant\sin x\leqslant 1\,;$$

par conséquent,

$$-1\leqslant -\cos x+\sin x+1\leqslant 3.$$

Multiplions les membres de l'inégalité par $\mathrm{e}^{-x}>0$ ; nous obtenons ainsi l'encadrement souhaité

$$-\mathrm{e}^{-x}\leqslant f(x)\leqslant 3\mathrm{e}^{-x}.$$

2. On a

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty} e^{-x} = 0 \quad \text{car} \quad \begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} -x = -\infty \\ \lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} e^{x} = 0, \end{cases}$$

d'où

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty} -e^{-x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\longrightarrow+\infty} 3e^{-x} = 0.$$

Le théorème des gendarmes appliqué à l'encadrement de la question A.1, nous permet alors de conclure que

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty} f(x) = 0.$$

3. Pour tout réel $x$, on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= -e^{-x}(-\cos x + \sin x + 1) + e^{-x}(\sin x + \cos x) \\ &= e^{-x}(2\cos x - 1). \end{aligned}$$

4. *a)* La fonction exponentielle étant à valeurs strictement positives, le signe de $f'$ est le même que celui de la fonction $\varphi$ définie sur $[-\pi\,;\pi]$ par

$$\varphi(x) = 2\cos x - 1.$$

La fonction $\varphi$ a même sens de variation que la fonction cosinus : strictement croissante sur l'intervalle $[-\pi\,;0]$ et strictement décroissante sur l'intervalle $[0\,;\pi]$. De plus, sur l'intervalle $[-\pi\,;\pi]$, l'équation $2\cos x - 1 = 0$ est équivalente à l'équation $\cos x = \frac{1}{2}$ dont les solutions sont $-\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{3}$. Nous en déduisons le tableau de signe de la fonction $f'$, figure 7 page suivante.

*b)* Voir le tableau de variations, figure 7 page suivante.

## Partie B. Aire du logo

1. Remarquons que pour tout réel $x$, on a

$$f(x) - g(x) = e^{-x}(\sin x + 1).$$

Puisque $e^{-x} > 0$, le signe de $f(x) - g(x)$ est le même que celui de $\sin x + 1$. Or pour tout réel $x$, on a $\sin x + 1 \geqslant 0$, et $\sin x + 1 = 0$ si et seulement si $x$

| $x$ | $-\pi$ | | $-\frac{\pi}{3}$ | | $0$ | | $\frac{\pi}{3}$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Variations de $\varphi$ | | ↗ | $0$ | ↗ | | ↘ | $0$ | ↘ | |
| Signe de $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | | $+$ | | $0$ | $-$ | |
| Variations de $f$ | | ↘ | | ↗ | | ↗ | | ↘ | |

FIGURE 7

est de la forme $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ où $k$ est un entier relatif. Nous en déduisons que la courbe $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de la courbe $\mathscr{C}_g$ et qu'elles se coupent aux points dont l'abscisse est de la forme $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ où $k$ est un entier relatif.

2. *a)* Voir la figure 8 page ci-contre.

   *b)* Comme nous l'avons démontré à la question B.1, la courbe $\mathscr{C}_f$ est située au-dessus de la courbe $\mathscr{C}_g$, donc l'aire du domaine $\mathscr{D}$ est, en unité d'aire, égale à

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) - g(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{H}\left(\frac{3\pi}{2}\right) - \mathrm{H}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3\pi/2} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\pi/2}$$
$$= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\pi/2}(1 - \mathrm{e}^{-2\pi}).$$

Comme l'unité d'aire vaut $4\,\text{cm}^2$, l'aire du domaine est égale à

$$2\mathrm{e}^{\pi/2}(1 - \mathrm{e}^{-2\pi})\,\text{cm}^2 \approx 9{,}60\,\text{cm}^2.$$

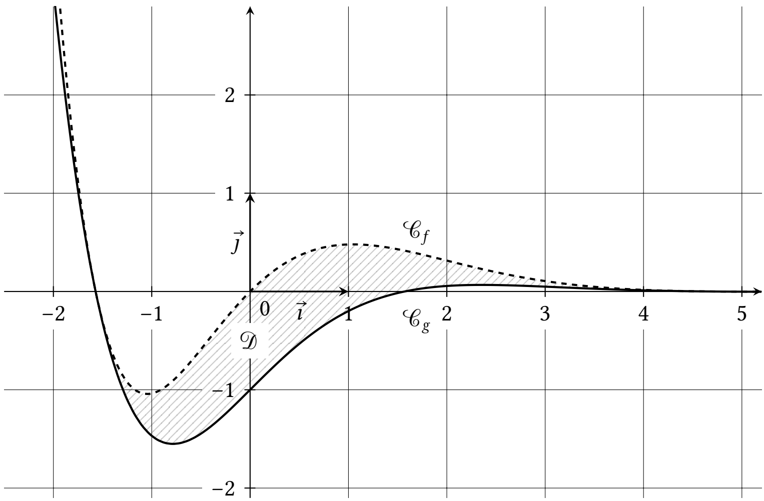



FIGURE 8

## Exercice 4

*Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité*

1. Le 31 octobre 2017, la réserve comptait $u_0 + 80$ cétacés. Du 1er novembre au 1er juin 2018, le nombre cétacés a subit une baisse de 5 % ce qui correspond à une multiplication de ce nombre par 0,95, d'où

$$u_1 = 0{,}95 \times (u_0 + 80) = 0{,}95 \times (3000 + 80) = 2926.$$

2. Soit $n$ un entier naturel. Appliquons le même raisonnement que précédemment. Le 31 octobre $2017 + n$, le nombre de cétacés est de $u_n + 80$. Entre le 1er novembre $2017 + n$ et le 1er juin $2017 + (n + 1)$, le nombre de cétacés diminue de 5 % ce qui correspond à une multiplication de ce nombre par 0,95, d'où

$$u_{n+1} = 0{,}95 \times (u_n + 80) = 0{,}95u_n + 76.$$

3. Dans la cellule C2, on peut saisir la formule `=B$2*0.95+76`.

*Remarque.* On peut supprimer l'adressage absolu sur la ligne, ce qui donne `=B2*0.95+76`.

4. *a)* Démontrons par récurrence sur l'entier $n$ l'inégalité $u_n \geqslant 1520$.
   *Initialisation.* On a $u_0 = 3000 \geqslant 1520$.
   *Hérédité.* Soit $k$ un entier naturel. Supposons que $u_k \geqslant 1520$. On a alors

$$u_{k+1} = 0{,}95u_k + 76 \geqslant 0{,}95 \times 1520 + 76 = 1520.$$

   *Conclusion.* L'inégalité est vraie pour $n = 0$, et $u_k \geqslant 1520$ entraîne $u_{k+1} \geqslant 1520$, donc d'après le principe de récurrence, l'inégalité $u_n \geqslant 1520$ est vraie pour tout entier naturel $n$.

   *b)* Pour tout entier naturel $n$, on a

$$u_{n+1} - u_n = 0{,}95u_n + 76 - u_n = -0{,}5u_n + 76.$$

   Or $u_n \geqslant 1520$ et la fonction affine $x \longmapsto -0{,}5x + 76$ est décroissante, donc

$$u_{n+1} - u_n \leqslant -0{,}5 \times 1520 + 76 < 0.$$

   Par conséquent, la suite $(u_n)$ est décroissante.

   *c)* Nous avons démontré que la suite $(u_n)$ est décroissante et minorée, elle est donc convergente.

5. *a)* Nous avons pu remarquer à la question 4.a l'égalité

$$1520 = 0{,}95 \times 1520 + 76.$$

   Retranchons la membre à membre à l'égalité

$$u_{n+1} = 0{,}95u_n + 76.$$

   Nous obtenons ainsi

$$u_{n+1} - 1520 = 0{,}95(u_n - 1520),$$

   c'est-à-dire

$$v_{n+1} = 0{,}95v_n,$$

   ce qui montre que la suite $(v_n)$ est une suite géométrique de raison $q = 0{,}95$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 1520 = 3000 - 1520 = 1480$.

*b)* De ce qui précède, nous déduisons que le terme général de la suite $(v_n)$ est $v_n = v_0 q^n = 1480 \times 0{,}95^n$. Le terme général de la suite $(u_n)$ s'en déduit immédiatement :

$$u_n = v_n + 1520 = 1480 \times 0{,}95^n + 1520.$$

Comme $|q| < 1$, la suite géométrique $(v_n)$ converge vers 0, ainsi

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n = 1520.$$

6. Voir la figure 9.

$n \longleftarrow 0$
$u \longleftarrow 3000$
Tant que $u \geqslant 2000$
    $n \longleftarrow n + 1$
    $u \longleftarrow 0{,}95u + 1520$
Fin de Tant que

FIGURE 9

7. Compte tenu que la suite $(u_n)$ tend vers 1520, par définition de la limite d'une suite, il existe un entier naturel N tel que $u_\mathrm{N} < 2000$, ce qui signifie que la réserve fermera bien un jour.
Résolvons l'inéquation $u_n < 2000$. Les équations suivantes sont équivalentes :

$$\begin{aligned} 1480 \times 0{,}95^n + 1520 &< 2000 \\ 0{,}95^n &< \frac{12}{37} \\ \ln 0{,}95^n &< \ln \frac{12}{37} \\ n \ln 0{,}95 &< \ln \frac{12}{37} \\ n &> \frac{\ln \frac{12}{37}}{\ln 0{,}95} \approx 21{,}9. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que 22 est le plus petit entier tel que $u_n < 2000$ et donc que la réserve fermera en 2039.

*Remarque.* Nous pouvions aussi procéder par dichotomie à l'aide du terme général de la suite $(u_n)$. On trouve rapidement $u_{21} = 2024, \ldots$ et $u_{22} = 1998, \ldots$. Comme la suite est décroissante, 22 est le plus petit entier $n$ tel que $u_n < 2000$.

## Exercice 4

*Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité*

1. L'année $2017 + (n + 1)$, l'ensemble des pêcheurs qui possèdent une carte de pêche libre est composé des $0{,}65 l_n$ pêcheurs qui avaient une carte de pêche libre l'année précédente et des $0{,}45 q_n$ pêcheurs qui avaient une carte de pêche avec quota l'année précédente, ce que l'on traduit par la relation

$$l_{n+1} = 0{,}65 l_n + 0{,}45 q_n.$$

Le nombre de pêcheurs est constant d'année en année, d'où

$$l_{n+1} + q_{n+1} = l_n + q_n,$$

donc

$$\begin{aligned} q_{n+1} &= l_n + q_n - l_{n+1} \\ &= l_n + q_n - 0{,}65 l_n - 0{,}45 q_n \\ &= 0{,}35 l_n + 0{,}55 q_n. \end{aligned}$$

Les relations liant $(l_{n+1}, q_{n+1})$ à $(l_n, q_n)$ s'écrivent sous la forme matricielle

$$\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}65 & 0{,}45 \\ 0{,}35 & 0{,}55 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_n \\ q_n \end{pmatrix},$$

soit

$$\mathrm{P}_{n+1} = \mathrm{M}\mathrm{P}_n.$$

2. On a

$$\mathrm{P}_1 = \mathrm{MP}_0 = \begin{pmatrix} 0{,}65 & 0{,}45 \\ 0{,}35 & 0{,}55 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}65 \times 0{,}4 + 0{,}45 \times 0{,}6 \\ 0{,}36 \times 0{,}4 + 0{,}55 \times 0{,}6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}53 \\ 0{,}47 \end{pmatrix}.$$

puis

$$\mathrm{P}_2 = \mathrm{MP}_1 = \begin{pmatrix} 0{,}556 \\ 0{,}444 \end{pmatrix}.$$

En 2019, la proportion de pêcheurs possédant une carte de pêche avec quota est de 44,4 %.

3. *a)* D'après les calculs 5 et 6, on a $\mathrm{QT} = \mathrm{TQ} = \mathrm{I}$, ce qui montre que la matrice Q est inversible et que $\mathrm{Q}^{-1} = \mathrm{T}$.

   *b)* D'après le calcul 7, $\mathrm{D} = \mathrm{Q}^{-1}\mathrm{MQ}$, donc $\mathrm{QDQ}^{-1} = \mathrm{QQ}^{-1}\mathrm{MQQ}^{-1} = \mathrm{M}$.
   Démontrons par récurrence sur l'entier $n$ la propriété

$$\mathscr{P}(n) : \ \mathrm{M}^n = \mathrm{QD}^n\mathrm{Q}^{-1}.$$

   *Initialisation.* On a $\mathrm{M} = \mathrm{QDQ}^{-1}$, donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.
   *Hérédité.* Soit $k \geqslant 1$ un entier. Supposons que $\mathscr{P}(k)$ est vraie. Alors

$$\mathrm{M}^{k+1} = \mathrm{MM}^k = \mathrm{QDQ}^{-1}\mathrm{QD}^k\mathrm{Q}^{-1} = \mathrm{QDD}^k\mathrm{Q}^{-1} = \mathrm{QD}^{k+1}\mathrm{Q}^{-1},$$

   donc $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.
   *Conclusion.* La propriété est vraie au rang $n = 1$ et elle est héréditaire, donc d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie au rang $n$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

4. *a)* Démontrons par récurrence sur l'entier $n$ que $\mathrm{P}_n = \mathrm{M}^n\mathrm{P}_0$.
   *Initialisation.* Nous avons démontré à la question 1.a que $\mathrm{P}_{n+1} = \mathrm{MP}_n$. Pour $n = 0$, on obtient $\mathrm{P}_1 = \mathrm{MP}_0$.
   *Hérédité.* Soit $k \geqslant 1$ un entier. Supposons l'égalité vraie au rang $k$. Alors $\mathrm{P}_{k+1} = \mathrm{MP}_k = \mathrm{MM}^k\mathrm{P}_0 = \mathrm{M}^{k+1}\mathrm{P}_0$. L'égalité est vraie au rang $k = 1$.
   *Conclusion.* D'après le principe de récurrence, l'égalité $\mathrm{P}_n = \mathrm{M}^n\mathrm{P}_0$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 1$.

*b)* D'après l'égalité démontrée à la question précédente,

$$\begin{aligned} l_n &= \frac{1}{16}\big((9+7\times 0{,}2^n)l_0 + (9-9\times 0{,}2^n)q_0\big) \\ &= \frac{1}{16}\big((9+7\times 0{,}2^n)\times 0{,}4 + (9-9\times 0{,}2^n)\times 0{,}6\big) \\ &= \frac{1}{16}(9-2{,}6\times 0{,}2^n) \\ &= \frac{9}{16} - \frac{13}{80}\times 0{,}2^n. \end{aligned}$$

5. Pour tout entier $n \geqslant 0$, on a $\frac{13}{80}\times 0{,}2^n > 0$, donc

$$l_n < \frac{9}{16} = 0{,}5625 < 0{,}6.$$

Par conséquent, la proportion de pêcheurs achetant la carte de pêche libre ne dépassera jamais 60 %.

**Sujet 3**

# *Asie*

21 juin 2018

**Exercice 1** (5 points)
*Commun à tous les candidats*

Une ferme aquatique exploite une population de crevettes qui évolue en fonction de la reproduction naturelle et des prélévements effectués. La masse initiale de cette population de crevettes est estimé à 100 tonnes. Compte tenu des conditions de reproduction et de prélèvement, on modélise la masse de la population de crevettes, exprimée en tonne, en fonction du temps, exprimé en semaine, par la fonction $f_p$ définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par

$$f_p(t) = \frac{100p}{1-(1-p)\mathrm{e}^{-pt}}$$

où $p$ est un paramètre strictement compris entre 0 et 1 et qui dépend des différentes conditions de vie et d'exploitation des crevettes.

1. Cohérence du modèle
   *a)* Calculer $f_p(0)$.
   *b)* On rappelle que $0 < p < 1$. Démontrer que pour tout nombre réel $t \geqslant 0$,
   $$1-(1-p)\mathrm{e}^{-pt} \geqslant p.$$
   *c)* En déduire que pour tout nombre réel $t \geqslant 0$, $0 < f_p(t) \leqslant 100$.
2. Étude de l'évolution lorsque $p = 0{,}9$
   Dans cette question, on prend $p = 0{,}9$ et on étudie la fonction $f_{0,9}$ définie sur $[0\,;+\infty[$ par
   $$f_{0,9}(t) = \frac{90}{1-0{,}1\mathrm{e}^{-0{,}9t}}.$$

*a)* Déterminer les variations de la fonction $f_{0,9}$.

*b)* Démontrer pour tout réel $t \geqslant 0$, $f_{0,9}(t) \geqslant 90$.

*c)* Interpréter les résultats des questions 2.a et 2.b dans le contexte.

3. Retour au cas général

   On rappelle que $0 < p < 1$. Exprimer en fonction de $p$ la limite de $f_p$ lorsque $t$ tend vers $+\infty$.

4. Dans cette question, on prend $p = \frac{1}{2}$.

   *a)* Montrer que la fonction H définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par

$$\mathrm{H}(t) = 100\ln(2 - \mathrm{e}^{-t/2}) + 50t$$

   est une primitive de la fonction $f_{1/2}$ sur cet intervalle.

   *b)* En déduire la masse moyenne de crevettes lors des 5 premières semaines d'exploitation, c'est-à-dire la valeur moyenne de la fonction $f_{1/2}$ sur l'intervalle $[0\,;5]$. En donner un valeur approchée arrondie à la tonne.

**Exercice 2** (5 points)
*Commun à tous les candidats*

Dans les parties A et B de cet exercice, on considère une maladie ; tout individu a une probabilité égale à 0,15 d'être touché par cette maladie.

## Partie A

*Cette partie est un questionnaire à choix multiples (Q.C.M.). Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse exacte. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte un point, une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.*

Un test de dépistage de cette maladie a été mis au point. Si l'individu est maladen dans 94 % des cas le test est positif. Pour un individu choisi au hasard dans cette population, la probabilité que le test soit positif vaut 0,158.

1. On teste un individu choisi au hasard dans la population : le test est positif. Une valeur arrondie au centième de la probabilité que la personne soit malade est égale à

   A : 0,94  B : 1  C : 0,89  D : on ne peut pas savoir

2. On prélève un échantillon aléatoire dans la population, et on fait passer le test aux individus de cet échantillon. On souhaite que la probabilité qu'au moins un individu soit testé positivement soit supérieure ou égale à 0,99. La taille minimum de l'échantillon doit être égale à

   A : 26 personnes  B : 27 personnes  C : 3 personnes  D : 7 personnes

3. Un vaccin pour lutter contre cette maladie a été mis au point. Il est fabriqué par une entreprise sous forme de dose injectable par seringue. Le volume V (exprimé en millilitre) d'une dose suit une loi normale d'espérance $\mu = 2$ et d'écart-type $\sigma$. La probabilité que le volume d'une dose, exprimé en millilitre, soit compris entre 1,99 et 2,01 millilitres est égale à 0,997. La valeur de $\sigma$ doit vérifier :

   A : $\sigma = 0{,}02$  B : $\sigma < 0{,}003$  C : $\sigma > 0{,}003$  D : $\sigma = 0{,}003$

## Partie B

1. Une boîte d'un certain médicament permet de soigner un malade. La durée d'efficacité (exprimée en mois) de ce médicament est modélisée de la manière suivante :
   - durant les 12 premiers mois après fabrication, on est certain qu'il demeure efficace ;
   - au-delà, sa durée d'efficacité restante suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda$.

   La probabilité que l'une des boîtes prise au hasard dans un stock ait une durée totale supérieure à 18 mois est égale à 0,887. Quelle est la valeur moyenne de la durée d'efficacité totale de ce médicament ?

2. Une ville de 100 000 habitants veut constituer un stock de ces boîtes afin de soigner les personnes malades. Quelle doit être la taille minimale de ce stock pour que la probabilité qu'il suffise à soigner tous les malades de cette ville soit supérieure à 95 % ?

**Exercice 3** (5 points)
*Commun à tous les candidats*

On se place dans un repère orthonormé d'origine O et d'axes (O$x$), (O$y$) et (O$z$). Dans ce repère, on donne les points A$(-3\,;0\,;0)$, B$(3\,;0\,;0)$, C$(0\,;3\sqrt{3}\,;0)$ et D$(0\,;\sqrt{3}\,;2\sqrt{6})$. On note H le milieu du segment [CD] et I le milieu du segment [BC].

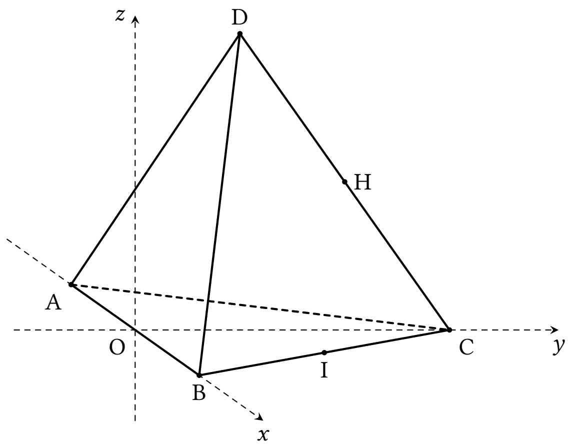



FIGURE 1

1. Calculer les longueurs AB et CD.

On admet pour la suite que toutes les arêtes du solide ABCD ont la même longueur, c'est-à-dire que le tétraèdre ABCD est un tétraèdre régulier. On appelle $\mathscr{P}$ le plan de vecteur normal $\overrightarrow{\text{OH}}$ et passant par le point I.

2. Étude de la section du tétraèdre ABCD par le $\mathscr{P}$.

   *a)* Montrer qu'une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ est

$$2y\sqrt{3} + z\sqrt{6} - 9 = 0.$$

*b)* Démontrer que le milieu J de [BD] est le point d'intersection de la droite (BD) et du plan $\mathscr{P}$.

*c)* Donner une représentation paramétrique de la droite (AD), puis démontrer que le plan $\mathscr{P}$ et la droite (AD) sont sécants en un point K dont on déterminera les coordonnées.

*d)* Démontrer que les droites (IJ) et (JK) sont perpendiculaires.

*e)* Déterminer précisément la nature de la section du tétraèdre ABCD par le plan $\mathscr{P}$.

3. Peut-on placer un point M sur l'arête [BD] tel que le triangle OIM soit rectangle en M ?

**Exercice 4** (5 points)
*Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité*

Dans cet exercice, $x$ et $y$ sont des nombres complexes réels supérieurs à 1.

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\vec{u},\vec{v})$ (figure 2), on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_{\mathrm{A}} = 1+\mathrm{i}$, $z_{\mathrm{B}} = x+\mathrm{i}$ et $z_{\mathrm{C}} = y+\mathrm{i}$.

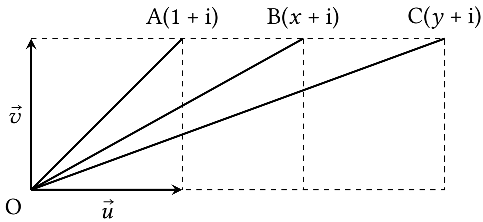



FIGURE 2

**Problème.** *On cherche les valeurs éventuelles des réels $x$ et $y$, supérieures à 1, pour lesquelles* $\mathrm{OC} = \mathrm{OA} \times \mathrm{OB}$ *et* $(\vec{u},\overrightarrow{\mathrm{OB}}) + (\vec{u},\overrightarrow{\mathrm{OC}}) = (\vec{u},\overrightarrow{\mathrm{OA}})$.

1. Démontrer que si $\mathrm{OC} = \mathrm{OA} \times \mathrm{OB}$, alors $y^2 = 2x^2 + 1$.

2. Reproduire sur la copie et compléter l'algorithme de la figure 3 pour qu'il affiche tous les couples $(x, y)$ tels que

$$\begin{cases} y^2 = 2x^2 + 1 \\ x \text{ et } y \text{ sont des nombres entiers} \\ 1 \leqslant x \leqslant 10 \text{ et } 1 \leqslant y \leqslant 10. \end{cases}$$

```
Pour x allant de 1 à ....... faire
    Pour ..............
        Si ..............
            Afficher x et y
        Fin Si
    Fin Pour
Fin Pour
```

FIGURE 3

*Lorsque l'on exécute cet algorithme, il affiche la valeur* 2 *pour la variable* $x$ *et la valeur* 3 *pour la valeur* $y$.

3. Étude d'un cas particulier : dans cette question seulement, on prend $x = 2$ et $y = 3$.
   *a)* Donner le module et un argument de $z_A$.
   *b)* Montrer que OC = OA × OB.
   *c)* Montrer que $z_B z_C = 5z_A$, et en déduire que $(\vec{u}, \overrightarrow{OB}) + (\vec{u}, \overrightarrow{OC}) = (\vec{u}, \overrightarrow{OA})$.
4. On revient au cas général, et on cherche s'il existe d'autres valeurs des réels $x$ et $y$ telles que les points A, B et C vérifient les deux conditions

$$\mathrm{OC} = \mathrm{OA} \times \mathrm{OB} \quad \text{et} \quad (\vec{u}, \overrightarrow{OB}) + (\vec{u}, \overrightarrow{OC}) = (\vec{u}, \overrightarrow{OA}).$$

On rappelle que si OC = OA × OB, alors $y^2 = 2x^2 + 1$ (question 1).

*a)* Démontrer que si $(\vec{u}, \overrightarrow{OB}) + (\vec{u}, \overrightarrow{OC}) = (\vec{u}, \overrightarrow{OA})$, alors

$$\arg\left(\frac{(x+i)(y+i)}{1+i}\right) \equiv 0 \quad (\text{mod } 2\pi).$$

En déduire que sous cette condition $x + y - xy + 1 = 0$.

*b)* Démontrer que si les deux conditions sont vérifiées et que de plus $x \neq 1$, alors

$$y = \sqrt{2x^2+1} \quad \text{et} \quad y = \frac{x+1}{x-1}.$$

5. On définit les fonctions $f$ et $g$ sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$ par

$$f(x) = \sqrt{2x^2+1} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{x+1}{x-1}.$$

Déterminer le nombre de solutions du problème initial. On pourra utiliser la fonction $h$ définie sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$ par $h(x) = f(x) - g(x)$ et s'appuyer sur la copie d'écran (figure 4 page suivante) d'un logiciel de calcul formel.

**Exercice 4** (5 points)
*Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité*

On s'intéresse à la figure 5 page 55, dans laquelle $a$, $b$ et $c$ désignent les longueurs des hypothénuses des trois triangles rectangles en O dessinés ci-dessous.

**Problème.** *On cherche les couples de* nombres entiers naturels non nuls $(u, v)$ *tels que* $ab = c$.

1. Modélisation

Démontrer que les solutions du problème sont des solutions de l'équation

$$v^2 - 2u^2 = 1 \quad (v \text{ et } y \text{ étant des entiers naturels non nuls}). \qquad (\mathcal{E})$$

2. Recherche systématique des solutions de l'équation $(\mathcal{E})$

Recopier et compléter l'algorithme de la figure 6a page 55 pour qu'il affiche au cours de son exécution tous les couples solutions de l'équation pour lesquels $1 \leqslant u \leqslant 1000$ et $1 \leqslant v \leqslant 1000$.

| |
|---|
| `f(x):=sqrt(2*x^2+1)` |
| $x \;\text{->}\; \sqrt{2*x^2+1}$ |
| `deriver(f)` |
| $x \;\text{->}\; \dfrac{2*x}{\sqrt{2*x^2+1}}$ |
| `g(x):=(x+1)/(x-1)` |
| $x \;\text{->}\; \dfrac{x+1}{x-1}$ |
| `deriver(g)` |
| $x \;\text{->}\; -\dfrac{2}{(x-1)^2}$ |

FIGURE 4

3. Analyse des solutions éventuelles de l'équation $(\mathscr{E})$
   On suppose que le couple $(u, v)$ est une solution de l'équation $(\mathscr{E})$.
   *a)* Établir que $u < v$.
   *b)* Démontrer que $n$ et $n^2$ ont la même parité pour tout entier naturel $n$.
   *c)* Démontrer que $v$ est un nombre impair.
   *d)* Établir que $2u^2 = (v-1)(v+1)$. En déduire que $u$ est un nombre pair.
4. Une famille de solutions
   On assimile un couple de nombres entiers $(u, v)$ à la matrice colonne $X = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$.
   On définit également la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.
   *a)* Démontrer que si une matrice colonne $X$ est une solution de l'équation $(\mathscr{E})$, alors $AX$ est aussi une solution $(\mathscr{E})$.

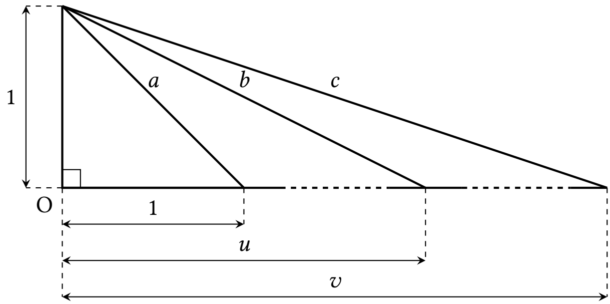



Figure 5

```
Pour u allant de 1 à ....... faire
    Pour ..............
        Si ..............
            Afficher u et v
        Fin Si
    Fin Pour
Fin Pour
```

(a)

Au cours de son exécution, l'algorithme affiche :

| | |
|---|---|
| 2 | 3 |
| 12 | 17 |
| 70 | 99 |
| 408 | 577 |

(b)

Figure 6

*b)* Démontrer que si une matrice colonne X est une solution de l'équation ($\mathscr{E}$), alors pour tout entier naturel $n$, $\mathrm{A}^n\mathrm{X}$ est aussi une solution de l'équation ($\mathscr{E}$).

*c)* À l'aide de la calculatrice, donner un couple $(u, v)$ solution de l'équation ($\mathscr{E}$) tel que $v > 10000$.

## Exercice 1

*Commun à tous les candidats*

1. *a)* On a $f_p(0) = 100$ étant donné que $\mathrm{e}^0 = 1$.

   *b)* Soit $t \geqslant 0$ un réel. On a
$$-pt \leqslant 0.$$
   La fonction exponentielle est croissante et $\mathrm{e}^0 = 1$, donc
$$\mathrm{e}^{-pt} \leqslant 1.$$
   Appliquons la fonction affine $x \longmapsto 1-(1-p)x$. Elle est décroissante puisque $-(1-p) \leqslant 0$, donc
$$1-(1-p)\mathrm{e}^{-pt} \geqslant p.$$

   *c)* Les deux membres de l'inégalité ci-dessus sont strictement positif. Or sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$, la fonction $x \longmapsto 100p/x$ est décroissante et à valeurs strictement positives, donc en l'appliquant aux membres de l'inégalité précédente, nous obtenons l'encadrement demandé : pour tout réel $t \geqslant 0$, on a
$$0 < f_p(t) \leqslant 100.$$

2. *a)* Pour que cela soit plus agréable, écrivons la fonction $f_{0,9}$ sous la forme
$$f_{0,9}(t) = \frac{900}{10-\mathrm{e}^{-0,9t}}.$$
   Pour tout réel $t \geqslant 0$, on a
$$f'_{0,9}(t) = 900 \times \frac{-0,9\mathrm{e}^{-0,9t}}{(10-\mathrm{e}^{-0,9t})^2} = -\frac{810\mathrm{e}^{-0,9t}}{(10-\mathrm{e}^{-0,9t})^2} < 0,$$
   donc la fonction $f_{0,9}$ est strictement décroissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

   *Solution alternative.* Soient $t_0$ et $t_1$ deux réels tels que $0 \leqslant t_0 < t_1$. On a $-0,9t_0 > -0,9t_1$. La fonction exponentielle étant strictement croissante, il vient $\mathrm{e}^{-0,9t_0} > \mathrm{e}^{-0,9t_1}$. Appliquons la fonction affine $x \longmapsto 1-0,1x$ ;

elle est strictement décroissante, donc $1 - 0{,}1\mathrm{e}^{-0{,}9t_0} < 1 - 0{,}1\mathrm{e}^{-0{,}9t_1}$. Les membres de l'inégalité sont strictement positifs d'après la question 1.b, donc en leur appliquant la fonction strictement décroissante $x \longmapsto 90/x$, nous arrivons à $f_{0,9}(t_0) > f_{0,9}(t_1)$, ce qui montre que la fonction $f_{0,9}$ est strictement décroissante sur son ensemble de définition.

*b)* Comme

$$\lim_{t\longrightarrow+\infty} -0{,}9t = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\longrightarrow-\infty} \mathrm{e}^x = 0,$$

on a

$$\lim_{t\longrightarrow+\infty} \mathrm{e}^{-0{,}9t} = 0,$$

d'où

$$\lim_{t\longrightarrow+\infty} f_{0,9}(t) = 90.$$

Or la fonction $f_{0,9}$ est décroissante sur son ensemble de définition, donc pour tout réel $t \geqslant 0$, on a

$$f_{0,9}(t) \geqslant 90.$$

*Solution alternative.* Soit $t \geqslant 0$ un réel. D'après la question 1.b, on a $1 - 0{,}1\mathrm{e}^{-0{,}9t} \geqslant 0{,}9$, de plus $\mathrm{e}^{-0{,}9t} > 0$, d'où l'encadrement

$$0 < 1 - 0{,}1\mathrm{e}^{-0{,}9t} < 1.$$

Appliquons-lui la fonction $x \longmapsto 90/x$ décroissante sur $]0\,;1]$ ; il vient

$$f_{0,9}(t) \geqslant 90.$$

*c)* Les résultats des questions 2.a et 2.b signifient que la masse de la population de crevettes décroit avec le temps, mais restera supérieure à 90 tonnes.

3. Puisque $p > 0$, on a

$$\lim_{t\longrightarrow+\infty} -pt = -\infty,$$

or

$$\lim_{x\longrightarrow-\infty} \mathrm{e}^x = 0,$$

donc

$$\lim_{t\longrightarrow+\infty} \mathrm{e}^{-pt} = 0,$$

puis

$$\lim_{t\longrightarrow+\infty} f_p(t) = 100p.$$

4. *a)* Pour tout réel $t \geqslant 0$, on a

$$f_{1/2}(t) = \frac{50}{1 - \frac{1}{2}e^{-t/2}} = \frac{100}{2 - e^{-t/2}}.$$

et

$$H'(t) = 100 \times \frac{\frac{1}{2}e^{-t/2}}{2 - e^{-t/2}} + 50 = \frac{50e^{-t/2} + 50(2 - e^{-t/2})}{2 - e^{-t/2}} = \frac{100}{2 - e^{-t/2}} = f_{1/2}(t),$$

ce qui prouve que H est une primitive de la fonction $f_{1/2}$ sur $[0\,;+\infty[$.

*b)* La valeur moyenne de la fonction $f_{1/2}$ sur l'intervalle $[0\,;5]$ est égale à

$$\frac{1}{5}\int_0^5 f_{1/2}\,dx = \frac{1}{5}\big(H(5) - H(0)\big)$$

où $H(5) = 100\ln(2 - e^{-5/2}) + 250$ et $H(0) = 0$ car $\ln 1 = 0$, donc

$$\frac{1}{5}\int_0^5 f_{1/2}(t)\,dt = 20\ln(2 - e^{-5/2}) + 50 \approx 63.$$

La masse moyenne des crevettes lors des cinq premières semaines d'exploitation est d'environ 63 tonnes.

## Exercice 2

*Commun à tous les candidats*

### Partie A

1. Réponse C.

*Explication.* Définissons les événements suivants :

— M : « l'individu est malade » ;

— P : « le test est positif ».

L'arbre de probabilité de la figure 7 page suivante décrit la situation. La probabilité pour qu'un individu dont le test est positif soit malade est

$$\mathbb{P}_P(M) = \frac{\mathbb{P}(M)\mathbb{P}_M(P)}{\mathbb{P}(P)} = \frac{0{,}15 \times 0{,}94}{0{,}158} \approx 0{,}89.$$

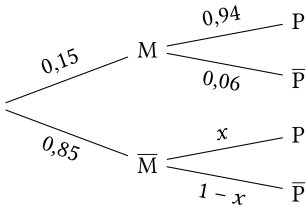



FIGURE 7

2. Réponse B.

   *Explication.* Soient A l'événement « au moins un test est positif » et $n$ la taille de l'échantillon. On a $\mathbb{P}(\mathrm{A}) = 1 - \mathbb{P}(\overline{\mathrm{A}})$ où $\overline{\mathrm{A}}$ est l'événement « tous les tests sont négatifs ». La probabilité qu'un test soit négatif vaut $1 - 0{,}158 = 0{,}842$ et les tests sont supposés indépendants, par conséquent, $\mathbb{P}(\mathrm{A}) = 1 - 0{,}842^n$. On souhaite que $\mathbb{P}(\mathrm{A}) \geqslant 0{,}99$, c'est-à-dire $0{,}842^n \leqslant 0{,}01$. En prenant le logarithme et en n'oubliant pas que $\ln 0{,}842^n = n \ln 0{,}842$ et que $\ln 0{,}842 < 0$ car $0{,}842 < 1$, on a arrive à $n \geqslant \ln(0{,}01)/\ln(0{,}842) \approx 26{,}8$, d'où la conclusion.

3. Réponse C ou D.

   *Explication.* Supposons que $0{,}997 = \mathbb{P}(2 - 3\sigma \leqslant \mathrm{V} \leqslant 2 + 3\sigma)$, on a alors $\mathbb{P}(2 - 3\sigma \leqslant \mathrm{V} \leqslant 2 + 3\sigma) = \mathbb{P}(2 - 0{,}01 \leqslant \mathrm{V} \leqslant 2 + 0{,}01)$. Comme les deux intervalles sont centrés sur la moyenne, on doit avoir $3\sigma = 0{,}01$, d'où $\sigma = 0{,}01/3 \approx 0{,}003$. Du point de vue d'un chercheur travaillant dans une entreprise pharmaceutique, la réponse D est sans doute correct. Néanmoins, un calcul précis (voir la question B.1 de l'exercice 1 du sujet de la Polynésie) donne $\sigma = 0{,}003369\ldots$, donc en tout rigueur, la bonne réponse est C.

## PARTIE B

1. Notons X la variable aléatoire représentant la durée d'efficacité, exprimée en mois, du médicament. Puisque la variable aléatoire $\mathrm{X} - 12$ suit une loi

exponentielle de paramètre λ, on a

$$\mathbb{P}(X \geqslant 18) = \mathbb{P}(X - 12 \geqslant 6) = 1 - \mathbb{P}(X - 12 \leqslant 6)$$
$$= 1 - \int_0^6 \lambda e^{-\lambda t}\, dt = 1 - \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^6 = e^{-6\lambda}.$$

Or $\mathbb{P}(X \geqslant 18) = 0{,}887$, donc $e^{-6\lambda} = 0{,}887$. Il suffit d'appliquer le logarithme, $-6\lambda = \ln 0{,}887$, pour obtenir $\lambda = -\frac{1}{6}\ln 0{,}887$. Ainsi, l'espérance de la variable aléatoire $X - 12$ est égale à $1/\lambda = -6/\ln 0{,}887$. La relation $\mathbb{E}(X - 12) = \mathbb{E}(X) - 12$ permet de conclure que la durée moyenne d'efficacité du médicament est égale à

$$\mathbb{E}(X) = 12 - \frac{6}{\ln 0{,}887},$$

soit 62 mois environ.

2. Le nombre de malades Y est une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètre $n = 100\,000$ et $p = 0{,}15$. Soit N le nombre de boites du stock. Sachant qu'il faut prévoir une boîte par malade, on nous demande de trouver le plus petit entier positif N tel que

$$\mathbb{P}(Y \leqslant N) \geqslant 0{,}95.$$

La calculatrice donne $N = 15\,186$. Il faut donc prévoir un stock d'au moins 15 186 boîtes pour que la probabilité de soigner tous les malades soit supérieure à 95 %.

## Exercice 3

*Commun à tous les candidats*

1. Le repère étant orthonormé, on a

$$AB^2 = (3 - (-3))^2 = 36 \quad \text{et} \quad AD^2 = 3^2 + (\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{6})^2 = 36,$$

donc

$$AB = 6 \quad \text{et} \quad AD = 6.$$

2. *a)* Le point I étant le milieu du segment [BC], ses coordonnées sont $\left(\frac{3+0}{2}\,;\frac{0+3\sqrt{3}}{2}\,;\frac{0+0}{2}\right)$, soit $\left(\frac{3}{2}\,;\frac{3}{2}\sqrt{3}\,;0\right)$. De même, les coordonnées du point H sont $(0\,;2\sqrt{3}\,;\sqrt{6})$. Ce sont aussi les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$, donc une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ est $2\sqrt{3}y+\sqrt{6}z+d=0$ où $d$ est un nombre réel. Les coordonnées du point I vérifient cette équation avec $d=-9$, donc $2\sqrt{3}y+\sqrt{6}z-9=0$ est bien une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$.

   *b)* Les coordonnées du point J sont $\left(\frac{3}{2}\,;\frac{1}{2}\sqrt{3}\,;\sqrt{6}\right)$. Elles vérifient l'équation du plan $\mathscr{P}$, donc le point J appartient à l'intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la droite (BD). Comme les coordonnées du point B ne vérifient pas l'équation du plan $\mathscr{P}$, l'intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la droite (BD) est réduite au point J.

   *c)* Une représentation paramétrique de la droite passant par le point A et de vecteur directeur $\overrightarrow{\mathrm{AD}}(3\,;\sqrt{3}\,;2\sqrt{6})$ est

$$\begin{cases} x=-3+3t \\ y=\sqrt{3}t \\ z=2\sqrt{6}t \end{cases} \qquad (t\in\mathbb{R}).$$

   Les coordonnées du point d'intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la droite (AD) sont de la forme $(-3+3t\,;\sqrt{3}t\,;2\sqrt{6}t)$ où $t$ est solution de l'équation

$$2\sqrt{3}\times\sqrt{3}t+\sqrt{6}\times 2\sqrt{6}t-9=0,$$

   soit $18t-9=0$, d'où $t=\frac{1}{2}$. Ainsi, le plan $\mathscr{P}$ et la droite (AD) sont bien sécants ; leur point d'intersection K a pour coordonnées $\left(-\frac{3}{2}\,;\frac{1}{2}\sqrt{3}\,;\sqrt{6}\right)$.

   *d)* Le repère étant orthonormé, le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{IJ}}(0\,;-\sqrt{3}\,;\sqrt{6})$ et $\overrightarrow{\mathrm{JK}}(-3\,;0\,;0)$ sont

$$\overrightarrow{\mathrm{IJ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{JK}}=0\times(-3)+(-\sqrt{3})\times 0+\sqrt{6}\times 0=0,$$

   donc les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{IJ}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{JK}}$ sont orthonormaux. Les droites (IJ) et (JK) étant sécantes, nous en déduisons qu'elles sont perpendiculaires.

   *e)* L'intersection du plan $\mathscr{P}$ et du plan (ABC) est une droite passant par le point I.

## Exercice 4

*Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité*

1. Si OC = OA × OB, alors $|z_C|^2 = |z_A|^2 \times |z_B|^2$, c'est-à-dire $y^2 + 1 = 2(x^2+1)$, d'où
$$y^2 = 2x^2 + 1.$$

2. Voir la figure 8.

```
Pour x allant de 1 à 10
    Pour y allant de 1 à 10
        Si y² = 2x² + 1
            Afficher x et y
        Fin Si
    Fin Pour
Fin Pour
```

FIGURE 8

3. *a)* Le module de $z_A$ est égal à $\sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$. Soit $\theta$ un argument de $z_A$. On doit avoir $1 + i = \sqrt{2}(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$, d'où
$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2},$$
donc $\theta \equiv \frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}$.

   *b)* On sait déjà que $\mathrm{OA} = \sqrt{2}$. On trouve $\mathrm{OB} = |z_B| = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$ et $\mathrm{OC} = |z_C| = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10}$, donc $\mathrm{OA} \times \mathrm{OB} = \sqrt{10} = \mathrm{OC}$.

   *c)* On a $z_B z_C = (2+\mathrm{i})(3+\mathrm{i}) = 6 + 2\mathrm{i} + 3\mathrm{i} + \mathrm{i}^2 = 5 + 5\mathrm{i} = 5z_A$, donc
$$\begin{aligned}\arg z_B + \arg z_C &\equiv \arg z_B z_C \pmod{2\pi}\\ &\equiv \arg 5z_A \pmod{2\pi}\\ &\equiv \arg z_A \pmod{2\pi}\end{aligned}$$
c'est-à-dire
$$(\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}) + (\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{OC}}) \equiv (\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{OA}}) \pmod{2\pi}$$

4. *a)* On a

$$\begin{aligned}(\vec{u},\overrightarrow{\mathrm{OB}})+(\vec{u},\overrightarrow{\mathrm{OC}}) &\equiv \arg z_{\mathrm{B}}+\arg z_{\mathrm{C}} \equiv \arg(x+\mathrm{i})+\arg(y+\mathrm{i}) \pmod{2\pi}\\ &\equiv \arg\big((x+\mathrm{i})(y+\mathrm{i})\big) \pmod{2\pi}\end{aligned}$$

et

$$(\vec{u},\overrightarrow{\mathrm{OA}}) = \arg z_{\mathrm{A}} = \arg(1+\mathrm{i}),$$

donc si $(\vec{u},\overrightarrow{\mathrm{OB}})+(\vec{u},\overrightarrow{\mathrm{OC}}) \equiv (\vec{u},\overrightarrow{\mathrm{OA}}) \pmod{2\pi}$, alors

$$\begin{aligned}\arg\big((x+\mathrm{i})(y+\mathrm{i})\big) &\equiv \arg(1+\mathrm{i}) \pmod{2\pi}\\ \arg\big((x+\mathrm{i})(y+\mathrm{i})\big)-\arg(1+\mathrm{i}) &\equiv 0 \pmod{2\pi}\\ \arg\left(\frac{(x+\mathrm{i})(y+\mathrm{i})}{1+\mathrm{i}}\right) &\equiv 0 \pmod{2\pi}.\end{aligned}$$

Nous en déduisons que

$$\mathrm{Im}\left(\frac{(x+\mathrm{i})(y+\mathrm{i})}{1+\mathrm{i}}\right) = 0.$$

Or

$$\frac{(x+\mathrm{i})(y+\mathrm{i})}{1+\mathrm{i}} = \frac{(x+\mathrm{i})(y+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})} = \frac{x+y+xy-1+\mathrm{i}(x+y-xy+1)}{2},$$

donc

$$x+y-xy+1 = 0.$$

*b)* Si $y^2 = 2x^2+1$, alors $|y| = \sqrt{2x^2+1}$. Comme $y > 0$, on en déduit que

$$y = \sqrt{2x^2+1}.$$

Si $x+y-xy+1 = 0$, alors $x+1 = y(x-1)$. Comme $x-1 \geqslant 0$, on en déduit que

$$y = \frac{x+1}{x-1}.$$

5. *Cas* $x = 1$. Si $x = 1$, alors la condition $x + y - xy + 1 = 0$ démontrée à la question 4.a s'écrit $2 = 0$. Il n'y a donc pas solution $(x, y)$ telle que $x = 1$.
*Cas* $x > 1$. D'après la question 4.a, toute solution $(x, y)$ avec $x > 1$ est un point d'intersection des courbes représentatives des fonctions $f$ et $g$. Il nous faut donc résoudre l'équation

$$f(x) = g(x).$$

Pour cela, considérons la fonction $h$ définie sur $[1\,;+\infty[$ par $h(x) = f(x) - g(x)$. Cette fonction est dérivable et pour tout réel $x > 1$, on a

$$h'(x) = f'(x) - g'(x)$$

avec

$$f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{2x^2+1}} > 0 \quad \text{et} \quad g'(x) = -\frac{2}{(x-1)^2} < 0,$$

si bien que $h' > 0$ sur $[1\,;+\infty[$. Par conséquent, la fonction $h$ est strictement croissante sur son ensemble de définition. Examinons les limites de la fonction $h$ aux bornes de son ensemble de définition :

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \sqrt{3} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad \text{car} \quad \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} 2x^2 + 1 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty, \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1^+} g(x) = +\infty \quad \text{car} \quad \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^+} x + 1 = 2 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} x - 1 = 0 \\ x - 1 > 0 \quad \text{si } x > 1, \end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 1 \quad \text{car} \quad \begin{cases} f(x) = 1 - \dfrac{2}{x-1} \quad \text{si } x > 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x-1} = 0. \end{cases}$$

D'où les limites de la fonction $h$ :

$$\lim_{x\to 1^+} h(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty.$$

La fonction $h$ est continue sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$, strictement monotone et a des limites de signes opposés à ses bornes, donc d'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = g(x)$ admet une unique solution sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$. Cela signifie que le problème initial a au plus une solution. L'algorithme ayant permis d'en trouver une, nous concluons que le problème a exactement une solution.

## Exercice 4

*Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité*

1. Les entiers $a$, $b$ et $c$ étant positifs, les égalités $ab = c$ et $a^2b^2 = c^2$ sont équivalentes. Or d'après le théorème de Pythagore, nous avons $a^2 = 2$, $b^2 = u^2 + 1$ et $c^2 = v^2 + 1$. Il s'ensuit que $ab = c$ si et seulement si $2(u^2 + 1) = v^2 + 1$, soit
$$v^2 - 2u^2 = 1.$$
Les solutions du problème sont donc bien les solutions $(u, v)$ de l'équation $(\mathscr{E})$.
2. Une recherche exhaustive donne l'algorithme de la figure 9.

```
Pour u allant de 1 à 1000 faire
    Pour v allant de 1 à 1000 faire
        Si v² − 2u² = 1 alors
            Afficher u et v
        Fin Si
    Fin Pour
Fin Pour
```

FIGURE 9

3. *a)* Soit $(u, v)$ une solution de $(\mathscr{E})$. De $u^2 < 2u^2 = v^2 - 1 < v^2$, nous déduisons que $u < v$ car $u$ et $v$ sont positifs.

   *b)* Soit $n$ un entier. Il peut s'écrire sous la forme $n = 2k + r$ où $r = 0$ si $n$ est pair et $r = 1$ si $n$ est impair. On a alors $n^2 = 4k^2 + 4kr + r^2 = 2(2k^2 + 2kr) + r$ puisque $r = r^2$ ; en effet $0^2 = 0$ et $1^2 = 1$. Nous en déduisons que $n$ et $n^2$ ont la même parité.

*c)* Puisque $v^2 = 2u^2 + 1$, l'entier $v^2$ est impair, donc $v$ est impair d'après la question précédente.

*d)* On a $2u^2 = v^2 - 1 = (v-1)(v+1)$. Comme $v$ est impair, les entiers $v - 1$ et $v + 1$ sont pairs, ainsi $2u^2$ est un multiple de 4, donc $u^2$ est un multiple de 2. D'après la question 3.b., $u$ est alors un nombre pair.

4. *a)* Soit $(u, v)$ une solution de $(\mathscr{E})$. On a

$$\mathrm{AX} = \begin{pmatrix} 3u + 2v \\ 4u + 3v \end{pmatrix}.$$

Or

$$\begin{aligned}(4u+3v)^2 - 2(3u+2v)^2 &= 16u^2 + 24uv + 9v^2 - 18u^2 - 24uv - 8v^2 \\ &= v^2 - 2u^2 \\ &= 1,\end{aligned}$$

donc le couple $(3u + 2v, 4u + 3v)$ est une solution de l'équation $(\mathscr{E})$. Autrement dit, si X est une solution de l'équation $(\mathscr{E})$, alors AX est une solution de l'équation $(\mathscr{E})$.

*b)* Soit X une solution de l'équation $(\mathscr{E})$. Démontrons par récurrence que $\mathrm{A}^n\mathrm{X}$ est une solution de l'équation $(\mathscr{E})$ pour tout entier $n \geqslant 0$.
*Initialisation.* Pour $n = 0$, $\mathrm{A}^n\mathrm{X}$ est solution ; en effet, $\mathrm{A}^0\mathrm{X} = \mathrm{X}$.
*Hérédité.* Supposons que $\mathrm{A}^k\mathrm{X}$ est une solution pour un entier $k$. Alors d'après la question 4.a, $\mathrm{A}^{k+1}\mathrm{X} = \mathrm{A}(\mathrm{A}^k\mathrm{X})$ est également une solution.
*Conclusion.* D'après le principe de récurrence, pour tout entier $n \geqslant 0$, $\mathrm{A}^n\mathrm{X}$ est une solution de l'équation $(\mathscr{E})$.

*c)* Nous savons que $\mathrm{X} = \binom{408}{577}$ est une solution (question 2). Pour trouver une solution $(u, v)$ telle que $v > 10000$, il suffit, d'après la question précédente, de calculer AX, $\mathrm{A}^2\mathrm{X}$, $\mathrm{A}^3\mathrm{X}$, … On trouve

$$\mathrm{AX} = \begin{pmatrix} 2378 \\ 3363 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{AX}^2 = \begin{pmatrix} 13860 \\ 19601 \end{pmatrix}, \quad \ldots$$

Le couple $(13860, 19601)$ répond à la question.

CORRIGÉ

**Sujet 4**

# *Centres étrangers*

11 juin 2018

**Exercice 1** (4 points)
*Commun à tous les candidats*

Dans une usine, on se propose de tester un prototype d'hotte aspirante pour un local industriel. Avant de lancer la fabrication en série, on réalise l'expérience suivante : dans un local clos équipé du prototype de hotte aspirante, on diffuse du dioxyde de carbone ($CO_2$) à débit constant. Dans ce qui suit, $t$ est le temps exprimé en minute.

À l'instant $t = 0$, la hotte est mise en marche et on la laisse fonctionner pendant 20 min. Les mesures réalisées permettent de modéliser le taux (en pourcentage) de $CO_2$ contenu dans le local au bout de $t$ minutes de fonctionnement de la hotte par l'expression $f(t)$, où $f$ est la fonction définie pour tout réel $t$ de l'intervalle $[0\,;20]$ par

$$f(t) = (0{,}8t + 0{,}2)\mathrm{e}^{-0{,}5t} + 0{,}03.$$

On donne (figue 1 page suivante) le tableau de variation de la fonction $f$ sur l'intervalle $[0\,;20]$. Ainsi, la valeur $f(0) = 0{,}23$ traduit le fait que le taux de $CO_2$ à l'instant 0 est égal à 23 %.

1. Dans cette question, on arrondira les deux résultats au millième.
   *a)* Calculer $f(20)$.
   *b)* Déterminer le taux maximal de $CO_2$ présent dans le local pendant l'expérience.
2. On souhaite que le taux de $CO_2$ dans le local retrouve une valeur V inférieure ou égale à 3,5 %.
   *a)* Justifier qu'il existe un unique instant T satisfaisant cette condition.

| $t$ | $0$ | | $1{,}75$ | | $20$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f$ | $0{,}23$ | $\nearrow$ | | $\searrow$ | |

FIGURE 1

```
t ← 1,75
p ← 0,1
V ← 0,7
Tant que V > 0035
    t ← t + p
    V ← (0,8t + 0,2)e^(−0,5t) + 0,03
Fin Tant que
```

FIGURE 2

*b)* On considère l'algorithme de la figure 2.

Quelle est la valeur de la variable $t$ à la fin de l'algorithme ? Que représente cette valeur dans le contexte de l'exercice ?

3. On désigne par $V_m$ le taux moyen (en pourcentage) de $CO_2$ présent dans le local pendant les 11 premières minutes de fonctionnement de la hotte aspirante.

*a)* Soit F la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;11]$ par

$$F(t) = (-1{,}6t - 3{,}6)e^{-0{,}5t} + 0{,}03t.$$

Montrer que la fonction F est une primitive de la fonction $f$ sur l'intervalle $[0\,;11]$.

*b)* En déduire le taux moyen $V_m$, valeur moyenne de la fonction $f$ sur l'intervalle $[0\,;11]$. Arrondir le résultat au millième, soit à 0,1 %.

**Exercice 2** (4 points)
*Commun à tous les candidats*

Pour chacun des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse inexacte ou non justifiée ne rapporte et n'enlève aucun point.

1. Un type d'oscilloscope a une durée de vie, exprimée en année, qui peut être modélisée par une variable aléatoire D qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda$. On sait que la durée de vie moyenne de ce type d'oscilloscope est de 8 ans.

   **Affirmation 1 :** pour un oscilloscope de ce type choisi au hasard et ayant déjà fonctionné 3 ans, la probablité que la durée de vie soit supérieure ou égale à 10 ans, arrondie au centième, est égale à 0,42.

   *On rappelle que si* X *est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre* $\lambda$, *on a pour tout réel t positif,* $\mathbb{P}(X \leqslant t) = 1 - e^{-\lambda t}$.

2. En 2016, en France, les forces de l'ordre ont réalisé 9,8 millions de dépistages d'alcoolémie auprès des automobiles, et 3,1 % de ces dépistages étaient positifs. *Source : OFDT (Observatoire Français des Drogues et des Toxicomanies)..*

   Dans une région donnée, le 15 juin 2016, une brigade de gendarmerie a effectué un dépistage sur 200 automobilistes.

   **Affirmation 2 :** en arrondissant au centième, la probabilité que, sur les 200 dépistages, il y ait eu strictement plus de 5 dépistages positifs, est égale à 0,59.

3. On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation $\ln(6x - 2) + \ln(2x - 1) = \ln(x)$.

   **Affirmation 3 :** l'équation admet deux solutions dans l'intervalle $\left]\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$.

4. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(4z^2 - 20z + 37)(2z - 7 + 2\text{i}) = 0$.

   **Affirmation 4 :** les solutions de l'équation sont les affixes de points appartenant à un même cercle de centre le point P d'affixe 2.

**Exercice 3** (7 points)
*Commun à tous les candidats*

*Les parties A et B sont indépendantes.*

Un détaillant en fruits et légumes étudie l'évolution de ses ventes de melons afin de pouvoir anticiper ses commandes.

## Partie A

Le détaillant constate que ses melons se vendent bien lorsque leur masse est comprise entre 900 g et 1200 g. Dans la suite, de tels melons seront qualifiés « conformes ».

Le détaillant achète ses melons auprès de trois maraîchers, notés respectivement A, B et C. Pour les melons du maraîcher A, on modélise la masse en gramme par une variable aléatoire $\text{M}_\text{A}$ qui suit une loi uniforme sur l'intervalle $[850 ; x]$, où $x$ est un nombre réel supérieur à 1200. La masse en gramme des melons du maraîcher B est modélisée par une variable aléatoire $\text{M}_\text{B}$ qui suit une loi normale de moyenne 1050 et d'écart-type inconnu $\sigma$. Le maraîcher C affirme, quant à lui, que 80 % des melons de sa production sont conformes.

1. Le détaillant constante que 75 % des melons du maraîcher A sont conformes. Déterminer $x$.

2. Il constate que 85 % des melons fournis par le maraîcher B sont conformes. Déterminer l'écart-type $\sigma$ de la variable aléatoire $\text{M}_\text{B}$. En donner la valeur arrondie à l'unité.

3. Le détaillant doute de l'affirmation du maraîcher C. Il constate que sur 400 melons livrés par ce maraîcher au cours d'une semaine, seulement 294 sont conformes. Le détaillant a-t-il raison de douter de l'affirmation du maraîcher C ?

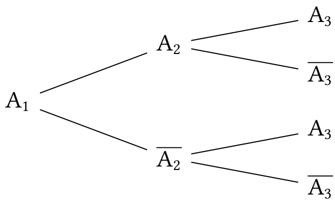



FIGURE 3

## PARTIE B

Le détaillant réalise une étude sur ses clients. Il constate que :

— parmi les clients qui achètent un melon une semaine donnée, 90 % d'entre eux achètent un melon la semaine suivante ;

— parmi les clients qui n'achètent pas de melon une semaine donnée, 60 % d'entre eux n'achètent pas de melon la semaine suivante.

On choisit au hasard un client ayant acheté un melon au cours de la semaine 1 et, pour $n \geqslant 1$, on note $A_n$ l'événement « le client achète un melon au cours de la semaine $n$ ». On a ainsi $\mathbb{P}(A_1) = 1$.

1. *a)* Reproduire et compléter l'arbre de probabilités de la figure 3, relatif aux trois premières semaines.

   *b)* Démontrer que $\mathbb{P}(A_3) = 0{,}85$.

   *c)* Sachant que le client achète un melon au cours de la semaine 3, qu'elle ait la probabilité qu'il en ait acheté un au cours de la semaine 2 ? Arrondir au centième.

Dans la suite, on pose pour tout entier $n \geqslant 1$, $p_n = \mathbb{P}(A_n)$. On a ainsi $p_1 = 1$.

2. Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $p_{n+1} = 0{,}5p_n + 0{,}4$.

3. *a)* Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $p_n > 0{,}8$.

   *b)* Démontrer que la suite $(p_n)$ est décroissante.

   *c)* La suite $(p_n)$ est-elle convergente ?

4. On pose pour tout entier $n \geqslant 1$, $v_n = p_n - 0{,}8$.

   *a)* Démontrer que $(v_n)$ est une suite géométrique dont on donnera le premier terme $v_1$ et la raison.

   *b)* Exprimer $v_n$ en fonction de $n$. En déduire que, pour tout $n \geqslant 1$,

   $$p_n = 0{,}8 + 0{,}2 \times 0{,}5^{n-1}.$$

   *c)* Déterminer la limite de la suite $(p_n)$.

**Exercice 4** (5 points)

*Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité*

La figure 4 représente un cube ABCDEFGH.

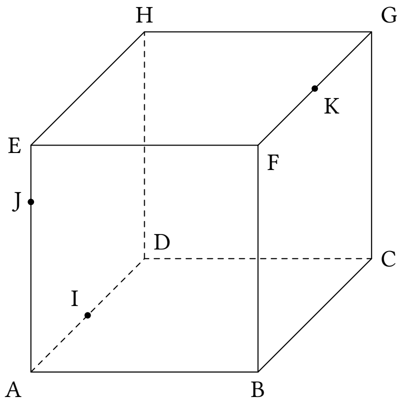



FIGURE 4

Les trois points I, J, K sont définis par les conditions suivantes :

— I est le milieu du segment [AD] ;

— J est tel que $\overrightarrow{AJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AE}$ ;

— K est le milieu du segment [FG].

### Partie A

1. Construire sans justifier le point d'intersection P du plan (IJK) et de la droite (EH). On laissera les traits de construction sur la figure.
2. En déduire, en justifiant, l'intersection du plan (IJK) et du plan (EFG).

### Partie B

On se place désormais dans le repère orthonormé $(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

1. *a)* Donner sans justification les coordonnées des points I, J et K.

   *b)* Déterminer les réels $a$ et $b$ tels que le vecteur $\vec{n}(4\,;a\,;b)$ soit orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$.

   *c)* En déduire qu'une équation cartésienne du plan (IJK) est

$$4x - 6y - 4z + 3 = 0.$$

2. *a)* Donner une représentation paramétrique de la droite (CG).

   *b)* Calculer les coordonnées du point N, intersection du plan (IJK) et de la droite (CG).

   *c)* Placer le point N sur la figure et construire en couleur la section du cube par le plan (IJK).

### Partie C

On note R le projeté orthogonal du point F sur le plan (IJK). Le point R est donc l'unique point du plan (IJK) tel que la droite (FR) est orthogonale au plan (IJK).
On définit l'intérieur du cube comme l'ensemble des points $M(x\,;y\,;z)$ tels que

$$\begin{cases} 0 < x < 1 \\ 0 < y < 1 \\ 0 < z < 1. \end{cases}$$

Le point R est-il à l'intérieur du cube ?

**Exercice 4** (5 points)

*Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité*

Le but de cet exercice est d'envisager une méthode de cryptage à clé publique d'une information numérique, appelée système RSA, en l'honneur des mathématiciens Ronald Rivest, Adi Shamir et Leonard Adleman, qui ont inventé cette méthode de cryptage en 1977 et l'ont publiée en 1978.

Les questions 1 et 2 sont des questions préparatoires, la question 3 aborde le cryptage, la question 4 le décryptage.

1. Cette question envisage de calculer le reste dans la division euclidienne par 55 de certaines puissances de l'entier 8.
   *a)* Vérifier que $8^7 \equiv 2 \pmod{55}$. En déduire le reste dans la division euclidienne par 55 du nombre $8^{21}$.
   *b)* Vérifier que $8^2 \equiv 9 \pmod{55}$, puis déduire de la question a) le reste dans la division euclidienne par 55 de $8^{23}$.
2. Dans cette question, on considère l'équation
$$23x - 40y = 1, \qquad (\mathscr{E})$$
   dont les solutions sont des couples $(x, y)$ d'entiers relatifs.
   *a)* Justifier le fait que l'équation $(\mathscr{E})$ admet au moins un couple solution.
   *b)* Donner un couple, solution particulière de l'équation $(\mathscr{E})$.
   *c)* Déterminer tous les couples d'entiers relatifs solution de l'équation $(\mathscr{E})$.
   *d)* En déduire qu'il existe un unique entier $d$ vérifiant les conditions $0 \leqslant d < 40$ et $23d \equiv 1 \pmod{40}$.
3. Cryptage dans le système RSA
   Une personne A choisit deux nombres premiers $p$ et $q$, puis calcule les produits $\mathrm{N} = pq$ et $n = (p-1)(q-1)$. Elle choisit également un entier naturel $c$ premier avec $n$. La personne A publie le couple $(\mathrm{N}, c)$, qui est une clé publique permettant à quiconque de lui envoyer un nombre crypté.
   Les messages sont numérisés et transformés en une suite d'entiers compris entre 0 et $\mathrm{N} - 1$. Pour crypter un entier $a$ de cette suite, on procède ainsi : on

calcule le reste $b$ dans la division euclienne par N du nombre $a^c$, et le nombre crypté est l'entier $b$.

Dans la pratique, cette méthode est sûre si la personne A choisit des nombres premiers $p$ et $q$ très grands, s'écrivant avec plusieurs dizaines de chiffres. On va l'envisager ici avec des nombres plus simples : $p = 5$ et $q = 11$. La personne A choisit également $c = 23$.

*a)* Calculer les nombres N et $n$, puis justifier que la valeur de $c$ vérifie la condition voulue.

*b)* Un émetteur souhaite envoyer à la personne A le nombre $a = 8$. Déterminer la valeur du nombre crypté $b$.

4. Décryptage dans le système RSA

La personne A calcule dans un premier temps l'unique entier naturelle $d$ vérifiant les conditions $0 \leqslant d < n$ et $cd \equiv 1 \pmod{n}$. Elle garde secret ce nombre $d$ qui lui permet, et à elle seule, de décrypter les nombres qui lui ont été envoyés cryptés avec sa clé publique.

Pour décrypter un nombre crypté $b$, la personne A calcule le reste $a$ dans la division euclidienne par N du nombre $b^d$, et le nombre en clair – c'est-à-dire le nombre avant cryptage – est le nombre $a$.

On admet l'existence et l'unicité de l'entier $d$, et le fait que le décryptage fonctionne. Les nombres choisis par A sont encore $p = 5$, $q = 11$ et $c = 23$.

*a)* Quelle est la valeur de $d$ ?

*b)* En appliquant la règle de décryptage, retrouver le nombre en clair lorsque le nombre crypté est $b = 17$.

## Exercice 1

*Commun à tous les candidats*

1. *a)* $f(20) = 16{,}2\mathrm{e}^{-10} + 0{,}03 \approx 0{,}031$.

   *b)* D'après le tableau de variation de la fonction $f$, le taux maximal de $\mathrm{CO_2}$ dans le local est égal à $f(1{,}75) = 1{,}6\mathrm{e}^{-0.875} + 0{,}03 = 0{,}697$, soit 69,7 %.

2. *a)* On a $f(0) > 0{,}035$ et $f$ est croissante sur l'intervalle $[0\,;1{,}75]$, donc $f(t) > 0{,}035$ sur l'intervalle $[0\,;1{,}75]$.

   La fonction $f$ est continue et strictement monotone sur l'intervalle $[1{,}75\,;20]$, $f(1{,}75) \geqslant 0{,}035$ et $f(20) \leqslant 0{,}035$, donc d'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(t) = 0{,}035$ admet une unique solution T sur l'intervalle $[1{,}75\,;20]$. La fonction $f$ étant strictement décroissante sur l'intervalle $[1,75\,;20]$, on a $f(t) > 0{,}035$ si $t \in [0\,;\mathrm{T}[$ et $f(t) \leqslant 0{,}035$ si $t \in [\mathrm{T}\,;20]$.

   *b)* L'algorithme calcule le taux de $\mathrm{CO_2}$ aux instants 1,75, 1,85, 1,95, … jusqu'à ce que celui-ci soit inférieur à 3,5 %. En construisant, à l'aide de la calculatrice, un tableau des valeurs de la fonction $f$, à partir de $t = 1{,}75$ et avec un pas de 0,1, on constate que $t = 15{,}75$ à la fin de l'algorithme. On en déduit que $15{,}65 < \mathrm{T} \leqslant 15{,}75$. Autrement dit 15,75 est une valeur approchée par excès à 0,1 près de l'instant T.

3. *a)* Pour tout réel $t \in [0\,;11]$, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{F}'(t) &= -1{,}6\mathrm{e}^{-0{,}5t} + (-1{,}6t - 3{,}6) \times (-0{,}5)\mathrm{e}^{-0{,}5t} + 0{,}03\\ &= (0{,}8t + 0{,}2)\mathrm{e}^{-0{,}5t} + 0{,}03\\ &= f(t),\end{aligned}$$

   donc F est bien une primitive de la fonction $f$ sur l'intervalle $[0\,;11]$.

   *b)* Le taux moyen $\mathrm{V}_m$ de la fonction $f$ sur l'intervalle $[0\,;11]$ est donnée par la formule

$$\mathrm{V}_m = \frac{1}{11}\int_0^{11} f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

   D'après la question précédente, on a

$$\mathrm{V}_m = \frac{1}{11}(\mathrm{F}(11) - \mathrm{F}(0)) = \frac{1}{11}(-57{,}2\mathrm{e}^{-5{,}5} + 0{,}33 + 3{,}6) = \frac{1}{11}(-21{,}2\mathrm{e}^{-5{,}5} + 3{,}93)$$

dont un arrondi au millième est $V_m \approx 0{,}349$.

## Exercice 2

*Commun à tous les candidats*

1. On sait que $\mathbb{E}(D) = 8$, or $\mathbb{E}(D) = 1/\lambda$, d'où $\lambda = 0{,}125$. La loi exponentielle est une loi sans mémoire, donc

$$\mathbb{P}_{\{D \geqslant 3\}}(D \geqslant 10) = \mathbb{P}(D \geqslant 7) = 1 - \mathbb{P}(D \leqslant 7) = e^{-0{,}125\times 7} = e^{0{,}875} = 0{,}416\ldots$$

ce qui prouve que l'affirmation est vraie.

2. En supposant que la proportion de dépistages positifs dans cette région soit le même que sur l'ensemble de la France et que les dépistages puissent être assimilés à un tirage avec remise, alors les dépistages sont indépendants les uns des autres et le nombre de résultats positifs obtenus lors des 200 dépistages peut-être modélisé par une variable aléatoire X suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(200\,;0{,}031)$. La calculatrice donne $\mathbb{P}(X \leqslant 5) = 0{,}411\ldots$, donc la probabilité pour qu'il y ait eu strictement plus de 5 dépistages positifs est égale à

$$\mathbb{P}(X > 5) = 1 - \mathbb{P}(X \leqslant 5) = 0{,}588\ldots$$

L'affirmation est vraie.

3. L'équation

$$\ln(6x-2) + \ln(2x-1) = \ln x \qquad (\mathscr{E})$$

est définie et seulement si

$$\begin{cases} 6x - 2 > 0 \\ 2x - 1 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \qquad \text{soit} \quad x > \frac{1}{2}.$$

Si $x > \frac{1}{2}$, alors

$$\begin{aligned} (\mathscr{E}) &\iff \ln((6x-2)(2x-1)) = \ln x \\ &\iff (6x-2)(2x-1) = x \\ &\iff 12x^2 - 11x + 2 = 0. \qquad (\mathscr{E}') \end{aligned}$$

L'équation du second degré ($\mathscr{E}'$) a pour déterminant $(-11)^2 - 4 \times 12 \times 2 = 25$. Il est strictement positif, donc l'équation ($\mathscr{E}'$) admet deux solutions :

$$\frac{-(-11) - \sqrt{25}}{2 \times 12} = \frac{1}{4} \leqslant \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \frac{-(-11) + \sqrt{25}}{2 \times 12} = \frac{2}{3} > \frac{1}{2}$$

L'équation ($\mathscr{E}$) a pour unique solution $\frac{2}{3}$, donc l'affirmation est fausse.

> *Remarque.* Ceux qui connaissent les relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme du second degré peuvent conclure ainsi. Supposons que l'équation ($\mathscr{E}$) possèdent deux solutions distinctes, notées $x'$ et $x''$. Les inégalités $x' > \frac{1}{2}$ et $x'' > \frac{1}{2}$, impliquent que $x + x' > 1$. Or l'une des deux relations entre les coefficients et les racines affirme que $x + x' = \frac{11}{24} < 1$. Cette contradiction prouve que l'affirmation est fausse.

4. Sur $\mathbb{C}$ l'équation

$$(4z^2 - 20z + 37)(2z - 7 + 2\mathrm{i}) = 0$$

est équivalente à

$$4z^2 - 20z + 37 = 0 \quad \text{ou} \quad 2z - 7 + 2\mathrm{i} = 0.$$

L'équation du second degré $4z^2 - 20z + 37 = 0$ a pour discriminant $(-20)^2 - 4 \times 4 \times 37 = -192$. Il est strictement négatif, donc elle admet deux racines complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-(-20) - \mathrm{i}\sqrt{192}}{2 \times 4} = \frac{5}{2} - \mathrm{i}\sqrt{3} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{5}{2} + \mathrm{i}\sqrt{3}.$$

L'équation affine $2z - 7 + 2\mathrm{i} = 0$ a pour solution $z_3 = \frac{7}{2} - \mathrm{i}$.
Les images de $z_1$, $z_2$ et $_3$ sont équidistantes du point P d'affixe 2 ; en effet,

$$\|z_1 - 2\|^2 = \left\|\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right\|^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + (\sqrt{3})^2 = \frac{13}{4},$$
$$\|z_3 - 2\|^2 = \left\|\frac{3}{2} - \mathrm{i}\right\|^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 1 = \frac{13}{4}$$

et $\|z_1 - 2\| = \|z_2 - 2\|$ puisque $z_1$ et $z_2$ sont conjuguées (leurs images sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses). Par conséquent, les images de $z_1$, $z_2$ et $z_3$ appartiennent au cercle de centre P et de rayon $\sqrt{13}/2$ : l'affirmation est vraie.

*Remarque.* On peut démontrer que $\|z_1 - 2\| = \|z_2 - 2\|$ sans calculer les racines. Il suffit d'écrire

$$(z_1 - 2)(z_2 - 2) = z_1 z_2 - 2(z_1 + z_2) + 4$$

qui, en tenant compte des relations entre les coefficients et les racines, devient

$$(z_1 - 2)(z_2 - 2) = \frac{37}{4} - 2 \times \frac{20}{4} + 4 = \frac{13}{4}.$$

Ainsi $z_1$ et $z_2$ vérifient

$$\begin{cases} \|z_1 - 2\| \times \|z_2 - 2\| = \dfrac{13}{4} \\ \|z_1 - 2\| = \|z_2 - 2\|, \end{cases}$$

d'où

$$\|z_1 - 2\|^2 = \|z_2 - 2\|^2 = \frac{13}{4}.$$

## Exercice 3

*Commun à tous les candidats*

### Partie A

1. Le détaillant constate que $\mathbb{P}(900 \leqslant \mathrm{M_A} \leqslant 1200) = 0{,}75$. Or

$$\mathbb{P}(900 \leqslant \mathrm{M_A} \leqslant 1200) = \int_{900}^{1200} \frac{1}{x - 850}\, \mathrm{d}y = \frac{300}{850 - x},$$

donc

$$\frac{300}{x - 850} = 0{,}75.$$

On trouve

$$x = 850 + \frac{300}{0{,}75} = 1250.$$

2. La variable aléatoire $Z = \frac{M_B - 1050}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite. On a $900 \leqslant M_B \leqslant 1200$ si et seulement si $-\frac{150}{\sigma} \leqslant Z \leqslant \frac{150}{\sigma}$, d'où

$$\mathbb{P}(900 \leqslant M_b \leqslant 1200) = \mathbb{P}\left(-\frac{150}{\sigma} \leqslant Z \leqslant \frac{150}{\sigma}\right) = 1 - 2\mathbb{P}\left(Z \leqslant \frac{150}{\sigma}\right).$$

Comme $\mathbb{P}(900 \leqslant M_b \leqslant 1200) = 0{,}85$, on a

$$\mathbb{P}\left(Z \leqslant -\frac{150}{\sigma}\right) = \frac{1 - 0{,}85}{2} = 0{,}075.$$

La calculatrice donne $-\frac{150}{\sigma} = -1{,}439\ldots$, d'où

$$\sigma \approx 104.$$

3. Testons l'hypothèse suivante : « Parmi les melons produits par le maraîcher C, la proportion de melons conformes est égale à $p = 0{,}80$. » Soit $n = 400$ la taille de l'échantillon. On vérifie que $n \geqslant 30$, $np = 400 \times 0{,}8 = 320 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 400 \times 0{,}2 = 80 \geqslant 5$, donc un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence des melons conformes est

$$\begin{aligned}&\left[p - 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\,;\, p + 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]\\ &\quad = \left[0{,}8 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}8 \times (1-0{,}8)}{400}}\,;\, 0{,}8 + 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}3 \times (1-0{,}8)}{400}}\right]\\ &\quad \approx [0{,}7608\,;\,0{,}8392].\end{aligned}$$

La fréquence des melons conformes dans l'échantillon, égale à $\frac{294}{400} = 0{,}735$, n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation asymptotique, nous devons donc rejeter l'hypothèse : le détaillant a raison de douter de l'affirmation du maraîcher C.

## Partie B

1. Voir la figure 5 page ci-contre.
On a $\mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}_{A_1}(A_2)$ et $\mathbb{P}(\overline{A_2}) = \mathbb{P}_{A_1}(\overline{A_2})$ car $\mathbb{P}(A_1) = 1$, donc

$$\mathbb{P}(A_3) = \mathbb{P}_{A_2}(A_3)\mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}_{\overline{A_2}}(A_3)\mathbb{P}(\overline{A_2}) = 0{,}90^2 + 0{,}40 \times 0{,}10 = 0{,}85.$$

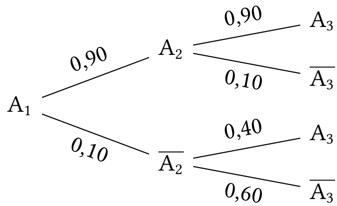



FIGURE 5

*b)* Sachant qu'un client achète un melon au cours de semaine 3, la probabilité qu'il en ait acheté un au cours de la semaine précédente est égale à

$$\mathbb{P}_{A_3}(A_2) = \frac{\mathbb{P}(A_3 \cap A_2)}{\mathbb{P}(A_3)} = \frac{\mathbb{P}_{A_2}(A_3)\mathbb{P}(A_2)}{\mathbb{P}(A_3)} = \frac{0{,}90 \times 0{,}90}{0{,}85} = \frac{0{,}81}{0{,}85},$$

dont un arrondi au centième est 0,95.

2. Soit $n \geqslant 1$ un entier. La formule des probabilités totales donne

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_{n+1}) &= \mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1})\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}_{\overline{A_n}}(A_{n+1})\mathbb{P}(\overline{A_n}) \\ &= 0{,}9\mathbb{P}(A_n) + 0{,}4\big(1 - \mathbb{P}(A_n)\big) \\ &= 0{,}5\mathbb{P}(A_n) + 0{,}4.\end{aligned}$$

Autrement dit, la suite $(p_n)_{n\geqslant 1}$ vérifie la relation de récurrence

$$p_{n+1} = 0{,}5p_n + 0{,}4.$$

3. *a)* Démontrons par récurrence l'inégalité $p_n > 0{,}8$ pour tout $n \geqslant 1$.

*Initialisation.* L'inégalité est vérifié pour $n = 1$ ; en effet, $p_1 = 1$.

*Hérédité.* Supposons que $p_k > 0{,}8$ pour un entier $k \geqslant 1$. Appliquons aux membres de l'inégalité la fonction affine $x \longmapsto 0{,}5x+0{,}4$. Elle est strictement croissante, donc $0{,}5p_k + 0{,}4 > 0{,}5 \times 0{,}8 + 0{,}4$, soit $p_{k+1} > 0{,}8$.

*Conclusion.* L'inégalité est vraie pour $n = 1$, et si elle est vraie pour $n = k \geqslant 1$, alors elle est vraie pour $n = k + 1$ ; le principe de récurrence nous permet alors de conclure que $p_n > 0{,}8$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

*b)* Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a

$$p_{n+1} - p_n = 0{,}5p_n + 0{,}4 - p_n = -0{,}5p_n + 0{,}4.$$

Or $p_n > 0{,}8$ et la fonction $x \longmapsto -0{,}5x + 0{,}4$ est strictement décroissante, donc

$$p_{n+1} - p_n < -0{,}5 \times 0{,}8 + 0{,}4 = 0.$$

On conclut que la suite $(p_n)_{n\geqslant 1}$ est strictement décroissante, donc décroissante.

*c)* La suite $(p_n)$ est décroissante et minorée, donc elle converge.

4. *a)* Soustrayons membre à membre l'égalité (apparaît à la question 3.a)

$$0{,}8 = 0{,}5 \times 0{,}8 + 0{,}4$$

à l'égalité

$$p_{n+1} = 0{,}5p_n + 0{,}4.$$

Nous obtenons

$$p_{n+1} - 0{,}8 = 0{,}5(p_n - 0{,}8),$$

soit

$$v_{n+1} = 0{,}5v_n,$$

montrant ainsi que $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite géométrique de raison $q = 0{,}5$ et de premier terme $v_1 = p_1 - 0{,}8 = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$.

*b)* D'après la question précédente, le terme général de la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est

$$v_n = v_1 q^{n-1} = 0{,}2 \times 0{,}5^{n-1},$$

d'où nous déduisons que celui de la suite $(p_n)_{n\geqslant 1}$ est

$$p_n = 0{,}8 + v_n = 0{,}8 + 0{,}2 \times 0{,}5^{n-1}$$

pour tout entier $n \geqslant 1$.

*c)* La suite géométrique $(v_n)$ a une raison $q$ telle que $|q| < 1$, donc elle converge vers 0. La relation $p_n = v_n + 0{,}8$ nous permet alors de conclure que

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} p_n = 0{,}8.$$

## Exercice 4

*Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité*

### Partie A

1. Voir la figure 6.

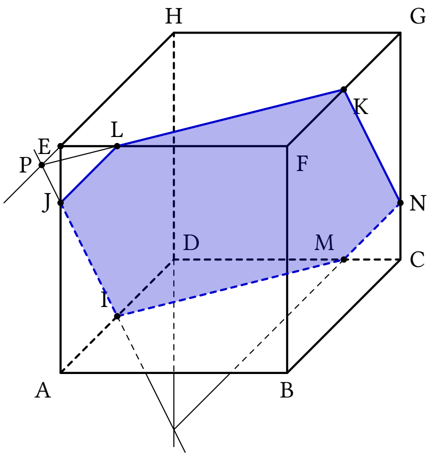



Figure 6

2. Les plans (IJK) et (EFG) sont distincts, leur intersection est donc une droite. Notons là $\mathscr{D}$. La droite (EH) appartient au plan (EFG), donc le point P appartient à $\mathscr{D}$. Le point K appartient au plan (EFG), donc K appartient à $\mathscr{D}$. L'intersection des plan (IJK) et (EFG) est la droite (PK).

### Partie B

1. *a)* Le point I a pour coordonnées $(0\,;1/2\,;0)$, le point J a pour coordonnées $(0\,;0\,;3/4)$ et le point K a pour coordonnées $(1\,;1/2\,;1)$.

*b)* Le vecteur $\vec{n}(4\,;a\,;b)$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{IJ}}(0\,;-1/2\,;3/4)$ et $\overrightarrow{\mathrm{IK}}(1\,;0\,;1)$ si et seulement si

$$\begin{cases} \vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{IJ}} = 0 \\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{IK}} = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Le repère étant orthonormé,

$$(1) \iff \begin{cases} 4\times 0 - \dfrac{1}{2}a + \dfrac{3}{4}b = 0 \\ 4 + 0\times a + 1\times b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -6 \\ b = -4. \end{cases}$$

*c)* D'après la question précédente, $\vec{n}(4\,;-6\,;-4)$ est un vecteur normal au plan (IJK), donc une équation cartésienne du plan (IJK) est $4x-6y-4z+c=0$, où $c$ est un réel. En substituant les coordonnées de I à $x$, $y$ et $z$, on obtient $-3+c=0$, d'où $c=3$. Finalement,

$$4x-6y-4z+3=0.$$

est une équation cartésienne du plan (IJK).

2. *a)* Une représentation paramétrique de la droite (CG) passant par C$(1\,;1\,;0)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{\mathrm{CG}}(0\,;0\,;1)$ est

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = t \end{cases} \qquad (t\in\mathbb{R}).$$

*b)* Le point N appartenant à la droite (CG) ses coordonnées sont de la forme $(1\,;1\,;t)$. Il appartient aussi au plan (IJK), donc

$$4\times 1 - 6\times 1 - 4t + 3 = 0$$

d'où $t = 1/4$. Les coordonnées de N sont donc $(1\,;1\,;1/4)$.

*c)* Voir la figure 6 page précédente.

### Partie C

La droite (FR) est orthogonale au plan (IJK), elle admet donc $\vec{n}$ comme vecteur directeur. Nous en déduisons une équation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = -6t \\ z = 1 - 4t \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Les coordonnées du point R sont de la forme $(1 + 4t\,; -6t\,; 1 - 4t)$. Il appartient au plan (IJK), donc ses coordonnées vérifient son équation trouvée en B.1.c :

$$4(1 + 4t) - 6(-6t) - 4(1 - 4t) + 3 = 0$$

d'où $t = -3/68$, donc les coordonnées du point R sont $\big(1 + 4 \times (-3/68)\,; -6 \times (-3/68)\,; 1 - 4(-3/68)\big)$, soit $(14/17\,; 9/34\,; 20/17)$. De $20/17 \geqslant 1$, nous déduisons que le point R n'est pas à l'intérieur du cube.

## Exercice 4

*Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité*

1. *a)* À l'aide de la calculatrice, on vérifie que $8^7 - 2 = 2\,097\,150$ est un multiple de 55, d'où $8^7 \equiv 2 \pmod{55}$. Il s'ensuit que $(8^7)^3 \equiv 2^3 \pmod{55}$, c'est-à-dire $8^{21} \equiv 8 \pmod{55}$, ce qui montre que 8 est le reste de la division euclidienne de $8^{21}$ par 55.

   *Remarque.* Par l'emploi judicieux des règles de calcul sur les congruences, nous pouvions nous passer de la calculatrice. On a

$$\begin{aligned} 8^7 &\equiv 8 \times 8^2 \times (8^2)^2 \\ &\equiv 8 \times 9 \times 9^2 \\ &\equiv 72 \times 81 \\ &\equiv 17 \times 26 \\ &\equiv 442 \pmod{55}. \end{aligned}$$

   Or 5 et 11 sont premiers entre eux, $442 \equiv 2 \pmod{5}$ et $442 \equiv 4 - 4 + 2 \equiv 2 \pmod{11}$, donc

$$8^7 \equiv 2 \pmod{55}.$$

Il était aussi possible d'utiliser le petit théorème de Fermat. Commençons par écrire que $8^7 = 2^{21}$. Ensuite, 5 et 11 étant des nombres premiers, ce théorème affirme que $2^4 \equiv 1 \pmod 5$ et $2^{10} \equiv 1 \pmod{11}$. On en déduit que $2^{21} \equiv (2^4)^5 \times 2 \equiv 2 \pmod 5$ et $2^{21} \equiv (2^{10})^2 \times 2 \equiv 2 \pmod{11}$. Finalement, 5 et 11 étant premier entre eux, $2^{21} \equiv 2 \pmod{55}$.

Et enfin, les amateurs d'informatique connaissent par cœur la valeur de $2^{16}$ à partir laquelle on obtient rapidement $8^7 = 2\,097\,152$ à l'aide de cinq rapides multiplications par 2. Le chiffre des unités de $8^7 - 2$ étant un 0, c'est un multiple de 5. La somme alternée des chiffres de $8^7 - 2$, soit $2 - 0 + 9 - 7 + 1 - 5 + 0$, est un multiple de 11, donc $8^7 - 2$ est aussi un multiple de 11. On conclut comme précédemment.

*b)* Pour $8^2 \equiv 9 \pmod{55}$, voir la question précédente. On a $8^{23} \equiv 8^{21} \times 8^2 \equiv 8 \times 9 \equiv 17 \pmod{55}$.

2. *a)* Les coefficients de l'équation $(\mathscr{E})$ étant premiers entre eux, l'existence d'une solution résulte du théorème de Bézout.

*b)* Puisque $40y$ a pour chiffre des unités 0, nécessairement, le chiffre des unités de $23x$ doit être égale à 1. Il faut donc que le chiffre des unités $x$ soit 7. Essayons : $23 \times 7 = 161$, or $40 \times 4 = 160$, donc $(7, 4)$ est une solution particulière de l'équation $(\mathscr{E})$.

*c)* Soit $(x, y)$ une solution de l'équation $(\mathscr{E})$. En soustrayant membre à membre l'égalité

$$23 \times 7 - 40 \times 4 = 1$$

de celle-ci

$$23x - 40y = 1,$$

on obtient

$$23(x - 7) - 40(y - 4) = 0,$$

que l'on réécrit

$$23(x - 7) = 40(y - 4).$$

On voit que 23 divise $40(y - 4)$. Or 23 et 40 sont premiers entre eux, donc d'après le théorème de Gauss, 23 divise $y - 4$. Il existe donc un entier $k$ tel que

$$y - 4 = 23k.$$

En remplaçant dans l'équation précédente, on obtient

$$x - 7 = 40k.$$

Nous venons démontrer que les solutions de l'équation $(\mathscr{E})$ sont de la forme

$$(7 + 40k, 4 + 23k)$$

où $k \in \mathbb{Z}$. Réciproquement, tout couple de cette forme est solution de $(\mathscr{E})$ ; en effet,

$$23(7 + 40k) - 40(4 + 23k) = 23 \times 7 - 40 \times 4 = 1.$$

Finalement, l'ensemble des solutions de $(\mathscr{E})$ est

$$\{(7 + 40k, 4 + 23k) \; ; \; k \in \mathbb{Z}\}.$$

*d)* Soit $d$ un entier. On a $23d \equiv 1 \pmod{40}$ si et seulement si il existe un entier $e$ tel que $23d - 1 = 40e$, c'est-à-dire $23d - 40e = 1$. D'après la question précédente, les solutions de $23d \equiv 1 \pmod{40}$ sont de la forme $7 + 40k$, où $k \in \mathbb{Z}$. On souhaite que $0 \leqslant 7 + 40k < 40$, d'où $k = 0$ et on conclut que $d = 7$.

3. *a)* On a $\mathrm{N} = 5 \times 11 = 55$, $n = (5 - 1) \times (11 - 1) = 40$ et $c = 23$ est bien premier avec $n$.

   *b)* Il nous faut trouver le reste de la division euclidienne de $a^c = 8^{23}$ par 55. À la question 1.b, nous avons montré que $8^{23} \equiv 17 \pmod{55}$. Comme $17 < 55$, le reste cherché est 17 et on conclut que le nombre 8 est crypté $b = 17$.

4. *a)* L'entier $d$ est l'unique solution de l'équation $23d \equiv 1 \pmod{40}$. On a la question 2.d, on a montré que $d = 7$.

   *b)* L'entier $a$ est le reste de $b^d = 17^7$ par $\mathrm{N} = 55$. On trouve $a = 8$.

CORRIGÉ

**Sujet 5**

# *Liban*

29 mai 2018

**Exercice 1** (3 points)
*Commun à tous les candidats*

Les quinze jours précédant la rentrée scolaire universitaire, le standard téléphonique d'une mutuelle étudiante enregistre un nombre record d'appels. Les appelants sont d'abord mis en attente et entendent une musique d'ambiance et un message préenregistré. Lors de cette phase, le temps d'attente, exprimé en secondes, est modélisé par la variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètres $\lambda = 0{,}02\,\mathrm{s}^{-1}$. Les appelants sont ensuite mis en relation avec un chargé de clientèle qui répond à leurs questions. Le temps d'échange, exprimé en secondes, lors de cette deuxième phase est modélisé par la variable aléatoire Y, exprimée en secondes, qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 96$ s et d'écart-type $\sigma = 26$ s.

1. Quelle est la durée totale moyenne d'un appel au standard téléphonique (temps d'attente et temps d'échange avec le chargé de clientèle) ?
2. Un étudiant est choisi au hasard parmi les appelants du standard téléphonique.
   *a)* Calculer la probabilité que l'étudiant soit mis en attente de plus de 2 minutes.
   *b)* Calculer la probabilité pour que le temps d'échange avec le conseiller soit inférieur à 90 secondes.
3. Une étudiante, choisie au hasard parmi les appelants, attend depuis plus d'une minute d'être mise en relation avec le service clientèle. Lasse, elle raccroche et recompose le numéro. Elle espère attendre moins de trente secondes cette fois-ci. Le fait de raccrocher puis de rappeler augmente-t-il ses chances de

limiter à 30 secondes l'attente supplémentaire ou bien aurait-elle mieux fait de rester en ligne ?

**Exercice 2** (3 points)
*Commun à tous les candidats*

1. Donner les formes exponentielle et trigonométrique des nombres complexes $1 + \mathrm{i}$ et $1 - \mathrm{i}$.
2. Pour tout entier naturel $n$, on pose $S_n = (1 + \mathrm{i})^n + (1 - \mathrm{i})^n$.
   *a)* Déterminer la forme trigonométique de $S_n$.
   *b)* *Pour chacune des deux affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte et l'absence de réponse n'est pas pénalisée.*
   **Affirmation A :** Pour tout entier naturel $n$, le nombre complexe $S_n$ est un nombre réel.
   **Affirmation B :** Il existe une infinité d'entiers naturels $n$ tels que $S_n = 0$.

**Exercice 3** (4 points)
*Commun à tous les candidats*

L'objectif de cet exercice est d'étudier les trajectoires de deux sous-marins en phase de plongée. On considère que ces sous-marins se déplacent en ligne droite,

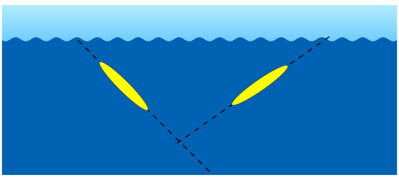


FIGURE 1

chacun à vitesse constante. À chaque instant $t$, exprimé en minutes, le premier sous-marin est repéré par le point $S_1(t)$ et le second sous-marin est repéré par le point $S_2(t)$ dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ dont l'unité est le mètre. Le plan défini par $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ représente la surface de la mer. La cote $z$ est nulle au niveau de la mer, négative sous l'eau.

1. On admet que, pour tout réel $t \geqslant 0$, le point $S_1(t)$ a pour coordonnées

$$\begin{cases} x(t) = 140 - 60t \\ y(t) = 105 - 90t \\ z(t) = -170 - 30t. \end{cases}$$

   *a)* Donner les coordonnées du sous-marin au début de l'observation.

   *b)* Quelle est la vitesse du sous-marin ?

2. On se déplace dans le plan vertical contenant la trajectoire du premier sous-marin. Déterminer l'angle $\alpha$ que forme la trajectoire du sous-marin avec le plan horizontal. On donnera l'arrondi de $\alpha$ à 0,1 degré près.

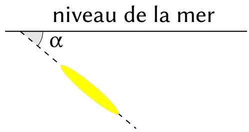



FIGURE 2

3. Au début de l'observation, le second sous-marin est situé au point $S_2(0)$ de coordonnées $(68\,;135\,;-68)$ et atteint au bout de trois minutes le point $S_2(3)$ de coordonnées $(-202\,;-405\,;-248)$ avec une vitesse constante. À quel instant $t$, exprimé en minutes, les deux sous-marins sont-ils à la même profondeur ?

**Exercice 4** (5 points)
*Commun à tous les candidats*

On considère, pour tout entier $n > 0$, les fonctions $f_n$ définies sur l'intervalle $[1\,;5]$ par

$$f_n(x) = \frac{\ln(x)}{x^n}.$$

Pour tout entier $n > 0$, on note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de la fonction $f_n$ dans un repère orthogonal. Sur le graphique de la figure 3 sont représentées les courbes $\mathscr{C}_n$ pour $n$ appartenant à $\{1\,;2\,;3\,;4\}$.

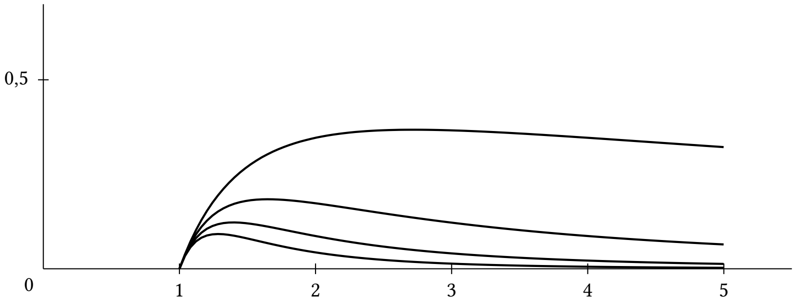



FIGURE 3

1. Montrer que, pour tout entier $n > 0$ et tout réel $x$ de l'intervalle $[1\,;5]$,

$$f_n'(x) = \frac{1 - n\ln(x)}{x^{n+1}}.$$

2. Pour tout entier $n > 0$, on admet que la fonction $f_n$ admet un maximum sur l'intervalle $[1\,;5]$. On note $\mathrm{A}_n$ le point de la courbe $\mathscr{C}_n$ ayant pour ordonnée ce maximum. Montrer que tous les points $\mathrm{A}_n$ appartiennent à une même courbe d'équation

$$y = \frac{1}{\mathrm{e}}\ln(x).$$

3. *a)* Montrer que, pour tout entier $n > 1$ et tout réel $x$ de l'intervalle $[1\,;5]$,

$$0 \leqslant \frac{\ln(x)}{x^n} \leqslant \frac{\ln(5)}{x^n}.$$

   *b)* Montrer que pour tout entier $n > 1$,

$$\int_1^5 \frac{1}{x^n}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{1}{5^{n-1}}\right).$$

*c)* Pour tout entier $n > 0$, on s'intéresse à l'aire, exprimée en unités d'aire, sous la courbe $\mathscr{C}_n$, c'est-à-dire l'aire du domaine du plan délimité par les droites d'équations $x = 1$, $x = 5$, $y = 0$ et la courbe $\mathscr{C}_n$. Déterminer la valeur de la limite de cette aire quand $n$ tend vers $+\infty$.

**Exercice 5** (5 points)

*Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité*

Un jeu de hasard sur ordintateur est paramétré de la façon suivante :

— si le joueur gagne la partie, la probabilité qu'il gagne la partie suivante est $\frac{1}{4}$ ;

— si le joueur perd une partie, la probabilité qu'il perde la partie suivante est $\frac{1}{2}$ ;

— la probabilité de gagner la première partie est $\frac{1}{4}$.

Pour tout entier naturel $n$ non nul, on note $\mathrm{G}_n$ l'événement « la $n^{\text{e}}$ partie gagnée » et on note $p_n$ la probabilité de cet événement. On a donc $p_1 = \frac{1}{4}$.

1. Montrer que $p_2 = \frac{7}{16}$.
2. Montrer que, pour tout entier naturel $n$ non nul,
$$p_{n+1} = -\frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}.$$
3. On obtient ainsi les premières valeurs de $p_n$ (voir table 1).

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_n$ | 1 | 0,4375 | 0,3906 | 0,4023 | 0,3994 | 0,4001 | 0,3999 |

TABLE 1

Quelle conjecture peut-on émettre ?

4. On défnit, pour tout entier naturel $n$ non nul, la suite $(u_n)$ par
$$u_n = p_n - \frac{2}{5}.$$

*a)* Démontrer que la suite $(u_n)$ est une suite géométrique dont on précisera la raison.

*b)* En déduire que, pour tout entier naturel $n$ non nul,

$$p_n = \frac{2}{5} - \frac{3}{20}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}.$$

*c)* La suite $(p_n)$ converge-t-elle ? Interpréter ce résultat.

**Exercice 5** (5 points)

*Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité*

On définit la suite de réels $(a_n)$ par

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \quad \text{pour } n \geqslant 1. \end{cases}$$

On appelle cette suite la *suite de Fibonacci.*

1. Recopier et compléter l'algorithme de la figure 4 pour qu'à la fin de son exécution la variable A contienne le terme $a_n$.

```
A ← 0
B ← 1
Pour i allant de 2 à n:
    C ← A + B
    A ← .......
    B ← .......
Fin Pour
```

FIGURE 4

On obtient ainsi les premières valeurs de la suite $a_n$ (voir table 2 page ci-contre).

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 8 | 13 | 21 | 34 | 55 |

TABLE 2

2. Soit la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $\mathrm{A}^2$, $\mathrm{A}^3$ et $\mathrm{A}^4$. Vérifier que $\mathrm{A}^5 = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.
3. On peut démontrer, et nous admettrons, que pour tout entier naturel $n$ non nul,

$$\mathrm{A}^n = \begin{pmatrix} a_{n+1} & a_n \\ a_n & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

   *a)* Soit $p$ et $q$ deux entiers naturels non nuls. Calculer le produit $\mathrm{A}^p \times \mathrm{A}^q$ et en déduire que

$$a_{p+q} = a_p \times a_{q+1} + a_{p-1} \times a_q.$$

   *b)* En déduire que si un entier $r$ divise les entiers $a_p$ et $a_q$, alors $r$ divise également $a_{p+q}$.

   *c)* Soit $p$ un entier naturel non nul. Démontrer, en utilisant un raisonnement par récurrence sur $n$, que pour tout entier naturel $n$ non nul, $a_p$ divise $a_{np}$.
4. *a)* Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 5. Montrer que si $n$ est un entier naturel qui n'est pas premier, alors $a_n$ n'est pas un nombre premier.

   *b)* On peut calculer $a_{19} = 4181 = 37 \times 113$. Que penser de la réciproque de la propriété obtenue dans la question 4.a ?

## Exercice 1
*Commun à tous les candidats*

1. La durée totale d'un appel téléphonique est modélisée par la variable aléatoire $X + Y$. Par conséquent, la durée totale moyenne d'un appel est, en secondes, égale à

$$\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = \frac{1}{\lambda} + \mu = \frac{1}{0{,}02} + 96 = 146,$$

soit 2 min 26 s.

2. *a)* La probabilité pour qu'un étudiant choisi au hasard soit mis en attente plus de 2 min, soit 120 s, est égale à

$$\mathbb{P}(X > 2) = e^{-2\lambda} = e^{-120\times 0{,}02} = e^{-2{,}4} \approx 0{,}091.$$

*b)* La probabilité pour que le temps d'échange avec le conseiller soit inférieur à 90 s est égale à $\mathbb{P}(Y < 90) \approx 0{,}409$.

3. Notons $t$ le temps depuis lequel l'étudiante patiente. Si l'étudiante reste en ligne, la probabilité qu'elle attende moins de 30 s est $\mathbb{P}_{\{X>t\}}(X < t + 30)$. En revanche, si elle rappelle, cette probabilité est $\mathbb{P}(X < 30)$. Or X suit une loi sans vieillissement, donc

$$\mathbb{P}_{\{X>t\}}(X < t+30) = 1 - \mathbb{P}_{\{X>t\}}(X \geqslant t+30) = 1 - \mathbb{P}(X \geqslant 30) = \mathbb{P}(X < 30).$$

Nous en déduisons qu'il revient au même de patienter ou de rappeler.

## Exercice 2
*Commun à tous les candidats*

1. Le module de $1 + i$ est $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Soit $\theta$ un argument de $1 + i$. On doit avoir

$$1 + i = \sqrt{2}(\cos\theta + i\sin\theta),$$

d'où $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, donc $\theta \equiv \frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}$. Par conséquent,

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{i\pi/4}.$$

Remarquant que $1-\mathrm{i}$ est le conjugué de $1+\mathrm{i}$, il vient

$$1-\mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}.$$

2. *a)* La formule de Moivre nous permet de déduire une forme trigonométrique de $(1+\mathrm{i})^n$ à partir de celle de $1+\mathrm{i}$ :

$$(1+\mathrm{i})^n = \sqrt{2^n}\left(\cos n\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin n\frac{\pi}{4}\right),$$

et une forme trigonométrique de $(1-\mathrm{i})^n$ à partir de celle de $1-\mathrm{i}$ :

$$(1-\mathrm{i})^n = \sqrt{2^n}\left(\cos n\frac{\pi}{4} - \mathrm{i}\sin n\frac{\pi}{4}\right).$$

Ajoutons membre à membre les deux égalités ci-dessus :

$$\mathrm{S}_n = 2\sqrt{2^n}\cos n\frac{\pi}{4}.$$

On voit que $\mathrm{S}_n$ est un réel. Son module est $2\sqrt{2^n}|\cos n\frac{\pi}{4}|$ et si $\mathrm{S}_n \neq 0$, alors

$$\arg z \equiv \begin{cases} 0 \pmod{2\pi} & \text{si } \mathrm{S}_n > 0 \\ \pi \pmod{2\pi} & \text{si } \mathrm{S}_n < 0. \end{cases}$$

D'après le théorème de la division euclidienne, il existe un couple d'entiers naturels $(q,r)$ tel que $n = 8q + r$ et $0 \leqslant r < 8$. Nous avons alors

$$\mathrm{S}_n = 2\sqrt{2^n}\cos n\frac{\pi}{4} = 2\sqrt{2^n}\cos\left(2q\pi + r\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2^n}\cos r\frac{\pi}{4}.$$

On vérifie que $\cos r\frac{\pi}{4} > 0$ si $r \in \{0,1,6,7\}$, $\cos r\frac{\pi}{4} < 0$ si $r \in \{3,4,5\}$. et $\cos r\frac{\pi}{4} = 0$ si $r \in \{2,6\}$. Nous en déduisons une forme trigonométrique de $\mathrm{S}_n$ en fonction du reste de la division euclienne par 8 de $n$ :

$$\mathrm{S}_n = \begin{cases} 2\sqrt{2^n}\left(\cos n\frac{\pi}{4}\right)(\cos 0 + \mathrm{i}\sin 0) & \text{si } r \in \{0,1,6,7\} \\ 2\sqrt{2^n}\left(\cos n\frac{\pi}{4}\right)(\cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi) & \text{si } r \in \{3,4,5\} \\ 0 \text{ n'a pas de forme trigonométrique} & \text{si } r \in \{2,6\}. \end{cases}$$

*b)* **Affirmation A :** Nous avons montré à la question précédente que cette affirmation est vraie.

> *Remarque.* Sans les questions 1 et 2.a, nous pouvions simplement remarquer que
> $$\overline{(1+\mathrm{i})^n} = \overline{1+\mathrm{i}}^n = (1-\mathrm{i})^n,$$
> or la somme d'un complexe et de son conjugué est un réel.

**Affirmation B :** Cette affirmation est également vraie. À la question précédente, nous avons montré que $S_n = S_r$ où $r$ est le reste de la division euclidienne de $n$ par 8. Comme les restes de la division euclidienne par 8 de $n+8$ et de $n$ sont identiques, on a $S_{n+8} = S_n$ pour tout entier $n \geqslant 0$. Étant donné que $S_2 = 0$, nous en déduisons que $S_n$ s'annule pour une infinité d'entiers $n \geqslant 0$.

> *Solution alternative.* Déterminons les entiers $n \geqslant 0$ tels que $S_n = 0$. Nous avons établi à la question précédente que
> $$S_n = 2\sqrt{2^n}\cos n\frac{\pi}{4}.$$
> Ainsi, $S_n = 0$ si et seulement si $\cos n\frac{\pi}{4} = 0$. Les solutions de l'équation sont donc les entiers $n$ pour lesquels il existe un entier $k \geqslant 0$ tel que
> $$n\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi,$$
> d'où
> $$n = 2 + 4k.$$
> Il existe donc bien une infinité d'entiers $n \geqslant 0$ tels que $S_n = 0$.

## Exercice 3

*Commun à tous les candidats*

1. *a)* Les coordonnées du premier sous-marin au début de l'observation sont celles du point $S_1(0)$, soit $(140\,;105\,;-170)$.

   *b)* Les coordonnées de son vecteur vitesse $\vec{v}$ à l'instant $t$ sont $(x'(t)\,;y'(t)\,;z'(t)) = (-60\,;-90\,;-30)$. Le repère étant orthonormé, on a $\|\vec{v}\|^2 = (-60)^2+(-90)^2+(-30)^2 = 12\,600$, donc $\|\vec{v}\| = \sqrt{12\,600}$. Le sous-marin se déplace à une vitesse égale à environ 112,25 m/min ou, exprimée dans une unité plus appropriée, égale à 3,64 nœuds [1].

*Solution alternative.* Le sous-marin se déplaçant en ligne droite, au cours de la première minute, il parcourt une distance égale à $S_1(0)S_1(1)$, où les coordonnées de $S_1(0)$ sont $(140\,;105\,;-170)$ et celles de $S_1(1)$ sont $(80\,;15\,;-200)$. Comme le repère est orthonormé, on a

$$S_1(0)S_1(1) = \sqrt{(80-140)^2+(15-105)^2+(-200-(-170))^2} = \sqrt{12\,600}.$$

La vitesse du sous-marin étant constante, nous en déduisons qu'il se déplace à une vitesse égale à $\sqrt{12\,600}$ m/min $\approx 112{,}25$ m/min.

2. Soit A le point tel que $\overrightarrow{OA} = \vec{v}$. Puisque O est l'origine du repère, les coordonnées de A sont celles de $\vec{v}$, soit $(-60, -90\,;-30)$. Soit H le projeté orthogonal du point A sur le plan $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Ses coordonnées s'obtiennent en annulant la cote du point A, soit $(-60\,;-90\,;0)$. Par construction, $\alpha = \widehat{AOH}$. Le triangle AOH étant rectangle en H, on a

$$\tan\alpha = \frac{AH}{OH} = \frac{30}{\sqrt{(-60)^2+(-90)^2}} = \frac{3}{117}.$$

La calculatrice donne $\alpha \approx 15{,}5°$.

*Solution alternative.* Soit $\vec{n}(0,0,1)$ un vecteur normal unitaire au plan d'équation $z=0$. L'angle entre la trajectoire du sous-marin et une droite normale au plan d'équation $z=0$ est le complémentaire de l'angle $\alpha$, donc

$$\cos(90°-\alpha) = \frac{\vec{n}\cdot\vec{v}}{\|\vec{n}\|\times\|\vec{v}\|}.$$

Le repère est orthonormé, donc

$$\cos(90°-\alpha) = \frac{-60\times 0 - 90\times 0 - 30\times 1}{1\times\sqrt{12600}} = \frac{-3}{\sqrt{126}}.$$

On trouve $90° - \alpha = 74{,}498\ldots$, d'où $\alpha \approx 15{,}5°$.

1. 1 nœud = 1,852 km/h.

3. La cote du second sous-marin est $-68$ à l'instant $t = 0$ et $-248$ à l'instant $t = 3$. Sa vitesse est constante et sa trajectoire est une droite, sa vitesse verticale algébrique est donc constante et égale à $(-248-(-68))/3 = -60$. Par conséquent, sa cote à l'instant $t$ est égale à $-68-60t$. Nous en déduisons que les deux sous-marins sont à la même profondeur à l'instant $t$ tel que

$$-170-30t = -68-60t.$$

On trouve $t = 3{,}4$.

## Exercice 4

*Commun à tous les candidats*

1. Pour tout réel $x \in [1\,;5]$, on a

$$f_n'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x^n - (\ln x)nx^{n-1}}{x^{2n}} = \frac{x^{n-1} - nx^{n-1}\ln x}{x^{n-1}x^{n+1}} = \frac{1-n\ln x}{x^{n+1}}.$$

2. Sur l'intervalle $[1\,;5]$, le signe de $f_n'(x)$ est celui de $1-n\ln x$. L'équation $1-n\ln x = 0$ est équivalente à l'équation $\ln x = 1/n$ dont l'unique solution est $x = \mathrm{e}^{1/n}$. Étant donné que $n \geqslant 1$, on a $0 < 1/n < 1$, et la fonction exponentielle étant croissante, on en déduit que $1 < \mathrm{e}^{1/n} < \mathrm{e}$, d'où $\mathrm{e}^{1/n} \in [1\,;5]$. La fonction $x \mapsto 1-n\ln x$ est strictement décroissante sur $[1\,;5]$ ; en effet, sa dérivée $x \mapsto -\frac{n}{x}$ est strictement négative. Par conséquent $f_n$ est strictement croissante sur $[1\,;\mathrm{e}^{1/n}]$ et strictement décroissante sur $[\mathrm{e}^{1/n}\,;5]$ ; elle admet un unique maximum en $\mathrm{e}^{1/n}$, égal à

$$f(\mathrm{e}^{1/n}) = \frac{\ln(\mathrm{e}^{1/n})}{(\mathrm{e}^{1/n})^n} = \frac{1}{n\mathrm{e}},$$

d'où les coordonnées du points $\mathrm{A}_n$ :

$$\left(\mathrm{e}^{1/n}\,; \frac{1}{n\mathrm{e}}\right).$$

On vérifie que $\frac{1}{n\mathrm{e}} = \frac{1}{\mathrm{e}}\ln \mathrm{e}^{1/n}$, donc le point $\mathrm{A}_n$ appartient à la courbe d'équation $y = \frac{1}{\mathrm{e}}\ln x$.

3. *a)* Soit $x$ un réel tel que $1 \leqslant x \leqslant 5$. La fonction logarithme est croissante sur $[1\,;5]$ et $\ln 1 = 0$, donc $0 \leqslant \ln x \leqslant \ln 5$. Comme $x^n > 0$, on obtient

$$0 \leqslant \frac{\ln x}{x^n} \leqslant \frac{\ln 5}{x^n}.$$

*b)* La fonction $x \longmapsto -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$ est une primitive de la fonction $x \longmapsto 1/x^n$ sur $[1\,;5]$, donc

$$\int_1^5 \frac{1}{x^n}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{(n-1)5^{n-1}} + \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{1}{5^{n-1}}\right).$$

*c)* La fonction $f_n$ étant positive, l'aire $\mathscr{A}_n$ du domaine définie dans la question est égale à $\int_1^5 f_n(x)\,\mathrm{d}x$. En utilisant l'encadrement de la question 3.a et la positivité de l'intégrale, nous obtenons

$$0 \leqslant \mathscr{A}_n \leqslant \int_1^5 \frac{\ln 5}{x^n}\,\mathrm{d}x,$$

puis à l'aide de la question 3.b,

$$0 \leqslant \mathscr{A}_n \leqslant \frac{\ln 5}{n-1}\left(1 - \frac{1}{5^{n-1}}\right).$$

De $\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{1}{5^{n-1}} = 0$ et $\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{1}{n-1} = 0$, nous tirons

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{\ln 5}{n-1}\left(1 - \frac{1}{5^{n-1}}\right) = 0.$$

Le théorème des gendarmes permet alors de conclure que

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \mathscr{A}_n = 0.$$

## Exercice 5

*Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité*

1. Appliquons la formule des probabilités totales :

$$p_2 = \mathbb{P}(G_2) = \mathbb{P}(G_1) \times \mathbb{P}_{G_1}(G_2) + \mathbb{P}(\overline{G_1}) \times \mathbb{P}_{\overline{G_1}}(G_2) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{16}.$$

2. Soit $n$ un entier naturel non nul. Appliquons à nouveau la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(G_{n+1}) = \mathbb{P}(G_n) \times \mathbb{P}_{G_n}(G_{n+1}) + \mathbb{P}(\overline{G_n}) \times \mathbb{P}_{\overline{G_n}}(G_{n+1}),$$

soit

$$p_{n+1} = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}(1 - p_n) = -\frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}.$$

3. Les premiers termes de la suite $(p_n)$ suggèrent la conjecture suivante :

**Conjecture.** *La suite* $(p_n)_{n\geqslant 1}$ *converge et a pour limite* 0,4.

4. *a)* Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= p_{n+1} - \frac{2}{5} \\
&= -\frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2} - \frac{2}{5} \\
&= -\frac{1}{4}\left(\left(p_n - \frac{2}{5}\right) + \frac{2}{5}\right) + \frac{1}{2} - \frac{2}{5} \\
&= -\frac{1}{4}\left(p_n - \frac{2}{5}\right) \underbrace{-\frac{1}{4} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{2} - \frac{2}{5}}_{=0} \\
&= -\frac{1}{4}u_n,
\end{aligned}$$

donc la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite géométrique de raison $q = -\frac{1}{4}$ et de premier terme $u_1 = p_1 - \frac{2}{5} = \frac{1}{4} - \frac{2}{5} = -\frac{3}{20}$.

*b)* Le terme général de la suite $(u_n)$ est, pour tout entier $n \geqslant 1$, égal à

$$u_n = u_1 q^{n-1} = -\frac{3}{20}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1},$$

donc celui de la suite $(p_n)$ est égal à

$$p_n = \frac{2}{5} + u_n = \frac{2}{5} - \frac{3}{20}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} \qquad (n \geqslant 1).$$

*c)* Comme $-1 < -\frac{1}{4} < 1$, la suite de terme général $\left(-\frac{1}{4}\right)^n$ tend vers 0 lorsque $n$ tend vers $+\infty$. Nous en déduisons que la suite $(p_n)$ converge et a pour limite $\frac{2}{5} = 0{,}4$, prouvant ainsi la conjecture. Par définition d'une limite, on peut considérer que la probabilité de gagner une partie est égale à 0,4 après un nombre de parties suffisamment grand.

## Exercice 5

*Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité*

1. L'algorithme à compléter n'est pas correct ; en l'état, c'est la variable B qui contient $a_n$ sauf pour $n = 0$. La solution la plus simple (figure 5) consiste à faire exécuter la boucle une fois de plus. De cette façon, la variable A contiendra bien $a_n$ pour tout entier $n \geqslant 0$.

```
A ← 0
B ← 1
Pour i allant de 1 à n:
    C ← A + B
    A ← B
    B ← C
Fin Pour
```

FIGURE 5

2. Soit $\mathrm{M} = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ une matrice quelconque. Alors

$$\mathrm{AM} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a & b \end{pmatrix}.$$

En d'autres termes, les coefficients de la 1re ligne de AM s'obtiennent en ajoutant les coefficients de la 1re et de la 2de colonne de M, et la 2de ligne de AM est la 1re ligne de M. Nous obtenons ainsi rapidement

$$\mathrm{A}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{A}^3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{A}^4 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{A}^5 = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. *a)* Pour tous entiers naturels $p \geqslant 0$ et $q \geqslant 0$, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{A}^p \times \mathrm{A}^q &= \begin{pmatrix} a_{p+1} & a_p \\ a_p & a_{p-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_{q+1} & a_q \\ a_q & a_{q-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{p+1}a_{q+1} + a_p a_q & a_{p+1}a_q + a_p a_{q-1} \\ a_p a_{q+1} + a_{p-1}a_q & a_p a_q + a_{p-1}a_{q-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Identifions le coefficient de la 2de ligne et de la 1re colonne de la matrice $\mathrm{A}^{p+q}$ avec le coefficient de mêmes coordonnées de la matrice $\mathrm{A}^p \times \mathrm{A}^q$. Il vient

$$a_{p+q} = a_p a_{q+1} + a_{p-1} a_q.$$

*b)* Si l'entier $r$ divise $a_p$ et $a_q$, alors il divise $a_p a_{q+1}$ et $a_{p-1} a_q$, donc leur somme $a_{p+q}$.

*c)* Soient $p \geqslant 1$ et $n \geqslant 1$ deux entiers. On considére la propriété

$$\mathscr{P}(n) : \ a_p \text{ divise } a_{np}.$$

Montrons par récurrence que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 1$.

*Initialisation.* Si $n = 1$, alors $a_{np} = a_p$, donc $a_p$ divise $a_{np}$ : $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

*Hérédité.* Soit $k \geqslant 1$ un entier. Supposons que $\mathscr{P}(k)$ soit vraie. D'après l'hypothèse de récurrence, $a_p$ divise $a_{kp}$, et il est évident que $a_p$ divise aussi

$a_p$. La question 3.b, permet alors de conclure que $a_p$ divise $a_{kp+p} = a_{(k+1)p}$, prouvant ainsi que $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.

*Conclusion.* La propriété est vraie pour $n = 1$ et elle est héréditaire, donc d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier $n \geqslant 1$.

4. *a)* Il nous faut démontrer que la suite $(a_n)$ est strictement croissante à partir de $n = 2$. Comme $a_{n+1} - a_n = a_{n-1}$, il suffit de montrer que $a_n > 0$ pour tout $n \geqslant 1$. Pour cela, démontrons par récurrence sur l'entier $n$ que la propriété

$$\mathscr{P}(n) : a_n > 0 \text{ et } a_{n+1} > 0$$

est vraie pour tout entier $n \geqslant 1$.

*Initialisation.* On sait que $a_1 = 1$ et $a_2 = a_1 + a_0 = 1$, donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

*Hérédité.* Supposons que $\mathscr{P}(k)$ est vraie pour un entier $k \geqslant 1$. On a alors $u_k > 0$ et $u_{k+1} > 0$. Il s'ensuit que $u_{k+2} = u_{k+1} + u_k > 0$, ce qui prouve que $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.

*Conclusion.* La propriété est vraie pour $n = 1$ et est héréditaire, donc d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier $n \geqslant 1$.

Supposons maintenant que $n \geqslant 5$ est un nombre composé. Il existe alors deux entiers $k$ et $l$ tels que $n = kl$ où $2 \leqslant k < n$ et $2 \leqslant l < n$. Puisque $n \geqslant 5$, nécessairement, au moins l'un des deux entiers parmi $k$ et $l$ est supérieur ou égal à 3. Supposons que cela soit $k$. D'après la question précédente, $a_k$ divise $a_n$. Comme $2 < k < n$ et que la suite de Fibonacci est strictement croissante à partir du 3$^{\text{e}}$ terme, on $a_2 < a_k < a_n$, soit $1 < a_k < a_n$, ce qui prouve que $a_n$ n'est pas un nombre premier.

*b)* La réciproque de la propriété que nous venons de démontrer s'énonce ainsi :

> *Soit $n \geqslant 5$ un entier. Si $a_n$ n'est pas premier, alors l'entier $n$ n'est pas premier.*

Elle est fausse ; $a_{19} = 37 \times 113$ est un contre-exemple, puisque $a_{19}$ n'est pas premier alors que 19 est premier.

CORRIGÉ

## Sujet 6

# *Métropole*

22 mai 2018

**Exercice 1** (6 points)
*Commun à tous les candidats*

*Dans cet exercice, on munit le plan d'un repère orthonormé.*

On a représenté ci-dessous la courbe d'équation

$$y = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x} - 2).$$

Cette courbe est appelée une *chaînette.*

On s'intéresse ici aux « arcs de chaînette » délimités par deux points de cette courbe symétriques par rapport à l'axe des ordonnées. Un tel arc est représenté sur le graphique de la figure 1 en trait plein. On définit la « largeur » et la « hauteur » de l'arc de chaînette délimité par les points M et M′ comme indiqué sur le graphique.

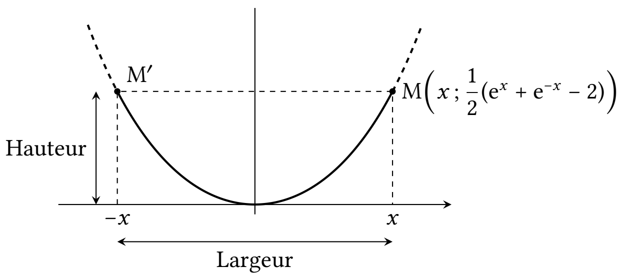



Figure 1

Le but de l'exercice est d'étudier les positions possibles sur la courbe du point M d'abscisse $x$ strictement positive afin que la largeur de l'arc de chaînette soit égale à sa hauteur.

1. Justifier que le problème étudié se ramène à la recherche des solutions strictement positives de l'équation

$$\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x} - 4x - 2 = 0. \qquad (\mathscr{E})$$

2. On note $f$ la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x} - 4x - 2.$$

   *a)* Vérifier que pour tout $x > 0$,

$$f(x) = x\left(\frac{\mathrm{e}^{x}}{x} - 4\right) + \mathrm{e}^{-x} - 2.$$

   *b)* Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

3. *a)* On note $f'$ la fonction dérivée de la fonction $f$. Calculer $f'(x)$, où $x$ appartient à l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

   *b)* Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ équivaut à l'équation

$$(\mathrm{e}^{x})^{2} - 4\mathrm{e}^{x} - 1 = 0.$$

   *c)* En posant $\mathrm{X} = \mathrm{e}^{x}$, montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet pour unique solution réelle le nombre $\ln(2 + \sqrt{5})$.

4. On donne figure 2 page suivante le tableau de signes de la fonction dérivée $f'$ de $f$.

   *a)* Dresser la tableau de variations de la fonction $f$.

   *b)* Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution strictement positive que l'on notera $\alpha$.

5. On considère l'algorithme de la figure 3 page ci-contre où les variables $a$, $b$ et $m$ sont des nombres réels.

| $x$ | $0$ | | $\ln(2+\sqrt{5})$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

FIGURE 2

```
Tant que b − a > 0,1 faire:
    m ⟵ (a + b)/2
    Si e^m + e^(−m) − 4m − 2 > 0 alors:
        b ⟵ m
    Sinon:
        a ⟵ m
    Fin Si
Fin Tant que
```

FIGURE 3

*a)* Avant l'exécution de cet algorithme, les variables $a$ et $b$ contiennent respectivement les valeurs 2 et 3. Que contiennent-elles à la fin de l'exécution de l'algorithme ? On justifiera la réponse en reproduisant et en complétant le tableau de la table 1 page suivante avec les différents valeurs prises par les variables, à chaque étape de l'algorithme.

*b)* Comment peut-on utiliser les valeurs obtenues en fin d'algorithme à la question précédente ?

6. La *Gateway Arch*, édifiée dans la ville de Saint-Louis aux États-Unis, a l'allure ci-contre (figure 4 page 113). Son profil peut être approché par un arc de chaînette renversé dont la largeur est égale à la hauteur.

| $m$ | $a$ | $b$ | $b-a$ |
|---|---|---|---|
| ■ | 2 | 3 | 1 |
| 2,5 | | | |
| … | … | … | … |
| | | | |

TABLE 1

La largeur de cet arc, exprimée en mètre, est égale au double de la solution strictement positive de l'équation

$$\mathrm{e}^{t/39} + \mathrm{e}^{-t/39} - 4\frac{t}{39} - 2 = 0. \qquad (\mathscr{E}')$$

**Exercice 2** (4 points)
*Commun à tous les candidats*

*Les parties A et B de cet exercice sont indépendantes.*

Le virus de la grippe atteint chaque année, en période hivernale, une partie de la population d'une ville. La vaccination contre la grippe est possible ; elle doit être renouvelée chaque année.

## PARTIE A

L'efficacité du vaccin contre la grippe peut être dominuée en fonction des caractéristiques individuelles des personnes vaccinées, ou en raison du vaccin, qui n'est pas toujours totalement adapté aux souches du virus qui circulent. Il est donc possible de contacter la grippe tout en étant vacciné.

Une étude menée dans la population de la ville à l'issue de la période hivernale a permis de constater que :

— 40 % de la population est vaccinée ;

— 8 % des personnes vaccinées on contracté la grippe ;

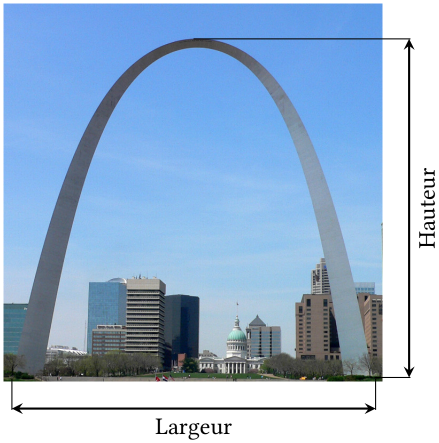



FIGURE 4 – Gateway Arch *par Bev Sykes, licence CC BY 2.0, source Flickr.*

— 20 % de la population a contracté la grippe.

On choisit une personne au hasard dans la population de la ville et on considère les événements :

— V : « la personne est vaccinée contre la grippe » ;

— G : « la personne a contacté la grippe ».

1. *a)* Donner la probabilité de l'événement G.

   *b)* Reproduire l'arbre pondéré de la figure 5 page suivante et compléter les pointillés indiqués sur quatre de ses branches.

2. Déterminer la probabilité que la personne choisie ait contracté la grippe et soit vaccinée.

3. La personne choisie n'est pas vaccinée. Montrer que la probabilité qu'elle ait contracté la grippe est égale à 0,28.

### PARTIE B

*Dans cette partie, les probabilités demandées seront données à* $10^{-3}$ *près.*

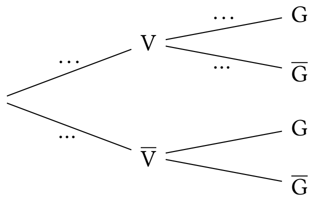



Figure 5

Un laboratoire pharmaceutique mène une étude sur la vaccination contre la grippe dans cette ville.

Après la période hivernale, on interroge au hasard $n$ habitants de la ville, en admettant que ce choix se ramène à $n$ tirages successifs indépendants et avec remise. On suppose que la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la ville soit vaccinée contre la grippe est égale à 0,4. On note X la variable aléatoire égale au nombre de personnes vaccinées parmi les $n$ interrogées.

1. Quelle est la probabilité suivie par la variable aléatoire X ?
2. Dans cette question, on suppose que $n = 40$.
   *a)* Déterminer la probabilité qu'exactement 15 des 40 personnes interrogées soient vaccinées.
   *b)* Déterminer la probabilité qu'au moins la moitié des personnes interrogées soit vaccinée.
3. On interroge un échantillon de 3750 habitants de la ville, c'est-à-dire que l'on suppose ici que $n = 3750$. On note Z la variable aléatoire définie par
$$Z = \frac{X - 1500}{30}.$$
   On admet que la loi de probabilité de la variable aléatoire Z peut être approchée par la loi normale centrée réduite. En utilisant cette approximation, déterminer la probabilité qu'il y ait entre 1450 et 1550 individus vaccinées dans l'échantillon interrogé.

**Exercice 3** (5 points)
*Commun à tous les candidats*

Le but de cet exercice est d'examiner, dans différents cas, si les hauteurs d'un tétraèdre sont concourantes, c'est-à-dire d'étudier l'existence d'un point d'intersection de ses quatre hauteurs.

*On rappelle que dans un tétraèdre* MNPQ, *la hauteur issue de* M *est la droite passant par* M *orthogonal au plan* (NPQ).

## Partie A. Étude de cas particuliers

On considère un cube ABCDEFGH (figure 6).

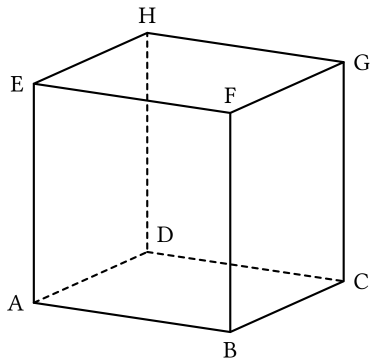



Figure 6

On admet que les droites (AG), (BH), (CE) et (DF), appelées *grandes diagonales* du cube, sont concourantes.

1. On considère le tétraèdre ABCE.
   *a)* Préciser la hauteur issue de E et la hauteur issue de C dans ce tétraèdre.
   *b)* Les quatre hauteurs du tétraèdre ABCE sont-elles concourantes ?
2. On considère le tétraèdre ACHF et on travaille dans le repère $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.
   *a)* Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (ACH) est $x - y + z = 0$.

*b)* En déduire que (FD) est la hauteur issue de F du tétraèdre ACHF.

*c)* Par analogie avec le résultat précédent, préciser les hauteurs du tétraèdre ACHF issues respectivement des sommets A, C et H. Les quatre hauteurs du tétraèdre ACHF sont-elles concourantes ?

Dans la suite de cet exercice, un tétraèdre dont les quatre hauteurs sont concourantes sera appelé un *tétraèdre orthocentrique*.

### Partie B. Une propriété des tétraèdres orthocentriques

Dans cette partie, on considère un tétraèdre MNPQ (figure 7) dont les hauteurs issues des sommets M et N sont sécantes en un point K. Les droites (MK) et (NK) sont donc orthogonales aux plans (NPQ) et (MPQ).

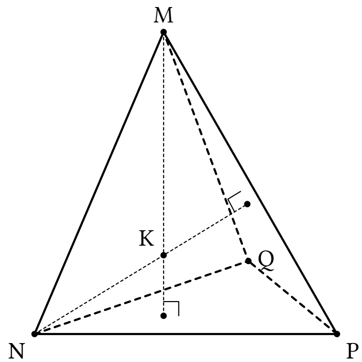



Figure 7

1. *a)* Justifier que la droite (PQ) est orthogonale la droite (MK) ; on admet de même que les droites (PQ) et (NK) sont orthogonales.

   *b)* Que peut-on en déduire de la question précédente relativement à la droite (PQ) et au plan (MNK) ? Justifier la réponse.

2. Montrer que les arêtes [MN] et [PQ] sont orthogonales.

Ainsi, on obtient la propriété suivante :

*Si un tétraèdre est orthocentrique, alors ses arêtes opposées sont orthogonales deux à deux.*

On dit que deux arêtes d'un tétraèdre sont *opposés* lorsqu'elles n'ont pas de sommet en commun.

### Partie C. Application

Dans un repère orthonormé, on considère les points :

$$R(-3\,;5\,;2),\quad S(1\,;4\,;62),\quad T(4\,;-1\,;5)\quad \text{et}\quad U(4\,;7\,;3).$$

Le tétraèdre RSTU est-il orthocentrique ? Justifier.

**Exercice 4** (5 points)

*Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité*

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\vec{u},\vec{v})$. On pose $z_0 = 8$ et, pour tout entier naturel $n$ :

$$z_{n+1} = \frac{3-\mathrm{i}\sqrt{3}}{4}z_n.$$

On note $\mathrm{A}_n$ le point du plan affixe $z_n$.

1. *a)* Vérifier que
$$\frac{3-\mathrm{i}\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6}.$$
   *b)* En déduire l'écriture de chacun des nombres complexes $z_1$, $z_2$, $z_3$ sous forme exponentielle et vérifier que $z_3$ est un imaginaire pur dont on précisera la partie imaginaire.
   *c)* Représenter graphique les points $\mathrm{A}_0$, $\mathrm{A}_1$, $\mathrm{A}_2$ et $\mathrm{A}_3$ ; on prendra pour unité le centimètre.
2. *a)* Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$,
$$z_n = 8\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\pi/6}.$$

*b)* Pour tout entier naturel $n$, on pose $u_n = \|z_n\|$. Déterminer la nature et la limite de la suite $(u_n)$.

3. *a)* Démontrer que, pour tout entier naturel $k$,

$$\frac{z_{k+1} - z_k}{z_{k+1}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{i}.$$

En déduire que, pour tout entier naturel $k$, on a l'égalité

$$\mathrm{A}_k\mathrm{A}_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{OA}_{k+1}.$$

*b)* Pour tout entier naturel $n$, on appelle $\ell_n$ la longueur de la ligne brisée reliant dans cet ordre les points $\mathrm{A}_0$, $\mathrm{A}_1$, $\mathrm{A}_2$, …, $\mathrm{A}_{n-1}$, $\mathrm{A}_n$. On a ainsi

$$\ell_n = \mathrm{A}_0\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_1\mathrm{A}_2 + \cdots + \mathrm{A}_{n-1}\mathrm{A}_n.$$

Démontrer que la suite $(\ell_n)$ est convergente et calculer sa limite.

**Exercice 4** (5 points)
*Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité*

## Partie A

On considère l'équation suivante dont les inconnues $x$ et $y$ sont des entiers naturels :

$$x^2 - 8y^2 = 1. \qquad (\mathscr{E})$$

1. Déterminer un couple solution $(x\,;y)$ où $x$ et $y$ sont deux entiers naturels.
2. On considère la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. On définit les suites d'entiers naturels $(x_n)$ et $(y_n)$ par $x_0 = 1$, $y_0 = 0$ et, pour tout entier naturel $n$,

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \mathrm{A}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}.$$

*a)* Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n$, le couple $(x_n\,;y_n)$ est solution de l'équation $(\mathscr{E})$.

*b)* En admettant que la suite $(x_n)$ est à valeurs strictement positives, démontrer que pour tout entier naturel $n$, on a $x_{n+1} > x_n$.

3. En déduire que l'équation $(\mathscr{E})$ admet une infinité de couples solutions.

### Partie B

Un entier naturel $n$ est appelé un *nombre puissant* lorsque, pour tout diviseur premier $p$ de $n$, $p^2$ divise $n$.

1. Vérifier qu'il existe deux nombres entiers consécutifs inférieurs à 10 qui sont puissants.

L'objectif de cette partie est de démontrer, à l'aide des résultats de la partie A, qu'il existe une infinité de couples de nombres entiers naturels consécutifs puissants et d'en trouver quelques exemples.

2. Soient $a$ et $b$ deux entiers naturels. Montrer que l'entier naturel $n = a^2b^3$ est un nombre puissant.
3. Montrer que si $(x\,;y)$ est un couple solution de l'équation $(\mathscr{E})$ définie dans la partie A, alors $x^2 - 1$ et $x^2$ sont des entiers consécutifs puissants.
4. Conclure quant à l'objectif fixé pour cette partie, en démontrant qu'il existe une infinité de couples de nombres entiers consécutifs puissants. Déterminer deux nombres entiers consécutifs puissants supérieurs à 2018.

## Exercice 1

*Commun à tous les candidats*

1. La largeur de la chaînette est égale à $x - (-x) = 2x$. Sa hauteur est égale à $\frac{1}{2}(e^x + e^{-x} - 2)$ ; en effet, on vérifie par le calcul que le sommet de la chaînette a pour coordonnées $(0\,;0)$ et d'après l'inégalité arithmético-géométrique, on a

$$\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \geqslant \sqrt{e^x e^{-x}} = \sqrt{e^0} = 1,$$

donc

$$\frac{1}{2}(e^x + e^{-x} - 2) \geqslant 0.$$

Il s'ensuit que la hauteur et la largeur sont égales si et seulement si

$$2x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x} - 2)$$

c'est-à-dire

$$e^x + e^{-x} - 4x - 2 = 0.$$

*Remarque.* On appelle *inégalité arithmético-géométrique* l'inégalité

$$\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2},$$

où $a$ et $b$ sont deux nombres réels positifs. Sa démonstration est triviale :

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{(\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b}}{2} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{2} \geqslant 0.$$

*Remarque.* Nous ne pouvons pas nous fier au graphique de la figure 1 page 109 pour déterminer le signe de $\frac{1}{2}(e^x + e^{-x} - 2)$ car son axe des ordonnées n'est pas orienté.

2. *a)* Pour tout réel $x > 0$,

$$f(x) = x \times \frac{e^x}{x} - 4 \times x + e^{-x} - 2 = x\left(\frac{e^x}{x} - 4\right) + e^{-x} - 2.$$

*b)* Afin d'éviter une limite indéterminée, utilisons l'écriture de $f$ de la question précédente. On a

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty,$$

d'où

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{e^x}{x}-4=+\infty,$$

puis

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}x\left(\frac{e^x}{x}-4\right)=+\infty.$$

On a aussi

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}e^{-x}-2=-2 \quad \text{car} \quad \begin{cases}\displaystyle\lim_{x\longrightarrow+\infty}-x=-\infty\\ \displaystyle\lim_{x\longrightarrow-\infty}e^x=0,\end{cases}$$

par conséquent,

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}f(x)=+\infty.$$

3. *a)* Pour tout réel $x\geqslant 0$, on a

$$f'(x)=e^x-e^{-x}-4.$$

*b)* Comme la fonction exponentielle ne s'annule pas, les équations $f'(x)=0$ et $e^xf'(x)=0$ sont équivalentes. Or

$$e^xf'(x)=(e^x)^2-e^xe^{-x}-4e^x=(e^x)^2-e^0-4e^x=(e^x)^2-1-4e^x,$$

donc l'équation $f'(x)=0$ équivaut à l'équation

$$(e^x)^2-4e^x-1=0.$$

*c)* En posant $X=e^x$, l'équation ci-dessus s'écrit

$$X^2-4X-1=0.$$

Le polynôme est facile à factoriser :

$$X^2-4X-1=(X-2)^2-5=(X-2-\sqrt{5})(X-2+\sqrt{5}),$$

donc nous avons deux solutions : $2+\sqrt{5}$ et $2-\sqrt{5}$. Revenons à $x$. L'équation $e^x=2+\sqrt{5}$ a pour unique solution $\ln(2+\sqrt{5})$. Elle est positive car $2+\sqrt{5}\geqslant 1$.

| $x$ | $0$ | | $\ln(2+\sqrt{5})$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | | |
| Variations de $f$ | $0$ | $\searrow$ | $2\sqrt{5}-2-4\ln(2+\sqrt{5})<0$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

FIGURE 8

L'équation $e^x = 2-\sqrt{5}$ n'a pas de solution car $2-\sqrt{5}<0$. Finalement, $\ln(2+\sqrt{5})$ est l'unique solution de l'équation $f'(x)=0$ sur $[0\,;+\infty[$.

*Remarque.* On peut bien sûr résoudre l'équation $X^2-4X-1=0$ par la méthode du discriminant, mais c'est bien moins élégant.

4. *a)* Voir le tableau de variations de la figure 8.
Le minimum de la fonction $f$ est

$$\begin{aligned}
f\left(\ln(2+\sqrt{5})\right) &= 2+\sqrt{5}+\frac{1}{2+\sqrt{5}}-4\ln(2+\sqrt{5})-2\\
&= \sqrt{5}+\frac{2-\sqrt{5}}{(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})}-4\ln(2+\sqrt{5})\\
&= 2\sqrt{5}-2-4\ln(2+\sqrt{5})
\end{aligned}$$

Or $2\sqrt{5}-2>2\times 2{,}5-2=3$ et $4\ln(2+\sqrt{5})<4\ln(e)=4$, donc

$$f\left(\ln(2+\sqrt{5})\right)<0.$$

*b)* Sur l'intervalle $[0\,;\ln(2+\sqrt{5})]$, la fonction $f$ est strictement décroissante et $f(0)=0$, donc l'équation $f(x)=0$ n'a pas de solution sur $]0\,;\ln(2+\sqrt{5})]$.
Sur l'intervalle $[\ln(2+\sqrt{5})\,;+\infty[$, la fonction $f$ est continue, strictement monotone, $f\left(\ln(2+\sqrt{5})\right)<0$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, donc d'après un

corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[\ln(2+\sqrt{5}) ; +\infty]$.

Nous avons montré que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution strictement positive.

5. *a)* Voir la table 2.

| $m$ | $a$ | $b$ | $b-a$ |
|---|---|---|---|
| ■ | 2 | 3 | 1 |
| 2,5 | 2 | 2,5 | 0,5 |
| 2,25 | 2,25 | 2,5 | 0,25 |
| 2,375 | 2,375 | 2,5 | 0,125 |
| 2,4375 | 2,4375 | 2,5 | 0,0625 |

TABLE 2

*b)* Chaque étape de l'algorithme fournit un encadrement de $\alpha$ de plus en plus précis. À la fin, on obtient l'encadrement

$$2{,}4375 \leqslant \alpha \leqslant 2{,}5.$$

6. Notons H la hauteur de l'arche en mètre. On remarque que l'équation $(\mathcal{E}')$ est de la forme

$$f\left(\frac{t}{39}\right) = 0.$$

Par conséquent, l'équation $(\mathcal{E}')$ est équivalente à l'équation

$$\frac{t}{39} = \alpha,$$

dont l'unique solution est $39\alpha$, d'où $\mathrm{H} = 78\alpha$. La question précédente fournit l'encadrement suivant de H :

$$78 \times 2{,}4375 \leqslant \mathrm{H} \leqslant 78 \times 2{,}5$$

soit

$$190{,}125 \leqslant H \leqslant 195.$$

L'arche a une hauteur comprise en 190 m et 195 m.

## Exercice 2

*Commun à tous les candidats*

### Partie A

1. *a)* Puisque 20 % de la population a contracté la grippe, on a $\mathbb{P}(G) = 0{,}20$.

   *b)* Voir la figure 9.

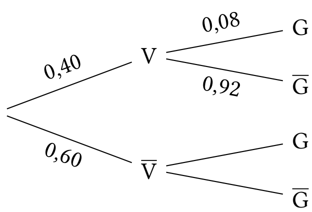



Figure 9

2. La probabilité que la personne choisie ait contracté la grippe et soit vaccinée est égale à
$$\mathbb{P}(G \cap V) = \mathbb{P}_V(G)\mathbb{P}(V) = 0{,}40 \times 0{,}08 = 0{,}032.$$

3. À l'aide de la formule des probabilités totales, on trouve
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(G) &= \mathbb{P}(\overline{V})\mathbb{P}_{\overline{V}}(G) + \mathbb{P}(V)\mathbb{P}_V(G)\\ &= 0{,}60\mathbb{P}_{\overline{V}}(G) + 0{,}032.\end{aligned}$$

   Or à la question A.1.a, on a prouvé que $\mathbb{P}(G) = 0{,}20$, donc la probabilité qu'une personne qui n'est pas vaccinée ait contracté la grippe est égale à
$$\mathbb{P}_{\overline{V}}(G) = \frac{0{,}20 - 0{,}032}{0{,}60} = 0{,}28.$$

### Partie B

1. L'interrogatoire peut être vu comme une répétition de $n$ épreuves de Bernoulli indépendantes dont la probabilité du succès, « la personne est vaccinée », est égale à 0,4. Par conséquent, la variable aléatoire X qui compte le nombre de succès suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n\,;0{,}4)$.

2. *a)* La probabilité qu'exactement 15 des 40 personnes intérogées soient vaccinées est égale à

$$\mathbb{P}(X = 15) = \binom{40}{15} 0{,}4^{15} \times 0{,}6^{25} \approx 0{,}123.$$

   *b)* La probabilité qu'au moins la moitié des personnes interogées soit vaccinée est égale à
$$\mathbb{P}(X \geqslant 20) = 1 - \mathbb{P}(X \leqslant 19) \approx 0{,}130.$$

3. L'inégalité $1450 \leqslant X \leqslant 1550$ est équivalente à l'inégalité $-5/3 \leqslant Z \leqslant 5/3$, donc la probabilité qu'il y ait entre 1450 et 1550 individus vaccinés dans l'échantillon est égale à

$$\mathbb{P}(1450 \leqslant X \leqslant 1550) = \mathbb{P}\left(-\frac{5}{3} \leqslant Z \leqslant \frac{5}{3}\right) \approx 0{,}904.$$

*Remarque.* L'approximation de la binomiale par la loi normale centrée réduite justifiée par le théorème de Moivre-Laplace ne présente aujourd'hui plus aucun intérêt pratique grâce aux outils de calcul scientifique.

Session Python

```
In [1]: from sympy import *
In [2]: sum([ binomial(3750,k)*S('2/5')**k*S('3/5')**(3750-k)
   ...:       for k in range(1450,1551) ]).n(32)
Out[2]: 0.90438949037146506292878348362467
```

## Exercice 3

*Commun à tous les candidats*

### Partie A. Étude de cas particuliers

1. *a)* Les faces d'un cube sont des carrés, donc la droite (EA) est perpendiculaire aux droites sécantes (AD) et (AB) du plan (ABD), donc (EA) est orthogonale au plan (ABD), prouvant ainsi que la droite (EA) est la hauteur issue de E du tétraèdre ABCE.

   Exactement de la même manière, on montre que (BC) est la hauteur issue de C du tétraèdre ABCE.

   *b)* Les droites (AE) et (BC) appartiennent à des plans parallèles distincts, elles ne sont donc pas sécantes. Par conséquent, les hauteurs du tétraèdre ABCE ne sont pas concourantes.

2. *a)* L'équation $x - y + z = 0$ est de la forme $ax + by + cz + d = 0$, c'est donc une équation cartésienne de plan. Les coordonnés du point A sont $(0\,;0\,;0)$, celles de C sont $(1\,;1,0)$ et celles de H sont $(0\,;1\,;1)$. Les coordonnées de ses trois points vérifient l'équation $x - y + z = 0$, celle-ci est donc une équation du plan (ACH).

   *b)* D'après la question précédente, le vecteur $\vec{n}(1\,;-1\,;1)$ est un vecteur normal au plan (ACH). Les coordonnées du point D sont $(0\,;1\,;0)$ et celles du point F sont $(1\,;0\,;1)$, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{FD}$ sont donc $(-1\,;1\,;-1)$. On remarque que $\overrightarrow{FD} = -\vec{n}$, il s'ensuit que le vecteur $\overrightarrow{FD}$ est un normal au plan (ACH), ce qui prouve que la droite (FD) est bien la hauteur issue du sommet F du tétraèdre ACHF.

   *c)* Compte tenu des symétries du cube, la question précédente montre que dans un tétraèdre dont les arêtes sont des diagonales des faces du cube, les hauteurs sont les « grandes diagonales ». Par conséquent, dans le tétraèdre ACHF, la hauteur issue du sommet A est la droite (AG), celle issue du sommet C est la droite (CE) et celle issue du sommet H est la droite (BH)., Étant donné que les grandes diagonales d'un cube sont concourantes, nous en déduisons donc que les hauteurs du tétraèdre ACHF sont concourantes.

### Partie B. Une propriété des tétraèdres orthocentriques

1. *a)* La droite (MK) étant orthogonal au plan (NPQ), elle est orthogonale à toute droite de ce plan, donc en particulier à la droite (PQ).
   *b)* La droite (PQ) est orthogonale à deux droites sécantes, (NK) et (MK), du plan (MNK), donc la droite (PQ) est orthogonale au plan (MNK).
2. La droite (PQ) étant orthogonale au plan (MNK), elle est orthogonale à toute droite de ce plan, donc en particulier à la droite (MN). Autrement dit, les arêtes [MN] et [PQ] sont orthogonales.

### Partie C. Application

Si le tétraèdre RSTU est orthocentrique, alors ses arêtes opposées sont orthogonales deux à deux. Les vecteurs $\overrightarrow{RT}(7\,;-6\,;3)$ et $\overrightarrow{SU}(3\,;3\,;5)$ ne sont pas orthogonaux ; en effet, le repère étant orthonormé, on a

$$\overrightarrow{RT}\cdot\overrightarrow{SU} = 7\times 3+(-6)\times 3+3\times 5 = 18 \neq 0.$$

Les arêtes opposées [RT] et [SU] n'étant pas orthogonales, le tétraèdre RSTU n'est pas orthocentrique.

## Exercice 4

*Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité*

1. *a)* On a

$$\frac{3-\mathrm{i}\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\mathrm{i}\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6}.$$

   *b)* Nous pouvons donc réécrire la relation de récurrence qui définit la suite $(z_n)$ sous la forme suivante

$$z_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6}z_n.$$

   Elle montre que l'on passe d'un terme de la suite au suivant en multipliant le module par $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et en ajoutant $-\frac{\pi}{6}$ à l'argument. On trouve ainsi très rapidement les formes exponentielles de $z_1$, $z_2$ et $z_3$ :

$$z_1 = 4\sqrt{3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6}, \quad z_2 = 6\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3} \quad \text{et} \quad z_3 = 3\sqrt{3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2}.$$

Un argument de $z_3$ est $-\frac{\pi}{2}$, donc $z_3$ est un imaginaire pur ; comme $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2} = -\mathrm{i}$, sa partie imaginaire est égale à $-3\sqrt{3}$.

*c)* Voir la figure 10.

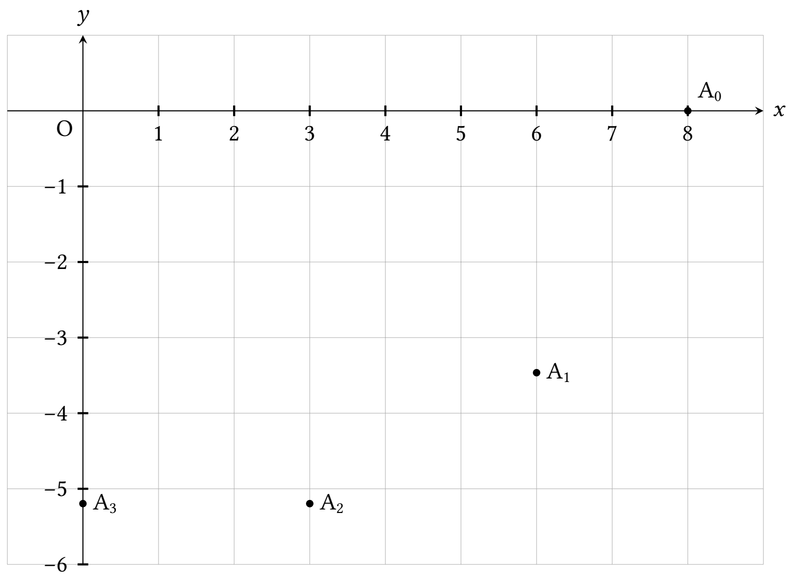



FIGURE 10

2. *a)* Démontrons par récurrence sur l'entier $n$ que

$$z_n = 8\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\pi/6}.$$

*Initialisation.* On a $8\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^0 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\times 0\times\pi/6} = 8$ et $z_0 = 8$, donc la propriété est vrai au rang $n = 0$.

*Hérédité.* Soit $k$ un entier naturel. Supposons la propriété vraie au rang $n = k$. On a alors

$$z_{k+1} = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6} z_k = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6} \times 8\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^k \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\pi/6} = 8\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{k+1} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k+1)\pi/6},$$

donc la propriété est vraie au rang $n = k + 1$.

*Conclusion.* D'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel $n$, on a

$$z_n = 8\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\pi/6}.$$

*b)* Soit $n$ un entier naturel. La formule démontrée à la question précédente est la forme exponentielle de $z_n$. Le terme général de la suite $(u_n)$ s'en déduit immédiatement :

$$u_n = 8\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \qquad (n \geqslant 0).$$

On reconnaît le terme général d'une suite géométrique de raison $q = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et de premier terme $u_0 = 8$. Comme $-1 < q < 1$, la suite $(u_n)$ est convergente de limite 0.

3. *a)* Soit $k$ un entier naturel. À partir de $z_{k+1} = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6} z_k$, on obtient

$$\frac{z_{k+1} - z_k}{z_{k+1}} = 1 - \frac{z_k}{z_{k+1}} = 1 - \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6} = 1 - \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{i}.$$

On en déduit, que pour tout entier naturel $n$, on a

$$z_{k+1} - z_k = -\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{i} z_k,$$

d'où

$$|z_{k+1} - z_k| = \frac{1}{\sqrt{3}}|z_k|,$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{A}_k\mathrm{A}_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{OA}_k.$$

*b)* Soit $n \geqslant 1$ un entier. D'après question précédente, on a

$$l_n = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{OA}_k = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{k=1}^{n} u_k.$$

D'après la question 2.b, pour tout entier $k \geqslant 0$, on a

$$u_k = u_0 q^k = 8\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^k.$$

Donc

$$l_n = \frac{1}{\sqrt{3}} u_0 \sum_{k=1}^{n} q^k = \frac{1}{\sqrt{3}} u_0 q \sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1}{\sqrt{3}} u_0 q \frac{1-q^n}{1-q}.$$

Comme $-1 < q < 1$, on a

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} q^n = 0,$$

si bien que la suite $(l_n)$ converge et sa limite est

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} l_n = \frac{1}{\sqrt{3}} u_0 \frac{q}{1-q} = \frac{8}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{8}{2-\sqrt{3}} = \frac{8(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})},$$

soit

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} l_n = 16 + 8\sqrt{3}.$$

## Exercice 4

*Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité*

### Partie A

1. Le couple $(3\,;1)$ est une solution évidente.

   *Remarque.* Il y a bien la solution triviale $(1\,;0)$, mais elle est donnée à la question suivante et il faut quand même mériter son $\frac{1}{2}$ point.

2. *a)* Montrons par récurrence sur l'entier $n$ que le couple $(x_n\,;y_n)$ est une solution de l'équation $(\mathscr{E})$.

*Initialiation.* On vérifie sans trop de peine que $1^2 - 8 \times 0^2 = 1$, donc $(x_0 ; y_0)$ est une solution de l'équation.

*Hérédité.* Soit $k$ un entier naturel. Faisons l'hypothèse que le couple $(x_k ; y_k)$ est une solution de l'équation. La relation matricielle

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix},$$

donne

$$\begin{cases} x_{k+1} = 3x_k + 8y_k \\ y_{k+1} = x_k + 3y_k. \end{cases}$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned} x_{k+1}^2 - 8y_{k+1}^2 &= (3x_k + 8y_k)^2 - 8(x_k + 3y_k)^2 \\ &= 9x_k^2 + 48x_k y_k + 64y_k^2 - 8x_k^2 - 48x_k y_k - 72y_k^2 \\ &= x_k^2 - 8y_k^2. \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse de récurrence $x_k^2 - 8y_k^2 = 1$, donc

$$x_{k+1}^2 - 8y_{k+1}^2 = 1,$$

prouvant ainsi que le couple $(x_{k+1} ; y_{k+1})$ est une solution.

*Conclusion.* Nous savons que le couple $(x_0 ; y_0)$ est une solution et pour tout entier naturel $k$, si $(x_k ; y_k)$ est une solution alors $(x_{k+1} ; y_{k+1})$ est une solution, donc d'après le principe de récurrence, le couple $(x_n ; y_n)$ est, pour tout entier naturel $n$, une solution de l'équation $(\mathcal{E})$.

*b)* Soit $n$ un entier naturel. Rappelons que l'on a $x_{n+1} = 3x_n + 8y_n$, $x_n > 0$ et $y_n \geqslant 0$, donc

$$x_{n+1} = x_n + (2x_n + 8y_n) > x_n.$$

3. Supposons que l'équation $(\mathcal{E})$ ait un nombre fini de solutions. Alors l'ensemble $\{(x_0 ; y_0), (x_1 ; y_1), (x_2 ; y_2), \ldots\}$ est fini. En conséquence, l'ensemble $\{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ est lui aussi fini et il posséde donc un plus grand élément $x_p$.

Par conséquent, on doit avoir $x_{p+1} \leqslant x_p$. Or à la question A.2.b, nous avons démontré que $x_{p+1} > x_p$. Cette contradiction nous permet de conclure que l'équation $(\mathscr{E})$ a une infinité de solutions.

> *Solution alternative.* Supposons que l'équation $(\mathscr{E})$ ait un nombre fini de solutions. Alors l'ensemble des couples $S = \{(x_0\,;y_0), (x_1\,;y_1), (x_2\,;y_2)\ldots\}$ est fini. La suite $\big((x_n, y_n)\big)_{n\geqslant 0}$ comporte une infinité de termes, par conséquent, d'après le principe des tiroirs, il existe deux entiers distincts $p$ et $q$ tels que $(x_p\,;y_p) = (x_q\,;y_q)$. On a alors $x_p = x_q$. Ceci est en contradiction avec la croissance stricte de la suite $(x_n)$ démontrée à la question A.2.b. Nous en déduisons que l'équation $(\mathscr{E})$ a une infinité de solutions.

## Partie B

1. Les entiers $2^3 = 8$ et $3^2 = 9$ sont des nombres puissants consécutifs.

2. Soit $p$ un diviseur premier de $n$. Alors $p$ divise $a$ ou $b$ :

   — Si $p$ divise $a$, alors $p^2$ divise $a^2$. Comme $a^2$ divise $n$, nécessairement $p^2$ divise $n$.

   — Si $p$ divise $b$, alors $p^2$ divise $b^2$. Or $b^2$ divise $b^3$, donc $p^2$ divise $b^3$. Comme $b^3$ divise $n$, alors $p^2$ divise $n$.

   Nous avons démontré que $n$ est un nombre puissant.

3. Soit $(x\,;y)$ une solution de l'équation $(\mathscr{E})$. Alors $x^2 - 1 = 8y^2 = 2^3y^2$ et $x^2 = x^2 0^3$, donc $x^2$ et $x^2 - 1$ sont des nombres puissants d'après la question précédente. Il est clair que $x^2 - 1$ et $x^2$ sont deux entiers consécutifs.

4. L'équation $(\mathscr{E})$ a une infinité de solutions. De plus, à deux couples $(x\,;y)$ et $(x'\,;y')$ de solutions distincts de l'équation $(\mathscr{E})$ correspondent des couples distincts d'entiers consécutifs puissants $(x^2 - 1\,;x^2)$ et $(x'^2 - 1\,;x'^2)$ ; en effet, $x^2 = x'^2$ entraîne $x = x'$ puisque $x$ et $x'$ sont des entiers positifs. Par conséquent, il existe une infinité de couples de nombres consécutifs puissants.

   Les couples $(x_n\,;y_n)$ donnent des couples d'entiers consécutifs puissants ; en outre, la suite $(x_n)$ étant une suite d'entiers strictement croissante, il existe forcément un entier N tel que que $x_N^2 - 1 \geqslant 2018$, c'est-à-dire tel que $x_N \geqslant 45$. Calculons donc les premiers termes de la suite $(x_n)$. On a

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 6 \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 17 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 99 \\ 35 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Les entiers $99^2 - 1 = 9800$ et $99^2 = 9801$ sont deux entiers consécutifs puissants supérieurs à 2018.

# Sujet 7

## *Polynésie*

20 juin 2018

**Exercice 1** (5 points)
*Commun à tous les candidats*

*Rappel de connaissances*

L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % est donné par la formule

$$\left[p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\,;\, p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

où $n$ désigne la taille de l'échantillon et $p$ la proportion des individus possédant la caractère étudié dans cette population. Les conditions e valiité de cette intervalle sont les suivantes :

$$n \geqslant 30, \quad np \geqslant 5, \quad n(1-p) \geqslant 5.$$

La municipalité d'une grande ville dispose d'un stock de DVD qu'elle propose en location aux usagers des différentes médiathèques de cette ville. Afin de renouveller son offre de location, la municipalité décide de retirer des DVD de son stock. Parmi les DVD retirés, certains sont défectueux, d'autres non. Parmi les 6 % de DVD défectueux sur l'ensemble du stock, 98 % sont retirés. On admet par ailleurs que parmi les DVD non défectueux, 92 % sont maintenus dans le stock ; les autres sont retirés.

*Les trois parties sont indépendantes.*

### Partie A

On choisit un DVD au hasard dans le stock de la municipalité. On considère les événements suivants :

— D : « le DVD est défectueux » ;

— R : « le DVD est retiré du stock ».

On note $\overline{\mathrm{D}}$ et $\overline{\mathrm{R}}$ les événements contraires respectifs des événements D et R.

1. Démontrer que la probabilité de l'événement R est 0,134.
2. Une association caricative contacte la municipalité dans l'objectif de récupérer l'ensemble des DVD qui sont retirés du stock. Un responsable de la ville affirme alors que parmi ces DVD retirés, plus de la moitié est composée de DVD défectueux. Cette affirmation est-elle vraie ?

### Partie B

Une des médiathèques de la ville se demande si le nombre de DVD défectueux qu'elle possède n'est pas anormalement élevé. Pour cela, elle effectue des tests sur un échantillon de 150 DVD de son propre stock qui est suffisamment important pour que cet échantillon soit assimilé à un tirage successif avec remise. Sur cet échantillon, on détecte 14 DVD défectueux. Peut-on rejeter l'hypothèse selon laquelle, dans cette médiathèque, 6 % des DVD sont défectueux ?

### Partie C

Une partie du stock de DVD de la ville est constituée de DVD de films d'animation destinés au jeune public. On choisit un film d'animation au hasard et on note X la variable aléatoire qui donne la durée, en minutes, de ce film. X suit une loi normale d'espérance $\mu = 80$ min et d'écart-type $\sigma$. De plus, on estime que $\mathbb{P}(X \geqslant 92) = 0{,}10$.

1. Déterminer le réel $\sigma$ et en donner une valeur approchée à 0,01.
2. Un enfant regare un film d'animation dont il ne connaît pas la durée. Sachant qu'il en a déjà vu une heure et demie, quelle est la probabilité que le film se termine dans les cinq minutes qui suivent ?

**Exercice 2** (6 points)
*Commun à tous les candidats*

Dans cet exercice, on s'intéresse au volume d'une ampoule basse consommation.

### Partie A. Modélisation de la forme de l'ampoule

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. On considère les points $A(-1\,;1)$, $B(0\,;1)$, $C(4\,;3)$, $D(7\,;0)$, $E(4\,;-3)$, $F(0\,;-1)$ et $G(-1\,;-1)$. On modélise la section de l'ampoule par un plan passant par son axe de révolution à l'aide de la figure 1.

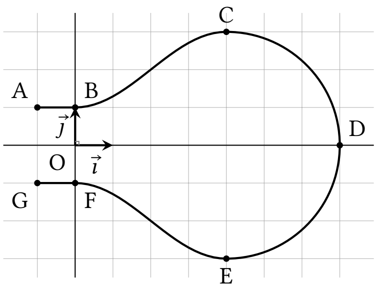



FIGURE 1

La partie de la courbe située au-dessus de l'axe des abscisses se décompose de la manière suivante :

— la portion située entre les points A et B est la représentation graphique de la fonction constante $h$ définie sur l'intervalle $[-1\,;0]$ par $h(x) = 1$ ;

— la portion située entre les points B et C est la représentation graphique d'une fonction $f$ définie sur l'intervalle $[0\,;4]$ par

$$f(x) = a + b\sin\left(c + \frac{\pi}{4}x\right),$$

où $a$, $b$ et $c$ sont des réels non nuls fixés et où le réel $c$ appartient à l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

— la portion située entre les points C et D est un quart de cercle de diamètre [CE].

La partie de la courbe située en-dessous de l'axe des abscisses est obtenue par symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

1. *a)* On appelle $f'$ la fonction dérivée de la fonction $f$. Pour tout réel $x$ de l'intervalle $[0\,;4]$, déterminer $f'(x)$.

   *b)* On impose que les tangentes aux points B et C à la représentation graphique de la fonction $f$ soient parallèles à l'axe des abscisses. Déterminer la valeur du réel $c$.

2. Déterminer les réels $a$ et $b$.

### Partie B. Approximation du volume de l'ampoule

Par rotation de la figure 1 page précédente autour de l'axe des abscisses, on obtient un modèle de l'ampoule. Afin d'en calculer le volume, on la décompose en trois parties comme illustré sur la figure 2.

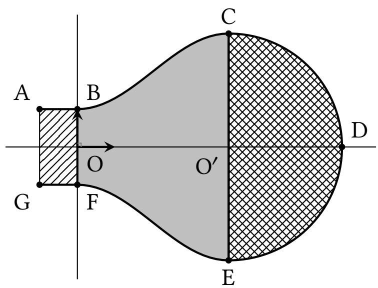



Figure 2 – *Vue dans le plan* (BCE)

On rappelle que :

— le volume d'un cylindre est donné par la formule $\pi r^2 h$ où $r$ est le rayon du disque de base et $h$ la hauteur ;

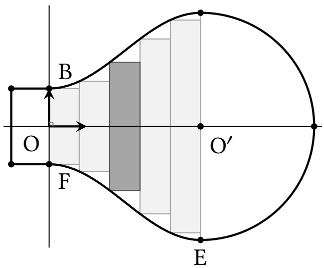
— le volume d'une boule de rayon $r$ est donné par la formule $\frac{4}{3}\pi r^3$.

On admet également que, pour tout réel $x$ de l'intervalle $[0\,;4]$,

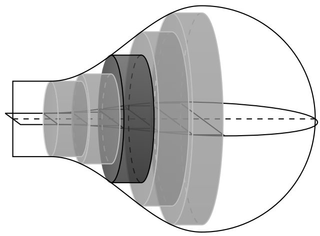
$$f(x) = 2 - \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right).$$

1. Calculer le volume du cylindre de section le rectangle ABFG.
2. Calculer le volume de la demi-sphère de section le demi-disque de diamètre [CE].
3. Pour approcher le volume du solide de section la zone grisée BCEF, on partage le segment $[\mathrm{OO}']$ en $n$ segments de même longueur $\frac{4}{n}$ puis on construit $n$ cyclindres de même hauteur $\frac{4}{n}$.

   *a)* *Cas particulier.* Dans cette question uniquement on choisit $n = 5$. Calculer le volume du troisième cyclindre gris dans la figure 3, puis en donner la valeur arrondie à $10^{-2}$.




(a) *Vue dans le plan* (BCE)



(b) *Vue dans l'espace*

FIGURE 3

   *b)* *Cas général.* Dans cette question, $n$ désigne un entier naturel quelconque non nul. On approche le volume du solide de section BCEF par la somme des volumes des $n$ cyclindres ainsi créés en choisissant une valeur de $n$ suffisamment grande. Recopier et compléter l'algorithme de la figure 7 page 149 de sorte qu'à la fin de son exécution, la variable V contienne la somme des volumes des $n$ cyclindres crées lorsque l'on saisit $n$.

$V \leftarrow 0$
Pour $k$ allant de … à … :
    $V \leftarrow$ …
Fin Pour

FIGURE 4

**Exercice 3** (4 points)
*Commun à tous les candidats*

On considère la fonction $f$ définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par

$$f(x) = k\mathrm{e}^{-kx}$$

où $k$ est un nombre réel strictement positif. On appelle $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique (figure 5) dans le repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. On considère le point A de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse 0 et le point B de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse 1. Le point C a pour coordonnées $(1\,;0)$.

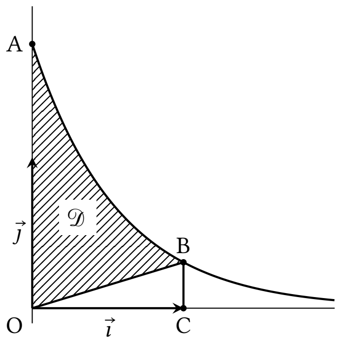



FIGURE 5

1. Déterminer une primitive de la fonction $f$ sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

2. Exprimer, en fonction de $k$, l'aire du triangle OCB et celle du domaine $\mathscr{D}$ délimité par l'axe des ordonnées, la courbe $\mathscr{C}_f$ et le segment [OB].
3. Montrer qu'il existe une unique valeur du réel $k$ strictement positive telle que l'aire du domaine $\mathscr{D}$ vaut le double de celle du triangle OCB.

**Exercice 4** (5 points)
*Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité*

Un lapin se déplace dans un terrier composé de trois galeries, notées A, B et C, dans chacune desquelles il est confronté à un stimulus particulier. À chaque fois qu'il est soumis à un stimulus, le lapin reste dans la galerie où il se trouve ou change de galerie. Cela constitue une étape.

Soit $n$ un entier naturel. On note $a_n$ la probabilité de l'événement « le lapin est dans la galerie A à l'étape $n$ ». On note $b_n$ la probabilité de l'événement « le lapin est dans la galerie B à l'étape $n$ ». On note $c_n$ la probabilité de l'événement « le lapin est dans la galerie C à l'étape $n$ ».

À l'étape $n = 0$, le lapin est dans la galerie A. Une étude antérieure des réactions lapin face aux différents stimuli permet de modéliser ses déplacements par le système suivant :

$$\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{1}{3}a_n + \dfrac{1}{4}b_n \\ b_{n+1} = \dfrac{2}{3}a_n + \dfrac{1}{2}b_n + \dfrac{2}{3}c_n \\ c_{n+1} = \dfrac{1}{4}b_n + \dfrac{1}{3}c_n. \end{cases}$$

L'objectif de cet exercice est d'estimer dans quelle galerie le lapin a la plus grande probabilité de se trouver à long terme.

## Partie A

À l'aide d'un tableur, on obtient le tableau de valeurs de la table 1 page suivante.

1. Quelle formule faut-il entrer dans la cellule C3 et recopier vers le bas pour remplir la colonne C ?

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| **1** | $n$ | $a_n$ | $b_n$ | $c_n$ |
| **2** | 0 | 1 | 0 | 0 |
| **3** | 1 | 0,333 | 0,667 | 0 |
| **4** | 2 | 0,278 | 0,556 | 0,167 |
| **5** | 3 | 0,231 | 0,574 | 0,194 |
| **6** | 4 | 0,221 | 0,571 | 0,208 |
| **7** | 5 | 0,216 | 0,572 | 0,212 |
| **8** | 6 | 0,215 | 0,571 | 0,214 |
| **9** | 7 | 0,215 | 0,571 | 0,214 |
| **10** | 8 | 0,214 | 0,571 | 0,214 |
| **11** | 9 | 0,214 | 0,571 | 0,214 |
| **12** | 10 | 0,214 | 0,571 | 0,214 |

TABLE 1

2. Quelle conjecture peut-on émettre ?

## PARTIE B

1. On définit la suite $(u_n)$, pour tout entier naturel $n$, par $u_n = a_n - c_n$.
   *a)* Démontrer que la suite $(u_n)$ est géométrique en précisant sa raison.
   *b)* Donner, pour tout entier naturel $n$, l'expression de $u_n$ en fonction de $n$.
2. On définit la suite $(v_n)$ par $v_n = b_n - \frac{4}{7}$ pour tout entier naturel $n$.
   *a)* Expliquer pourquoi pour tout entier naturel $n$, $a_n + b_n + c_n = 1$ et en déduire que pour tout entier naturel $n$, $v_{n+1} = -\frac{1}{6} v_n$.
   *b)* En déduire, pour tout entier naturel $n$, l'expression de $v_n$ en fonction de $n$.
3. En déduire que pour tout entier naturel $n$, on a

$$a_n = \frac{3}{14} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{2}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n,$$

$$b_n = \frac{4}{7} - \frac{4}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n$$

$$\text{et} \quad c_n = \frac{3}{14} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{2}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n.$$

4. Que peut-on en déduire sur la position du lapin après un très grand nombre d'étapes ?

**Exercice 4** (5 points)
*Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité*

Un atome d'hydrogène peut se trouver dans deux états différents, l'état stable et l'état excité. À chaque nanoseconde, l'atome peut changer d'état.

### Partie A. Étude d'un premier milieu

Dans cette partie, on se place dans un premier milieu (milieu 1) où, à chaque nanoseconde, la probabilité qu'un atome passe de l'état stable à l'état excité est 0,005, et la probabilité qu'il passe de l'état excité à l'état stable est 0,6. On observe un atome d'hydrogène initialement à l'état stable. On note $a_n$ la probabilité que l'atome soit dans un état stable et $b_n$ la probabilité qu'il se trouve dans un état excité, $n$ nanosecondes après le début de l'observation. On a donc $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$. On appelle $X_n$ la matrice ligne $X_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$.

L'objctif est de savoir dans quel état se trouvera l'atome d'hydrogène à long terme.

1. Calculer $a_1$ puis $b_1$ et montrer que $a_2 = 0{,}993025$ et $b_2 = 0{,}006975$.
2. Déterminer la matrice A telle que, pour tout entier naturel $n$, $X_{n+1} = X_n A$. A est appelée la matrice de transition dans le milieu 1. On admet alors que, pour tout entier naturel $n$, $X_n = X_0 A^n$.
3. On définit la matrice P par

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 120 \end{pmatrix}.$$

On admet que P est inversible et que

$$P^{-1} = \frac{1}{121}\begin{pmatrix} 120 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer la matrice D définie par $D = PAP^{-1}$.

4. Démontrer que, pour tout entier naturel $n$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
5. On admet par la suite que, pour tout entier naturel $n$,

$$A^n = \frac{1}{121}\begin{pmatrix} 120 + 0{,}395^n & 1 - 0{,}395^n \\ 120(1 - 0{,}395^n) & 1 + 120 \times 0{,}395^n \end{pmatrix}.$$

   En déduire une expression de $a_n$ en fonction de $n$.
6. Déterminer la limite de la suite $(a_n)$. Conclure.

### Partie B. Étude d'un second milieu

Dans cette partie, on se place dans un second milieu (milieu 2), dans lequel on ne connaît pas la probabilité que l'atome passe de l'état excité à l'état stable. On note $\alpha$ cette probabilité supposée constante. On sait, en revanche, qu'à chaque nanoseconde, la probabilité qu'un atome passe de l'état stable à l'état excité est 0,01.

1. Donner, en fonction de $\alpha$, la matrice de transition M dans le milieu 2.
2. Après un temps très long, dans le milieu 2, la proportion d'atomes excités se stabilise autour de 2 %. On admet qu'il existe un unique vecteur X, appelée état stationnaire, tel que $XM = X$, et que $X = \begin{pmatrix} 0{,}98 & 0{,}02 \end{pmatrix}$. Déterminer la valeur de $\alpha$.

## Exercice 1

*Commun à tous les candidats*

### Partie A

1. L'arbre de probabilité de la figure 6 décrit la situation.

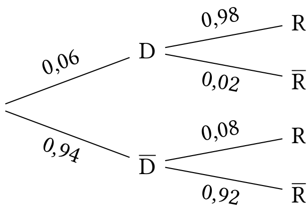



Figure 6

La formule des probabilité totale donne

$$\mathbb{P}(\text{R}) = \mathbb{P}(\text{D})\mathbb{P}_{\text{D}}(\text{R}) + \mathbb{P}(\overline{\text{D}})\mathbb{P}_{\overline{\text{D}}}(\text{R}) = 0{,}06 \times 0{,}98 + 0{,}94 \times 0{,}08 = 0{,}134.$$

2. La probabilité qu'un DVD retiré soit défectueux est égale à

$$\mathbb{P}_{\text{R}}(\text{D}) = \frac{\mathbb{P}(\text{D} \cap \text{R})}{\mathbb{P}(\text{R})} = \frac{\mathbb{P}(\text{D})\mathbb{P}_{\text{D}}(\text{R})}{\mathbb{P}(\text{R})} = \frac{0{,}06 \times 0{,}98}{0{,}134} = \frac{0{,}0588}{0{,}134} \approx 0{,}44.$$

L'affirmation du responsable de la ville est fausse.

### Partie B

Testons l'hypothèse suivante : « Dans cette médiathèque, la proportion de DVD défectueux est égale à $p = 0{,}06$. » Soit $n = 150$ la taille de l'échantillon. On a bien $n \geqslant 30$, $np = 150 \times 0{,}06 = 9 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 150 \times 0{,}94 = 141 \geqslant 5$, donc un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence des DVD défectueux est

$$\left[p - 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\,;p + 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$$
$$= \left[0{,}06 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}06 \times (1-0{,}06)}{150}}\,;0{,}06 + 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}06 \times (1-0{,}06)}{150}}\right]$$
$$\approx [0{,}022\,;0{,}098].$$

Dans l'échantillon, la fréquence des DVD défectueux, égale à $\frac{14}{150} \approx 0{,}093$, appartient à l'intervalle de fluctuation asymptotique ; nous ne pouvons donc pas rejeter l'hypothèse.

## Partie C

1. *a)* Considérons la variable aléatoire $Z = (X - 80)/\sigma$. Elle suit la loi normale centrée réduite. L'inégalité $X \geqslant 92$ est équivalente à l'inégalité $Z \geqslant \frac{12}{\sigma}$, ainsi

$$\mathbb{P}\left(Z \geqslant \frac{12}{\sigma}\right) = 0{,}10,$$

puis, compte tenu de la parité de la fonction densité de la loi normale centrée réduite,

$$\mathbb{P}\left(Z \leqslant -\frac{12}{\sigma}\right) = 0{,}10.$$

La calculatrice donne $-\frac{12}{\sigma} = -1{,}281\ldots$, d'où

$$\sigma \approx 9{,}36.$$

*b)* On demande la probabilité pour qu'un film dure moins de 95 min sachant qu'il dure plus de 90 min, soit

$$\mathbb{P}_{\{X\geqslant 90\}}(X \leqslant 95) = \frac{\mathbb{P}(\{X \geqslant 90\} \cap \{X \leqslant 95\})}{\mathbb{P}(X \geqslant 90)} = \frac{\mathbb{P}(90 \leqslant X \leqslant 95)}{\mathbb{P}(X \geqslant 90)} \approx 0{,}618.$$

## Exercice 2

*Commun à tous les candidats*

### Partie A. Modélisation de la forme de l'ampoule

1. *a)* Pour tout réel $x \in [0\,;4]$, on a

$$f'(x) = \frac{\pi b}{4} \cos\left(c + \frac{\pi}{4}x\right).$$

*b)* La tangente au point B est parallèle à l'axe des abscisses, ce que l'on peut traduire par

$$f'(0) = 0,$$

donc $c$ est un réel de l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ tel que

$$\cos c = 0.$$

Il n'y a qu'une solution : $c = \frac{\pi}{2}$. N'oublions pas de vérifier qu'avec ce choix de $c$, on obtient bien $f'(4) = 0$, ce qui est immédiat puisque

$$f'(4) = \frac{\pi b}{4} \cos(c + \pi) = -\frac{\pi b}{4} \cos c.$$

2. Nous savons que

$$f(x) = a + b \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}x\right).$$

Résolvons le système d'inconnues $a$ et $b$ suivant :

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(4) = 3. \end{cases} \qquad (\mathscr{E})$$

Or $f(0) = a + b\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = a + b$ et $f(4) = a + b\sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right) = a - b$, donc

$$(\mathscr{E}) \iff \begin{cases} a + b = 1 & L_1 \\ a - b = 3 & L_2 \end{cases} \iff \begin{cases} a + b = 1 & L_1 \leftarrow L_1 \\ 2a \quad = 4 & L_2 \leftarrow L_1 + L_2 \end{cases} \iff \begin{cases} b = -1 \\ a = 2 \end{cases}$$

### Partie B. Approximation du volume de l'ampoule

1. Le cyclindre de section ABFG a un rayon OB égal à 1 et une hauteur AB égale à 1, donc son volume est égale à
$$\pi \times 1^2 \times 1 = \pi.$$

2. La demi-sphère a un rayon OC égal à 3, donc son volume est égal à
$$\frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi \times 3^3 = 18\pi.$$

3. *a)* *Cas particulier.* Le troisième cylindre à une hauteur égale à $\frac{4}{5}$ et un rayon égal à
$$f\left(2 \times \frac{4}{5}\right) = 2 - \cos\left(\frac{\pi}{4} \times \frac{8}{5}\right) = 2 - \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right),$$
donc son volume est égal à
$$\frac{4\pi}{5}\left(2 - \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right)^2 \approx 7{,}19.$$

*Remarque.* On peut assez facilement démontrer que
$$\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

*b)* *Cas général.* Soit $\mathcal{V}$ la somme des volumes des $n$ cyclindres. Numérotons les cyclindres de 0 à $n-1$ dans le sens croissant des abscisses. Pour tout entier $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$, le $k$-ième cyclindre a une hauteur égale $\frac{4}{n}$ et un rayon égal à $f\left(\frac{4k}{n}\right)$, donc son volume est égal à
$$\frac{4\pi}{n} f\left(\frac{4k}{n}\right)^2 = \frac{4\pi}{n}\left(2 - \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)^2.$$

Faisons la somme pour $k$ variant de 0 à $n-1$. Nous obtenons la formule
$$\mathcal{V} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{4\pi}{n}\left(2 - \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)^2.$$

de laquelle nous tirons l'algorithme de la figure 7 page suivante.

$V \longleftarrow 0$
Pour $k$ allant de 0 à $n-1$:
$$V \longleftarrow V + \frac{4\pi}{n}\left(2 - \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)^2$$
Fin Pour

FIGURE 7

## Exercice 3

*Commun à tous les candidats*

1. La fonction $f$ est de la forme $f(x) = -u'\mathrm{e}^u$ où $u(x) = -kx$. On reconnaît là la dérivée de la fonction $-\mathrm{e}^u$, donc une primitive de la fonction $f$ est la fonction F définie sur $[0\,;+\infty[$ par
$$F(x) = -\mathrm{e}^{kx}.$$

2. Le triangle OCB est rectangle en C, donc son aire est
$$\text{Aire(OCB)} = \frac{1}{2}\text{OC} \times \text{BC}$$
où $\text{OC} = 1$ et $\text{BC} = |f(1)| = k\mathrm{e}^{-k}$, donc
$$\text{Aire(OCB)} = \frac{1}{2}k\mathrm{e}^{-k}.$$
Notons $\mathscr{D}'$ le domaine délimité par les axes du repère, la droite (BC) et la courbe $\mathscr{C}_f$. Alors
$$\text{Aire}(\mathscr{D}) = \text{Aire}(\mathscr{D}') - \text{Aire(OCB)}.$$
La fonction $f$ est à valeurs positives, donc
$$\text{Aire}(\mathscr{D}') = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = F(1) - F(0) = -\mathrm{e}^{-k} + 1.$$
Par conséquent,
$$\text{Aire}(\mathscr{D}) = -\mathrm{e}^{-k} + 1 - \frac{1}{2}k\mathrm{e}^{-k} = 1 - \left(1 + \frac{k}{2}\right)\mathrm{e}^{-k}.$$

3. On souhaite que

$$\text{Aire}(\mathscr{D}) = 2\text{Aire}(\text{OCB}).$$

Il faut, d'après la question précédente, que $k$ vérifie

$$1 - \left(1 + \frac{k}{2}\right)\mathrm{e}^{-k} = k\mathrm{e}^{-k}.$$

Autrement dit, $k$ est solution sur $]0\,;+\infty[$ de l'équation

$$(2+3x)\mathrm{e}^{-x} = 2.$$

Cette équation, que nous ne pouvons résoudre, peut s'écrire

$$g(x) = 0$$

où $g$ est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par

$$g(x) = (2+3x)\mathrm{e}^{-x} - 2.$$

Elle est dérivable et pour tout réel $x \geqslant 0$, on a

$$g'(x) = 3\mathrm{e}^{-x} - (2+3x)\mathrm{e}^{-x} = (1-3x)\mathrm{e}^{-x}.$$

Puisque $\mathrm{e}^{-x} > 0$, le signe de $g'(x)$ est le même que celui de $1 - 3x$. Nous en déduisons immédiatement le tableau de variations de la fonction $g$, figure 8 page ci-contre.
Étudions la limite de $g$ en $+\infty$. Pour tout réel $x \geqslant 0$, on a

$$g(x) = \frac{2}{\mathrm{e}^x} + 3\frac{x}{\mathrm{e}^x} - 2.$$

Des limites bien connues,

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = 0,$$

nous déduisons, par passage à l'inverse, que

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty} g(x) = -2.$$

| $x$ | $0$ | | $\frac{1}{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| Variations de $g$ | $0$ | $\nearrow$ | $3\mathrm{e}^{-1/3}-2$ | $\searrow$ | $-2$ |

Figure 8 – *Tableau de variation de la fonction g*

Le tableau de variatons met en évidence un maximum en $\frac{1}{3}$ égal à

$$g\left(\frac{1}{3}\right) = 3\mathrm{e}^{-1/3} - 2 > 0.$$

Sur l'intervalle $\left[0\,;\frac{1}{3}\right]$, la fonction $g$ est strictement croissante et $g(0) = 0$, donc l'équation $g(x) = 0$ n'a pas de solution sur $\left]0\,;\frac{1}{3}\right]$.

Sur l'intervalle $\left[\frac{1}{3}\,;+\infty\right[$, la fonction $g$ est continue, strictement monotone, $g\left(\frac{1}{3}\right) > 0$ et $\lim_{x\longrightarrow+\infty} g(x) < 0$, donc d'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $\left[\frac{1}{3}\,;+\infty\right[$.

Finalement, l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution strictement positif, prouvant ainsi qu'il existe bien un unique réelle $k > 0$ telle que l'aire du domaine $\mathscr{D}$ soit égale au double de celle du triangle OCB.

## Exercice 4

*Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité*

### Partie A

1. Dans la cellule C3, on peut entrer la formule `=2/3*B2+1/2*C2+2/3*D2`.

*Remarque.* On peut aussi utiliser un adresse absolu sur les colonnes, ce qui donne `=2/3*$B2+1/2*$C2+2/3*$D2`.

2. La feuille de calcul suggère la conjecture suivante :

**Conjecture.** *À long terme, le lapin a une plus grande probabilité de se trouver dans la galerie B.*

## Partie B

1. *a)* Pour tout entier naturel $n$, on a

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= a_{n+1} - c_{n+1} \\ &= \left(\frac{1}{3}a_n + \frac{1}{4}b_n\right) - \left(\frac{1}{4}b_n + \frac{1}{3}c_n\right) \\ &= \frac{1}{3}(a_n - c_n) \\ &= \frac{1}{3}u_n, \end{aligned}$$

donc la suite $(u_n)$ est un suite géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$.

*b)* Le terme général de la suite $(u_n)$ est

$$u_n = u_0 q^n = (a_0 - c_0)q^n = \frac{1}{3^n}.$$

2. *a)* À chaque étape, le lapin est nécessairement dans une et une seule des galeries A, B ou C, en d'autres termes, les événements « le lapin est dans la galerie G à l'étape $n$ » où $G \in \{A, B, C\}$ sont deux à deux incompatibles et leur union est l'univers tout entier, par conséquent, pour tout entier naturel $n$, on a

$$a_n + b_n + c_n = 1.$$

Soit $n$ un entier naturel. À partir de

$$b_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{2}{3}c_n \quad \text{et} \quad a_n + b_n + c_n = 1,$$

on obtient

$$b_{n+1} = \frac{2}{3}(a_n + b_n + c_n) - \frac{2}{3}b_n + \frac{1}{2}b_n = \frac{2}{3} - \frac{1}{6}b_n$$

puis

$$b_{n+1} - \frac{4}{7} = \frac{2}{21} - \frac{1}{6}b_n = -\frac{1}{6}\left(b_n - \frac{4}{7}\right),$$

c'est-à-dire

$$v_{n+1} = -\frac{1}{6}v_n.$$

*b)* La suite $(v_n)$ est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{6}$ et de premier terme $b_0 - \frac{4}{7} = -\frac{4}{7}$, donc son terme général est

$$v_n = -\frac{4}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n.$$

3. Soit $n$ un entier naturel. On déduit de la question précédente le terme général de la suite $(b_n)$ :

$$b_n = v_n + \frac{4}{7} = \frac{4}{7} - \frac{4}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n.$$

Rappelons que

$$a_n - c_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n. \tag{1}$$

À partir de $a_n + b_n + c_n = 1$, nous obtenons $a_n + c_n = 1 - b_n$, soit

$$a_n + c_n = \frac{3}{7} + \frac{4}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n. \tag{2}$$

À présent, ajoutons membre à membre (1) et (2) et divisons par 2. Il vient

$$a_n = \frac{3}{14} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{2}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n,$$

et pour finir, de (1) on tire $c_n = a_n - \left(\frac{1}{3}\right)^n$, puis

$$c_n = \frac{3}{14} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{2}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n.$$

4. Comme $-1 < \frac{1}{3} < 1$ et $-1 < -\frac{1}{6} < 1$, on a

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\longrightarrow+\infty}\left(-\frac{1}{6}\right)^n = 0.$$

Les limites des suites $(a_n)$, $(b_n)$ et $(c_n)$ s'en déduisent immédiatement :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} a_n = \frac{3}{14}, \quad \lim_{n\longrightarrow+\infty} b_n = \frac{4}{7} \quad \text{et} \quad \lim_{n\longrightarrow+\infty} c_n = \frac{3}{14}.$$

Après un certain nombre d'étapes, le lapin se trouvera le plus souvent – plus d'une fois sur deux – dans la galerie B.

*Remarque.* Tout ça pour ça ! Nous pouvions prouver la conjecture très rapidement et très simplement à partir des relations de récurrences que satisfont les suites $(a_n)$, $(b_n)$ et $(c_n)$. En effet, pour tout entier naturel $n$, on a

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{2}{3}c_n \quad \text{et} \quad b_{n+1} - c_{n+1} = \frac{5}{12}a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{3}c_n.$$

Or, par définition de ces suites, $a_n \geqslant 0$, $b_n \geqslant 0$ et $c_n \geqslant 0$. De plus, nous ne pouvons pas avoir $a_n = b_n = c_n = 0$, puisque $a_n + b_n + c_n = 1$. Par conséquent,

$$b_{n+1} > a_{n+1} \quad \text{et} \quad b_{n+1} > c_{n+1}$$

Ces inégalités montrent qu'à chaque étape, à l'exception de peut-être l'étape initiale, c'est dans la galerie B que nous avons le plus de chance de trouver le lapin.

## Exercice 4

*Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité*

### Partie A. Étude d'un premier milieu

1. Nous pouvons représenter la situation par l'arbre de probabilité de la figure 9 page suivante où $A_n$ est l'événement « l'atome est dans un état stable $n$ nanosecondes après le début de l'observation » et $B_n$ est l'événement « l'atome est dans un état stable $n$ nanosecondes après le début de l'observation ».

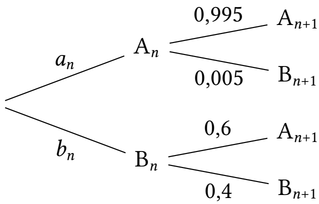



FIGURE 9

Utilisons la formule des probabilités totales :

$$a_1 = \mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_0)\mathbb{P}_{A_0}(A_1) + \mathbb{P}(B_0)\mathbb{P}_{B_0}(A_1) = 0{,}995a_0 + 0{,}6b_0 = 0{,}995$$

et puisque $a_n + b_n = 1$,

$$b_1 = 0{,}005.$$

De même,

$$a_2 = 0{,}995a_1 + 0{,}6b_1 = 0{,}995^2 + 0{,}6 \times 0{,}005 = 0{,}993\,025$$

et

$$b_2 = 1 - a_2 = 0{,}006\,975.$$

2. Comme précédemment, à l'aide de l'arbre de probabilité, on trouve

$$\begin{cases} a_{n+1} = 0{,}995a_n + 0{,}6b_n \\ b_{n+1} = 0{,}005a_n + 0{,}4b_n, \end{cases}$$

dont l'écriture matricielle est

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}995 & 0{,}005 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire $X_{n+1} = X_nA$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 0995 & 0{,}005 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix}.$$

3. Calculons :

$$\begin{aligned}
\mathrm{D} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} &= \frac{1}{121}\begin{pmatrix} 120 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}995 & 0{,}005 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 120 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{121}\begin{pmatrix} 120 \times 0{,}995 + 1 \times 0{,}6 & 120 \times 0{,}005 + 1 \times 0{,}4 \\ -1 \times 0{,}995 + 1 \times 0{,}6 & -1 \times 0{,}005 + 1 \times 0{,}4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 120 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{121}\begin{pmatrix} 120 & 1 \\ -0{,}395 & 0{,}395 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 120 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}395 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

4. Démontrons par récurrence sur $n$ la propriété

$$\mathscr{P}(n) : \ \mathrm{A}^n = \mathrm{PD}^n\mathrm{P}^{-1}.$$

*Initialisation.* On a $\mathrm{A}^0 = \mathrm{I}$ et $\mathrm{PD}^0\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{PP}^{-1} = \mathrm{I}$, donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

*Hérédité.* Soit $k$ un entier naturel. Supposons que $\mathscr{P}(k)$ est vraie. D'après la question précédente, on a $\mathrm{A} = \mathrm{PDP}^{-1}$. On a alors

$$\mathrm{A}^{k+1} = \mathrm{A} \times \mathrm{A}^k = \mathrm{PDP}^{-1}\mathrm{PD}^k\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{PDD}^k\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{PD}^{k+1}\mathrm{P}^{-1},$$

donc $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.

*Conclusion.* La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire, donc d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel $n$.

5. En utilisant $\mathrm{X}_n = \mathrm{X}_0\mathrm{A}^n$, on trouve

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{121}\left(a_0 \times (120 + 0{,}395^n) + b_0 \times 120(1 - 0{,}395^n)\right) \\
&= \frac{120 + 0{,}395^n}{121}.
\end{aligned}$$

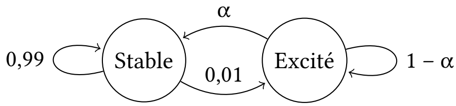



Figure 10

6. Comme $0{,}395 \in \left]-1\,;1\right[$, la suite de terme général $0{,}395^n$ tend vers 0, donc

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} a_n = \frac{120}{121} \approx 0{,}992.$$

Après un certain temps, dans le milieu 1, la proportion d'atomes dans un état stable se stabilise autour de 99,2 %.

## Partie B. Étude d'un second milieu

1. On a représenté sur la figure 10 la graphe probabiliste à partir duquel nous donnons la matrice de transition :

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0{,}99 & 0{,}01 \\ \alpha & 1-\alpha \end{pmatrix}.$$

2. La première colonne de XM est $0{,}99 \times 0{,}98 + 0{,}02\alpha$, donc X = MX entraine

$$0{,}98 = 0{,}99 \times 0{,}98 + 0{,}02\alpha,$$

d'où

$$\alpha = \frac{0{,}01 \times 0{,}98}{0{,}02} = 0{,}49.$$

# Sujet 8

## *Pondichéry*

8 mai 2018

**Exercice 1** (6 points)
*Commun à tous les candidats*

*Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.*

Dans une usine, un four cuit des céramiques à la température de 1000 °C. À la fin de la cuisson, il est éteint et il refroidit.

On s'intéresse à la phase de refroidissement du four, qui débute dès l'instant où il est éteint.

La témpérature du four est exprimée en degré Celsius (°C).

La porte du four peut être ouverte sans risque pour les céramiques dès que sa température est inférieure à 70 °C. Sinon les céramiques peuvent se fissurer, voire se casser.

### Partie A

Pour un nombre entier naturel $n$, on note $\mathrm{T}_n$ la température en degré Celsius du four au bout de $n$ heures écoulées à partir de l'instant où il a été éteint. On a donc $\mathrm{T}_0 = 1000$.

La température $\mathrm{T}_n$ est calculée par l'algorithme de la figure 1 page suivante.

1. Déterminer la température du four, arrondie à l'unité, au bout de 4 heures de refroidissement.
2. Démontrer que, pour tout nombre entier naturel $n$, on a

$$\mathrm{T}_n = 980 \times 0{,}82^n + 20.$$

3. Au bout de combien d'heures le four peut-il être ouvert sans risque pour les céramiques ?

| |
|---|
| T ⟵ 1000 |
| Pour $i$ allant de 1 à $n$ |
| T ⟵ 0,82 × T + 3,6 |
| Fin Pour |

Figure 1

## Partie B

Dans cette partie, on note $t$ le temps (en heure) écoulé depuis l'instant où le four a été éteint. La température du four (en degré Celsius) à l'instant $t$ est donnée par la fonction $f$ définie, pour tout nombre réel $t$ positif, par

$$f(t) = a\mathrm{e}^{-t/5} + b,$$

où $a$ et $b$ sont deux nombres réels. On admet que $f$ vérifie la relation suivante :

$$f'(t) + \frac{1}{5}f(t) = 4.$$

1. Déterminer les valeurs de $a$ et $b$ sachant qu'initialement, la température du four est de 1000 °C, c'est-à-dire que $f(0) = 1000$.
2. Pour la suite, on admet que, pour tout nombre réel positif $t$,

$$f(t) = 980\mathrm{e}^{-t/5} + 20.$$

   *a)* Déterminer la limite de $f$ lorsque $t$ tend vers $+\infty$.

   *b)* Étudier les variations de $f$ sur $[0\,;+\infty[$. En déduire son tableau de variations complet.

   *c)* Avec ce modèle, après combien de minutes le four peut-il être ouvert sans risque pour les céramiques ?
3. La température moyenne (en degré Celsius) du four entre deux instants $t_1$ et $t_2$ est donnée par

$$\frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

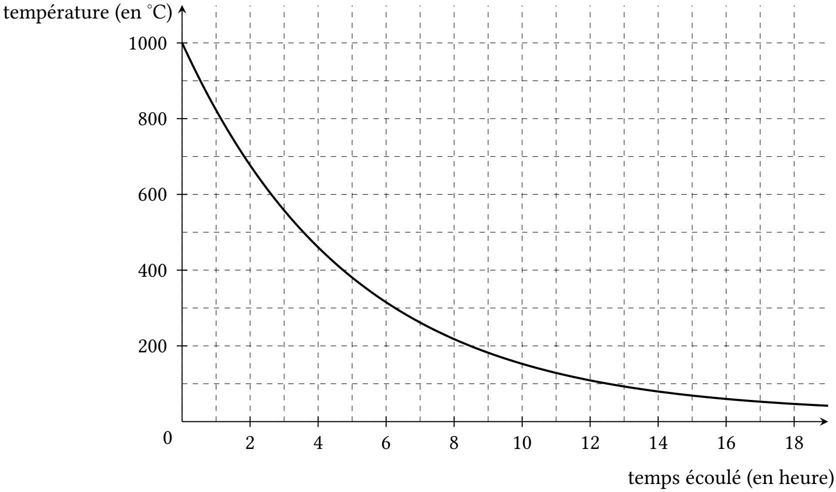



FIGURE 2

*a)* À l'aide de la représentation graphique de $f$ (voir la figure 2), donner une estimation de la température moyenne $\theta$ du four sur les 15 premières heures de refroidissement. Expliquer votre démarche.

*b)* Calculer la valeur exacte de cette température moyenne $\theta$ et en donner la valeur arrondie au degré Celsius.

4. Dans cette question, on s'intéresse à l'abaissement de température (en degré Celsius) du four au cours d'une heure, soit entre deux instants $t$ et $(t+1)$. Cet abaissement est donné par la fonction $d$ définie, pour tout nombre réel $t$ positif, par $d(t) = f(t) - f(t+1)$.

*a)* Vérifier que, pour tout nombre réel $t$ positif,

$$d(t) = 980(1 - \mathrm{e}^{-1/5})\mathrm{e}^{-t/5}.$$

*b)* Déterminer la limite de $d(t)$ lorsque $t$ tend vers $+\infty$. Quelle interprétation peut-on en donner ?

**Exercice 2** (4 points)

*Commun à tous les candidats*

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{u}, \vec{v})$. Les points A, B et C ont pour affixes respectives $a = -4$, $b = 2$ et $c = 4$.

1. On considère les trois points A′, B′ et C′ d'affixes respectives $a' = ja$, $b' = jb$ et $c' = jc$ où $j$ est le nombre complexe $\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$.
   *a)* Donner la forme trigonométrique et la forme exponentielle de $j$. En déduire les formes algébriques et exponentielles de $a'$, $b'$ et $c'$.
   *b)* Les points A, B et C ainsi que les cercles de centre O et de rayon 2, 3 et 4 sont représentés sur le graphique de la figure 3. Placer les points A′, B′ et C′ sur ce graphique.

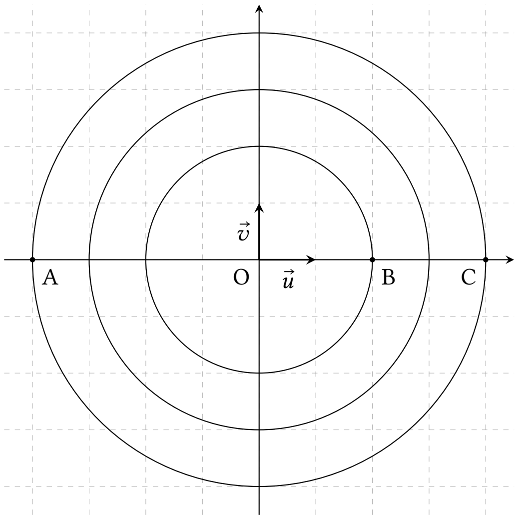



FIGURE 3

2. Montrer que les points A′, B′ et C′ sont alignés.
3. On note M le milieu du segment [A′C], N le milieu du segment [C′C] et P le milieu du segment de [C′A]. Démontrer que le triangle MNP est isocèle.

**Exercice 3** (5 points)
*Commun à tous les candidats*

Une entreprise conditionne du sucre blanc provenant de deux exploitations U et V en paquets de 1 kg et de différentes qualités. Le sucre extra fin est conditionné séparément dans des paquets portant le label « extra fin ».

*Les parties A, B et C peuvent être traitées de façon indépendante.*

Dans tout l'exercice, les résultats seront arrondis, si nécessaire, au millième.

## Partie A

Pour calibrer le sucre en fonction de la taille de ses cristaux, on le fit passer au travers d'une série de trois tamis positionnés les uns au-dessus des autres et posés sur un récipient à fond étanche.

Les ouvertures des mailles sont les suivantes :

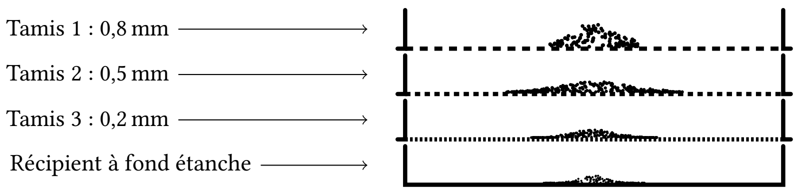



Figure 4

Les cristaux de sucre dont la taille est inférieure à 0,2 mm se trouvent dans le récipient à fond étanche à la fin du calibrage. Ils seront conditionnés dans des paquets portant le label « sucre extra fin ».

1. On prélève au hasard un cristal de sucre de l'exploitation U. La taille de ce cristal, exprimée en millimètre, est modélisée par la variable aléatoire $X_U$ qui suit la loi normale de moyenne $\mu_U = 0{,}58$ mm et d'écart-type $\sigma_U = 0{,}21$ mm.

   *a)* Calculer les probabilités des événements suivants :

$$X_U < 0{,}2 \qquad \text{et} \qquad 0{,}5 \leqslant X_U < 0{,}8.$$

*b)* On fait passer 1800 grammes de sucre provenant de l'exploitation U au travers de la série de tamis. Déduire de la question précédente une estimation de la masse de sucre récupérée dans le récipient à fond étanche et une estimation de la masse de sucre récupérée dans le tamis 2.

2. On prélève au hasard un cristal de sucre de l'exploitation V. La taille de ce cristal, exprimée en millimètre, est modélisée par la variable aléatoire $X_V$ qui suit la loi normale de moyenne $\mu_V = 0{,}65$ mm et d'écart-type $\sigma_V$ à déterminer. Lors du calibrage d'une grande quantité de cristaux de sucre provenant de l'exploitation V, on constate que 40 % de ces cristaux se retrouvent dans le tamis 2. Quelle est la valeur de l'écart-type $\sigma_V$ de la variable aléatoire $X_V$ ?

## Partie B

Dans cette partie, on admet que 3 % du sucre provenant de l'exploitation U est extra fin et que 5 % du sucre provenant de l'exploitation V est extra fin.

On prélève au hasard un paquet de sucre dans la production de l'entreprise et, dans un souci de tracabilité, on s'intéresse à la provenance de ce paquet.

On considère les événements suivants :

- U : « Le paquet contient du sucre provenant de l'exploitation U » ;
- V : « Le paquet contient du sucre provenant de l'exploitation V » ;
- E : « Le paquet porte le label "extra fin" ».

1. Dans cette question, on admet que l'entreprise fabrique 30 % de ses paquets avec du sucre provenant de l'exploitation U et les autres avec du sucre provenant de l'exploitation V, sans mélanger les sucres des deux exploitations.

   *a)* Quelle est la probabilité que le paquet prélevé porte le label « extra fin » ?

   *b)* Sachant qu'un paquet porte le label « extra fin » quelle est la probabilité que le sucre qu'il contient provienne de l'exploitation U ?

2. L'entreprise souhaite modifier son approvisionnement auprès des deux exploitations afin que parmi les paquets portant le label « extra fin », 30 % d'entre eux contiennent du sucre provenant de l'exploitation U. Comment doit-elle s'approvisionner auprès des exploitations U et V ?

   *Toute trace de recherche sera valorisée dans cette question.*

## Partie C

1. L'entreprise annonce que 30 % des paquets de sucre portant le label « extra fin » qu'elle conditionne contiennent du sucre provenant de l'exploitation U. Avant de valider une commande, un acheteur veut vérifier cette proportion annoncée. Il prélève 150 paquets pris au hasard dans la production de paquets labellisés « extra fin » de l'entreprise. Parmi ces paquets 30 contiennent du sucre provenant de l'exploitation U. A-t-il des raisons de remettre en question l'annonce de l'entreprise ?
2. L'année suivante, l'entreprise déclare avoir modifié sa production. L'acheteur souhaite estimer la nouvelle proportion de paquets de sucre provenant de l'exploitation U parmi les paquets portant le label « extra fin ». Il prélève 150 paquets pris au hasard dans la production de paquets labellisés « extra fin » de l'entreprise. Parmi ces paquets 42 % contiennent du sucre provevant de l'exploitation U. Donner un intervalle de confiance, au niveau de confiance 95 % de la nouvelle proportion de paquets labéllisés « extra fin » contenant du sucre provenant de l'exploitation U.

**Exercice 4** (5 points)
*Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité*

Dans l'espace muni du repère orthonormé $(\text{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ d'unité 1 cm, on considère les points A, B, C et D de coordonnées respectives $(2\,;1\,;4)$, $(4\,;-1\,;0)$, $(0\,;3\,;2)$ et $(4\,;3\,;-2)$.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (CD).
2. Soit M un point de la droite (CD).
   *a)* Déterminer les coordonnées du point M tel que la distance BM soit minimale.
   *b)* On note H le point de la droite (CD) ayant pour coordonnées $(3\,;3\,;-1)$. Vérifier que les droites (BH) et (CD) sont perpendiculaires.
   *c)* Montrer que l'aire du triangle BCD est égale à $12\ \text{cm}^2$.
3. *a)* Démontrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (BCD).

*b)* Déterminer une équation cartésienne du plan (BCD).

*c)* Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\Delta$ passant par A et orthogonale au plan (BCD).

*d)* Démontrer que le point I, intersection de la droite $\Delta$ et du plan (BCD), a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3}\,;\frac{1}{3}\,;\frac{8}{3}\right)$.

*e)* Calculer le volume du tétraèdre ABCD.

**Exercice 4** (5 points)

*Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité*

À toute lettre de l'alphabet on associe un nombre entier $x$ compris entre 0 et 25 comme indiqué dans la table 1.

| Lettre | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| Lettre | N | O | P | Q | R | S | T | U | V | W | X | Y | Z |
| $x$ | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |

TABLE 1

Le « chiffre de Rabin » est un dispositif de cryptage asymétrique inventé en 1979 par l'informaticien Michael RABIN.

Alice veut communiquer de manière sécurisée en utilisant ce cryptosystème. Elle choisit deux nombres premiers distincts $p$ et $q$. Ce couple de nombres est sa clé privée qu'elle garde secrète. Elle calcule ensuite $n = pq$ et elle choisit un nombre entier naturel B tel que $0 \leqslant \mathrm{B} \leqslant n-1$. Si Bob veut envoyer un message secret à Alice, il le code lettre par lettre. Le codage d'une lettre représentée par le nombre entier $x$ est le nombre $y$ tel que

$$y \equiv x(x+\mathrm{B}) \pmod{n} \quad \text{avec} \quad 0 \leqslant y < n.$$

Dans tout l'exercice on prend $p = 3$, $q = 11$, donc $n = pq = 33$ et $\mathrm{B} = 13$.

## Partie A. Cryptage

Bob veut envoyer le mot « NO » à Alice.

1. Montrer que Bob code la lettre « N » avec le nombre 8.
2. Déterminer le nombre qui code la lettre « O ».

## Partie B. Décryptage

Alice a reçu un message crypté qui commence par le nombre 3. Pour décoder ce premier nombre, elle doit déterminer le nombre entier $x$ tel que

$$x(x+13) \equiv 3 \pmod{33} \quad \text{avec} \quad 0 \leqslant x < 26.$$

1. Montrer que $x(x+13) \equiv 3 \pmod{33}$ équivaut à $(x+23)^2 \equiv 4 \pmod{33}$.
2. *a)* Montrer que si $(x+23)^2 \equiv 4 \pmod{33}$ alors le système d'équations

$$\begin{cases} (x+23)^2 \equiv 4 \pmod{3} \\ (x+23)^2 \equiv 4 \pmod{11} \end{cases}$$

   est vérifié.

   *b)* Réciproquement, montrer que si

$$\begin{cases} (x+23)^2 \equiv 4 \pmod{3} \\ (x+23)^2 \equiv 4 \pmod{11} \end{cases}$$

   alors $(x+23)^2 \equiv 4 \pmod{33}$.

   *c)* En déduire que

$$x(x+13) \equiv 3 \pmod{33} \iff \begin{cases} (x+23)^2 \equiv 1 \pmod{3} \\ (x+23)^2 \equiv 4 \pmod{11}. \end{cases}$$

3. *a)* Déterminer les nombres entiers naturels $a$ tels que

$$0 \leqslant a < 3 \quad \text{et} \quad a^2 \equiv 1 \pmod{3}.$$

*b)* Déterminer les nombres entiers naturels $b$ tels que

$$0 \leqslant b < 11 \quad \text{et} \quad b^2 \equiv 4 \pmod{11}.$$

4. *a)* En déduire que $x(x+13) \equiv 3 \pmod{33}$ équivaut aux quatre systèmes suivants :

$$\begin{cases} x \equiv 2 & \pmod 3 \\ x \equiv 8 & \pmod{11} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x \equiv 0 & \pmod 3 \\ x \equiv 1 & \pmod{11} \end{cases}$$

$$\text{ou} \quad \begin{cases} x \equiv 2 & \pmod 3 \\ x \equiv 1 & \pmod{11} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x \equiv 0 & \pmod 3 \\ x \equiv 8 & \pmod{11}. \end{cases}$$

*b)* On admet que chacun de ces systèmes admet une unique solution entière $x$ telle que $0 \leqslant x < 33$. Déterminer, sans justification, chacune de ces solutions.

5. Compléter l'algorithme de la figure 5 pour qu'il affiche les quatre solutions trouvées dans la question précédente.

```
Pour ....... allant de ....... à .......
    Si le reste de la division de ....... par ....... est égale à ....... alors
        Afficher .......
    Fin Si
Fin Pour
```

FIGURE 5

6. Alice peut-elle connaître la première lettre du message envoyé par Bob ? Le « chiffre de Rabin » est-il utilisable pour décoder un message lettre par lettre ?

## Exercice 1

*Commun à tous les candidats*

### Partie A

1. Exécutons l'algorithme ; les valeurs successives de la variable T sont $T_0 = 1000$, $T_1 = 823{,}6$, $T_2 = 678{,}952$, $T_3 = 560{,}34064$, $T_4 = 463{,}0793248$, … La température au bout de 4 heures est, à l'unité près, égale à 463 °C.
2. Démontrons par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 0$, on a

$$T_n = 980 \times 0{,}82^n + 20.$$

*Initialisation.* Pour $n = 0$, on a $T_0 = 1000$ et $980 \times 0{,}82^n + 20 = 980 + 20 = 1000$, donc la propriété est vraie pour $n = 0$.
*Hérédité.* Supposons la propriété vraie pour $n = k \geqslant 0$. L'algorithme montre que

$$T_{k+1} = 0{,}82T_k + 3{,}6.$$

D'après l'hypothèse de récurrence, on a donc

$$\begin{aligned} T_{k+1} &= 0{,}82(980 \times 0{,}82^k + 20) + 3{,}6 \\ &= 980 \times 0{,}82^{k+1} + 0{,}82 \times 20 + 3{,}6 \\ &= 980 \times 0{,}82^{k+1} + 20, \end{aligned}$$

ainsi la propriété est vraie pour $n = k + 1$.
*Conclusion.* Selon le principe de récurrence, on a $T_n = 0{,}82^n + 20$ pour tout entier $n \geqslant 0$.

*Solution alternative.* La suite $(T_n)$ vérifie la relation de récurrence

$$T_{n+1} = 0{,}82T_n + 3{,}6.$$

L'équation affine $x = 0{,}82x + 3{,}6$ obtenue en substituant $x$ à $T_n$ et $T_{n+1}$ dans l'égalité précédente, a pour solution 20, donc

$$20 = 0{,}82 \times 20 + 3{,}6.$$

Soustrayons membre à membre les deux égalités précédentes ; l'égalité ainsi obtenue,

$$T_{n+1} - 20 = 0{,}82(T_n - 20),$$

montre que la suite de terme général $T_n - 20$ est géométrique de raison 0,82. Son premier terme est $T_0 - 20 = 980$. Nous en déduisons que pour tout entier $n \geqslant 0$, on a $T_n - 20 = 980 \times 0{,}82^n$, d'où

$$T_n = 980 \times 0{,}82^n + 20.$$

3. Il nous résoudre sur $\mathbb{N}$ l'inéquation d'inconnue $n$,

$$T_n \leqslant 70.$$

D'après la question précédente, elle est équivalente à l'inéquation

$$980 \times 0{,}82^n + 20 \leqslant 70,$$

de laquelle nous tirons

$$0{,}82^n \leqslant \frac{5}{98}.$$

La fonction logarithme étant croissante, nous avons

$$\ln 0{,}82^n \leqslant \ln \frac{5}{98},$$

soit

$$n \ln 0{,}82 \leqslant \ln \frac{5}{98}.$$

Comme $\ln 0{,}82 < 0$, il vient

$$n \geqslant \frac{\ln \frac{5}{98}}{\ln 0{,}82}.$$

La calculatrice donne $\left(\ln \frac{5}{98}\right) / \ln 0{,}82 = 14{,}993\ldots$ Par conséquent, à l'heure près, il faut et il suffit d'attendre 15 heures pour ouvrir le four sans risque pour les céramiques.

*Remarque.* La suite $(T_n)$ étant monotone, nous pouvions aisément résoudre l'inéquation $T_n \leqslant 70$ par dichotomie ou à l'aide d'une table de valeurs construite à l'aide de la calculatrice. Nous trouvions alors $T_{14} = 80{,}9\ldots$ et $T_{15} = 69{,}93\ldots$, la décroissante de la suite permettant alors de conclure que $n \geqslant 15$.

### Partie B

1. Il nous faut trouver deux réels $a$ et $b$ tels que

$$\begin{cases} f'(t) + \dfrac{1}{5}f(t) = 4 & \text{pour tout réel } t \geqslant 0 \\ f(0) = 1000. \end{cases}$$

Comme $f'(t) + \frac{1}{5}f(t) = -\frac{1}{5}ae^{-t/5} + \frac{1}{5}ae^{-t/5} + \frac{1}{5}b = \frac{b}{5}$, le système précédent est équivalent à

$$\begin{cases} \dfrac{1}{5}b = 4 \\ a + b = 1000. \end{cases}$$

On trouve $b = 20$ et $a = 980$.

2. *a)* On a

$$\lim_{t\longrightarrow+\infty} -t/5 = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{t\longrightarrow-\infty} \mathrm{e}^{t} = 0,$$

donc par composition,

$$\lim_{t\longrightarrow+\infty} \mathrm{e}^{-t/5} = 0,$$

si bien que

$$\lim_{t\longrightarrow+\infty} f(t) = 20.$$

*b)* Pour tout réel $t \geqslant 0$, on a $f'(t) = -196\mathrm{e}^{-t/5}$. Or la fonction exponentielle est à valeurs strictement positives, donc $f'(t) < 0$ pour tout réel $t \geqslant 0$. Nous en déduisons le tableau de variation de la fonction $f$ (voir figure 6 page suivante).

*c)* Il nous faut résoudre sur $\mathbb{R}_+$ l'inéquation $f(t) \leqslant 70$. Comme la fonction $f$ est monotone, il suffit de résoudre l'équation $f(t) = 70$, soit

$$\mathrm{e}^{-t/5} = 50.$$

Appliquons la fonction logarithme à chacun des membres de l'inéquation :

$$-\frac{t}{5} = \ln\frac{5}{98}.$$

| $x$ | $0$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$ |
| --- | --- |
| Signe de $f'(x)$ | $-$ |
| Variations de $f(x)$ | $1000 \searrow 20$ |

FIGURE 6 – *Tableau de variation de la fonction f*

Nous en déduisons que

$$t = -5 \ln \frac{5}{98}.$$

Le temps d'attente nécessaire (et suffisant) avant d'ouvrir le four est, en minutes, égal à $60 \times (-5) \ln \frac{5}{98} = 892{,}6\ldots$, que l'on arrondit à 893 min, la fonction $f$ étant décroissante.

3. *a)* La température moyenne du four sur les 15 premières heures de refroidissement est donnée par la formule

$$\theta = \frac{1}{15} \int_0^{15} f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

La fonction $f$ étant positive, l'intégrale est l'aire géométrique de la région délimitée par la courbe représentative de la fonction $f$, les axes du repère et la droite d'équation $x = 15$.

Pour estimer graphiquement cette aire, subdivisons l'intervalle $[0\,;15]$ en plusieurs intervalles. Sur chacun de ces intervalles $[a\,;b]$, la région sous la courbe représentative de la fonction $f$ est assimilée à un trapèze délimitée par l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = a$ et $x = b$, et la droite joignant les points d'intersections de la courbe représentative

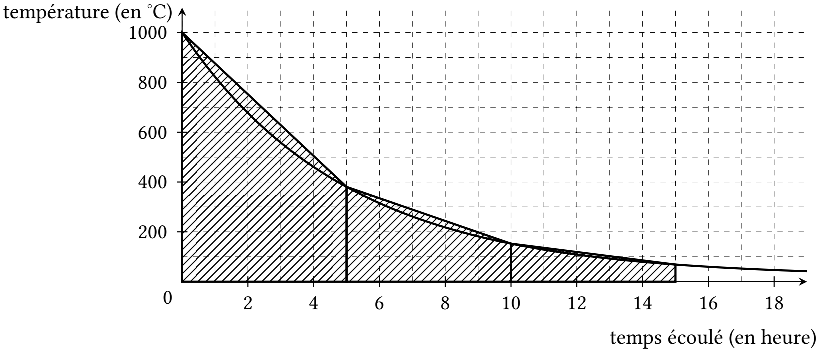



FIGURE 7 – *Estimation de l'intégrale* $\int_0^{15} f(x)\,\mathrm{d}x$.

de la fonction $f$ avec les droites d'équations $x = a$ et $x = b$. Nous aurons alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \approx (b-a) \times \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Subdivisons l'intervalle $[0\,;15]$ en trois intervalles de même longueurs : $[0\,;5]$, $[5\,;10]$ et $[10\,;15]$. Cela nous donne

$$\begin{aligned}\int_0^{15} f(x)\,\mathrm{d}x &\approx 5\left(\frac{f(0)+f(5)}{2} + \frac{f(5)+f(10)}{2} + \frac{f(10)+f(15)}{2}\right)\\ &\approx 5\left(\frac{f(0)+f(15)}{2} + f(5) + f(10)\right).\end{aligned}$$

Par lecture graphique, on trouve

$$\int_0^{15} f(x)\,\mathrm{d}x \approx 5\left(\frac{1000+70}{2} + 380 + 150\right) = 5325,$$

d'où $\theta \approx 5325/15 = 355$. La température moyenne du four sur les 15 premières heures de refroidissement est d'environ 355 °C.

*b)* La température moyenne au cours des 15 premières minutes est

$$\begin{aligned}\theta &= \frac{1}{15}\int_0^{15} 980\mathrm{e}^{-t/5} + 20\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{15}\left[-4900\mathrm{e}^{-t/5} + 20t\right]_0^{15} \\ &= \frac{1}{15}\left(-4900\mathrm{e}^{-3} + 300 + 4900\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(1040 - 980\mathrm{e}^{-3}\right),\end{aligned}$$

soit $\theta \approx 330\,^\circ\mathrm{C}$, au degré Celsius près.

4. *a)* Pour tout réel $t \geqslant 0$, on a

$$\begin{aligned}d(t) &= f(t) - f(t+1) \\ &= \left(980\mathrm{e}^{-t/5} + 20\right) - \left(980\mathrm{e}^{-(t+1)/5} + 20\right) \\ &= 980\mathrm{e}^{-t/5} - 980\mathrm{e}^{-t/5}\mathrm{e}^{-1/5} \\ &= 980\left(1 - \mathrm{e}^{-1/5}\right)\mathrm{e}^{-t/5}.\end{aligned}$$

*b)* Comme $\lim_{t\to+\infty} -t/5 = -\infty$, on a

$$\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-t/5} = \lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{x} = 0,$$

d'où

$$\lim_{t\to+\infty} d(t) = 0.$$

Nous en déduisons que l'axe des abscisses est une asymptote horizontale en $+\infty$ à la courbe représentative de la fonction $d$.

*Remarque.* Il n'était pas utile d'expliciter $d(t)$ en fonction de $t$ pour déterminer la limite de $d$ en $+\infty$. En effet, nous savons déjà que la fonction $d$ admet une limite finie en $+\infty$, or $\lim_{t\to+\infty} f(t+1) = \lim_{t\to+\infty} f(t)$, d'où $\lim_{t\to+\infty} d(t) = 0$.

Certains sont peut-être tentés d'en déduire que la température se stabilise. Les deux contre-exemples suivants devraient les convaincre du contraire :

— Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(t) = \sqrt{t}$. On vérifie aisément que la fonction $d$ associée tend vers 0 en $+\infty$. En revanche, la température $f(t)$ tend vers $+\infty$ lorsque $t$ tend vers $+\infty$.

— Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(t) = 100\cos(2\pi t)$. La fonction $f$ étant périodique de période 1, on a $d(t) = 0$ pour tout réel $t \geqslant 0$. Pourtant, sur tout intervalle de temps d'au moins une heure, l'amplitude thermique est de 200 °C.

Toutefois, il est correct d'affirmer que la température dans le four se stabilise, mais cette affirmation se déduit de la limite fini de $f$ en $+\infty$.

## Exercice 2

*Commun à tous les candidats*

1. *a)* Le module de $j$ étant égale à $\sqrt{(-1/2)^2 + (\sqrt{3}/2)^2} = 1$, on doit avoir

$$j = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta,$$

d'où $\cos\theta = -1/2$ et $\sin\theta = \sqrt{3}/2$, donc $\theta \equiv 2\pi/3 \pmod{2\pi}$. Par conséquent,

$$j = \cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}.$$

Nous en déduisons les formes algébriques et exponentielles de $a'$, $b'$ et $c'$ :

$$\begin{aligned}
a' &= 4\left(\frac{-1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 - 2\mathrm{i}\sqrt{3}, & a' &= -4\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3} = 4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3} = 4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3},\\
b' &= -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}, & b' &= 2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3},\\
c' &= -2 + 2\mathrm{i}\sqrt{3}, & c' &= 4\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}.
\end{aligned}$$

*b)* Voir la figure 8 page suivante.

2. Notons $z_{\vec{u}}$ l'affixe d'un vecteur $\vec{u}$. Puisque les points A, B et C sont alignés, le quotient $z_{\overrightarrow{AB}}/z_{\overrightarrow{AC}}$ est réel, or

$$\frac{z_{\overrightarrow{A'B'}}}{z_{\overrightarrow{A'C'}}} = \frac{b'-a'}{c'-a'} = \frac{b-a}{c-a} = \frac{z_{\overrightarrow{AB}}}{z_{\overrightarrow{AC}}},$$

donc $z_{\overrightarrow{A'B'}}/z_{\overrightarrow{A'C'}}$ est également réel, prouvant ainsi que les points A′, B′ et C′ sont alignés.

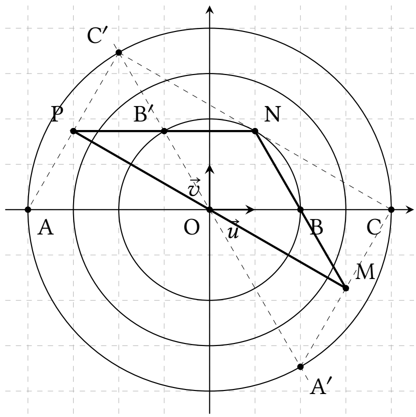



FIGURE 8

*Solution alternative.* Soit M un point d'affixe $z$ et M′ le point affixe $jz$. On a

$$\mathrm{OM}' = |jz| = |j|\,|z| = |z| = \mathrm{OM}'$$

et

$$(\overrightarrow{\mathrm{OM}}, \overrightarrow{\mathrm{OM}'}) = \arg jz - \arg z = \arg j + \arg z - \arg z = \frac{2\pi}{3}.$$

Ainsi le point M′ est l'image du point M par la rotation de centre O et d'angle $2\pi/3$. Les points A, B et C sont alignés, et une rotation conserve l'alignement (l'image d'une droite est une droite), donc les points A′, B′ et C′ sont alignés.

3. On a

$$2(n-m) = c + c' - (a' + c) = c' - a' = j(c-a)$$

et

$$2(n-p) = c + c' - (a + c') = c - a.$$

Remarquons que $n - m = j(n-p)$, d'où nous déduisons que

$$\mathrm{NM} = |n-m| = |j| \times |n-p| = \mathrm{NP}$$

car $|j| = 1$. Il s'ensuit que le triangle MNP est isocèle en N.

## Exercice 3

*Commun à tous les candidats*

### Partie A

1. *a)* La calculatrice donne $\mathbb{P}(X_U < 0{,}2) \approx 0{,}035$ et $\mathbb{P}(0{,}5 \leqslant X_U < 0{,}8) \approx 0{,}501$.

   *b)* Faisons l'hypothèse que les cristaux ont tous la même masse, alors la proportion des 1800 g de sucre qui finissent dans le récipient à fond étanche est égale à celle des cristaux de sucre qui mesurent moins de 0,2 mm. Il y a suffisament de cristaux dans 1800 g de sucre pour qu $\mathbb{P}(X_U < 0{,}2)$ soit une bonne estimation de cette proportion. La masse de sucre récupérée dans le récipient à fond étanche est donc égale à

   $$\mathbb{P}(X_U < 0{,}2) \times 1800\,\mathrm{g} \approx 63\,\mathrm{g}.$$

   De même, la masse de sucre récupérée dans le tamis 2 est égale à

   $$\mathbb{P}(0{,}5 \leqslant X_U < 0{,}8) \times 1800\,\mathrm{g} \approx 902\,\mathrm{g}.$$

   *Remarque.* L'hypothèse faite ne permet pas de donner une estimation convenable ; en effet, un cristal de 0,8 mm de diamètre a une masse d'environ $4^3 = 64$ fois celle d'un cristal de 0,2 mm.

2. Soit Z la variable aléatoire définie par $Z = (X_V - \mu_V)/\sigma_V = (X_V - 0{,}65)/\sigma_V$. Les inégalités doubles $0{,}5 \leqslant X_V < 0{,}8$ et $-0{,}15/\sigma_V \leqslant Z < 0{,}15/\sigma_V$ sont équivalentes, donc

   $$\mathbb{P}(0{,}5 \leqslant X_V < 0{,}8) = \mathbb{P}\left(-\frac{0{,}15}{\sigma_V} \leqslant Z < \frac{0{,}15}{\sigma_V}\right).$$

   Or la variable aléatoire Z suit la loi normale centrée réduite, donc

   $$\mathbb{P}\left(-\frac{0{,}15}{\sigma_V} \leqslant Z < \frac{0{,}15}{\sigma_V}\right) = 1 - 2\mathbb{P}\left(Z \leqslant -\frac{0{,}15}{\sigma_V}\right),$$

   ainsi

   $$\mathbb{P}\left(Z \leqslant -\frac{0{,}15}{\sigma_V}\right) = \frac{1 - \mathbb{P}(0{,}5 \leqslant X_V < 0,8)}{2} = 0{,}3.$$

   La calculatrice donne $-0{,}15/\sigma_V = 0{,}5244\ldots$, d'où $\sigma_V \approx 0{,}286$.

### Partie B

1. *a)* La probabilité pour que le paquet prélevé porte le label « extra fin » est, à l'aide de la formule des probabilités totales, égale à

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\mathrm{E}) &= \mathbb{P}(\mathrm{U}) \times \mathbb{P}_{\mathrm{U}}(\mathrm{E}) + \mathbb{P}(\mathrm{V}) \times \mathbb{P}_{\mathrm{V}}(\mathrm{E}) \\ &= 0{,}3 \times 0{,}03 + 0{,}7 \times 0{,}05 \\ &= 0{,}044.\end{aligned}$$

   *b)* La probabilité pour qu'un paquet portant le label « extra fin » contienne du sucre fournit par l'exploitation U est égale à

$$\mathbb{P}_{\mathrm{E}}(\mathrm{U}) = \frac{\mathbb{P}(\mathrm{E} \cap \mathrm{U})}{\mathbb{P}(\mathrm{E})} = \frac{\mathbb{P}(\mathrm{U}) \times \mathbb{P}_{\mathrm{U}}(\mathrm{E})}{\mathbb{P}(\mathrm{E})} = \frac{0{,}3 \times 0{,}03}{0{,}044} \approx 0{,}205.$$

2. Soit $x \in [0\,;1]$ la proportion des paquets qui contiennent du sucre provenant de l'exploitation U. On a donc $\mathbb{P}(\mathrm{U}) = x$ et $\mathbb{P}(\mathrm{V}) = 1-x$. On souhaite déterminer $x$ pour que $\mathbb{P}_{\mathrm{E}}(\mathrm{U}) = 0{,}3$. D'après les questions B.1.a et B.1.b, on a

$$\mathbb{P}_{\mathrm{E}}(\mathrm{U}) = \frac{\mathbb{P}(\mathrm{U}) \times \mathbb{P}_{\mathrm{U}}(\mathrm{E})}{\mathbb{P}(\mathrm{U}) \times \mathbb{P}_{\mathrm{U}}(\mathrm{E}) + \mathbb{P}(\mathrm{V}) \times \mathbb{P}_{\mathrm{V}}(\mathrm{E})} = \frac{0{,}03x}{0{,}03x + 0{,}05 \times (1-x)} = \frac{3x}{5-2x}.$$

   Par conséquent, $x$ est solution de l'équation

$$\frac{3x}{5-2x} = 0{,}3.$$

   Puisque $5-2x$ ne s'annule pas sur $[0\,;1]$, l'équation précédente est équivalente à l'équation affine

$$3x = 0{,}3(5-2x),$$

   dont la solution

$$x = \frac{5}{12} \approx 0{,}417$$

   appartient bien à l'intervalle $[0\,;1]$. Nous en déduisons que l'entreprise doit acheter 42 % de son sucre à l'exploitation U et 58 % à l'exploitation V afin que 30 % de ses paquets de sucre « extra fin » contiennent du sucre provenant de l'exploitation U.

## Partie C

1. Testons l'hypothèse suivante : « Parmi les paquets de sucre "extra fin", une proportion $p = 0{,}3$ contiennent du sucre provenant de l'exploitation U ». L'hypothèse est testé sur un échantillon de taille $n = 150$ dans lequel on a relevé une fréquence $f = 30/150 = 0{,}2$ de paquets dont le sucre provient de l'exploitation U. Comme $n \geqslant 30$, $np = 45 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 105 \geqslant 5$, l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % est égale à

$$\left[p - 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\,;p + 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$$
$$= \left[0{,}3 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}3\times(1-0{,}3)}{150}}\,;0{,}3 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}3\times(1-0{,}3)}{150}}\right]$$
$$\approx [0{,}226\,;0{,}374],$$

où nous avons arrondi par défaut la borne inférieure et arrondi par excès la borne supérieure. La fréquence $f$ n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation asymptotique, nous devons donc rejeter l'hypothèse avec un risque d'erreur de 5 % et l'acheteur peut remettre en question l'annonce de l'entreprise.

2. Soient $n = 150$ la taille de l'échantillon et $f = 0{,}42$ la proportion des paquets contenant du sucre fourni par l'exploitation U. On vérifie que $n \geqslant 30$, $nf = 63 \geqslant 5$ et $n(1-f) = 87 \geqslant 5$, par conséquent, l'intervalle de confiance, au seuil de confiance de 95 %, de la proportion de paquets labellisés « extra fin » contenant du sucre provenant de l'exploitation U, est

$$\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}\,;f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[0{,}42 - \frac{1}{\sqrt{150}}\,;0{,}42 + \frac{1}{\sqrt{150}}\right]$$
$$\approx [0{,}338\,;0{,}502].$$

## Exercice 4

*Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité*

1. Une représentation paramétrique de la droite passant par le point C et de vecteur directeur
$$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}4\\0\\-4\end{pmatrix}$$
est
$$\begin{cases} x = 4t \\ y = 3 \\ z = 2 - 4t. \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

2. *a)* Soit M un point de la droite (CD). D'après la question précédente, ses coordonnées sont de la forme $(4t\,;3\,;2-4t)$ où $t \in \mathbb{R}$. La distance BM est minimale si et seulement si $BM^2$ est minimale. La repère étant orthonormé, on a
$$\begin{aligned} BM^2 &= (4t-4)^2 + (3-(-1))^2 + (2-4t-0)^2 \\ &= 32t^2 - 48t + 36. \end{aligned}$$
La fonction $t \longmapsto 32t^2 - 48t + 36$ est un polynôme du second degré ; son coefficient dominant est positif, donc elle possède un minimum atteint en
$$t = -\frac{-48}{2\times 32} = \frac{3}{4}.$$
Nous en déduisons que la distance entre les points B et M est minimale si et seulement si M a pour coordonnées $(4\times 3/4\,;3\,;2-4\times 3/4)$, soit $(3\,;3\,;-1)$.

   *b)* Les droites (BH) et (CD) sont sécantes, et le produit scalaire de leurs vecteurs directeurs
$$\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}-1\\4\\-1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}4\\0\\-4\end{pmatrix}$$
est, le repère étant orthonormal, égal à
$$\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{CD} = -1\times 4 + 4\times 0 + (-1)\times(-4) = 0,$$
donc les droites (BH) et (CD) sont perpendiculaires.

*c)* Notons $\mathscr{A}_{\text{BCD}}$ l'aire, exprimée en $\text{cm}^2$, du triangle BCD. D'après la question précédente, la droite (BH) est sa hauteur issue du sommet B et de pied H, d'où la formule

$$\mathscr{A}_{\text{BCD}} = \frac{1}{2}\text{BH} \times \text{CD}.$$

On a

$$\text{BH}^2 = (-1)^2 + 4^2 + (-1)^2 = 18 = \left(3\sqrt{2}\right)^2,$$
$$\text{CD}^2 = 4^2 + 0^2 + (-4)^2 = 32 = \left(4\sqrt{2}\right)^2,$$

donc

$$\mathscr{A}_{\text{BCD}} = \frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times 4\sqrt{2} = 12.$$

Le triangle BCD a une aire égale à 12 $\text{cm}^2$.

3. *a)* Les vecteurs

$$\overrightarrow{\text{BC}}\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\text{CD}}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

sont non colinéaires et

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{\text{BC}} = 2 \times (-4) + 1 \times 4 + 2 \times 2 = 0,$$
$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{\text{CD}} = 2 \times 4 + 1 \times 0 + 2 \times (-4) = 0.$$

Nous en déduisons que le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (BCD).

*b)* On déduit de la question précédente qu'une équation cartésienne du plan (BCD) est

$$2x + y + 2z + d = 0,$$

où $d$ est un nombre réel à déterminer. Les coordonnées du point B doivent vérifier cette équation, donc $2 \times 4 + (-1) + 2 \times 0 + d = 0$, d'où $d = -7$. Une équation cartésienne du plan (BCD) est donc

$$2x + y + 2z - 7 = 0.$$

*c)* La droite $\Delta$ passe par le point A et, d'après la question B.3.a, admet $\vec{n}$ comme vecteur directeur, donc une représentation paramétrique de $\Delta$ est

$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 4 + 2t. \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

*d)* Le point I appartient à la droite $\Delta$, ses coordonnées sont donc de la forme $(2 + 2t\,;1 + t\,;4 + 2t)$. Le point I appartient au plan (BCD), donc $t$ vérifie $2(2 + 2t) + (1 + t) + 2(4 + 2t) - 7 = 0$, soit $9t + 6 = 0$, d'où $t = -2/3$. Les coordonnées du point I sont donc

$$\left(2 + 2\left(-\frac{2}{3}\right); 1 + \left(-\frac{2}{3}\right); 4 + 2\left(-\frac{2}{3}\right)\right) = \left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{8}{3}\right).$$

4. Soit $\mathscr{V}_{\text{ABCD}}$ le volume, exprimée en cm$^3$, du tétraèdre ABCD. Prenons pour base le triangle BCD. D'après les questions B.3.c et B.3.d, la droite (AI) est la hauteur issue du sommet A et de pied I. Nous avons donc

$$\mathscr{V}_{\text{ABCD}} = \frac{1}{3}\mathscr{A}_{\text{BCD}} \times \text{AI}.$$

Nous savons déjà que $\mathscr{A}_{\text{BCD}} = 12$ et, le repère étant orthonormé,

$$\text{AI}^2 = \left(\frac{2}{3} - 2\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - 1\right)^2 + \left(\frac{8}{3} - 4\right)^2 = \frac{16}{9} + \frac{4}{9} + \frac{16}{9} = 4,$$

donc

$$\mathscr{V}_{\text{ABCD}} = \frac{1}{3} \times 12 \times 2 = 8.$$

Le tétraèdre ABCD a un volume égal à 8 cm$^3$.

## Exercice 4

*Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité*

### Partie A. Cryptage

1. Une lettre représentée par le nombre entier $x$ est le nombre entier $y$ tel que

$$y \equiv x(x+13) \pmod{33} \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant y \leqslant 32.$$

La lettre N est représentée par le nombre 13 et

$$13(13+13) \equiv 169+169 \equiv 4+4 \equiv 8 \pmod{33},$$

donc la lettre N est bien codée par l'entier 8.

2. La lettre O est représentée par l'entier 14 et

$$14(14+13) \equiv 7 \times 2 \times 27 \equiv 7 \times 54 \equiv 7 \times 21 \equiv 15 \pmod{33},$$

donc la lettre O est codé par l'entier 15.

### Partie B. Décryptage

1. Comme

$$\big(x(x+13)-3\big)-\big((x+23)^2-4\big) = 33x+528 = 33(x+16),$$

nous avons

$$x(x+13)-3 \equiv (x+23)^2-4 \pmod{33},$$

d'où nous déduisons que

$$x(x+13)-3 \equiv 0 \pmod{33} \iff (x+23)^2-4 \equiv 0 \pmod{33},$$

prouvant ainsi que

$$x(x+13) \equiv 3 \pmod{33} \iff (x+23)^2 \equiv 4 \pmod{33}.$$

2. *a)* Puisque 3 et 11 sont des diviseurs de 33, si $(x+23)^2 \equiv 4 \pmod{33}$ alors $(x+23)^2 \equiv 4 \pmod{3}$ et $(x+23)^2 \equiv 4 \pmod{11}$.

*Solution alternative.* Supposons que $(x+23)^2 \equiv 4 \pmod{33}$. Alors, par définition, 33 divise $(x+23)^2 - 4$. Or 3 et 11 sont des diviseurs de 33, donc 3 et 11 divisent $(x+23)^2 - 4$, si bien que $(x+23)^2 \equiv 4 \pmod{3}$ et $(x+23)^2 \equiv 4 \pmod{11}$.

*b)* Puisque 3 et 11 sont deux entiers premiers entre eux dont le produit est égal à 33, si $(x+23)^2 \equiv 4 \pmod{3}$ et $(x+23)^2 \equiv 4 \pmod{11}$ alors $(x+23)^2 \equiv 4 \pmod{33}$.

*Solution alternative.* Posons $z = (x+23)^2 - 4$. Comme 3 et 11 sont premiers entre eux, d'après le théorème de Bézout, il existe deux entiers relatifs $u$ et $v$ tels que $3u + 11v = 1$. Multiplions l'équation par $z$ pour obtenir $3uz + 11vz = z$. Supposons que $(x+23)^2 \equiv 4 \pmod{3}$ et $(x+23)^2 \equiv 4 \pmod{11}$. Alors 3 et 11 divisent $z$, donc divisent $3uz$ et $11vz$, puis leur somme $z$, prouvant ainsi que $(x+23)^2 \equiv 4 \pmod{33}$.

*c)* D'après les questions B.1, B.2.a et B.2.b, on a l'équivalence

$$x(x+13) \equiv 3 \pmod{33} \iff \begin{cases} (x+23)^2 \equiv 4 \pmod{3} \\ (x+23)^2 \equiv 4 \pmod{11}. \end{cases}$$

Or $4 \equiv 1 \pmod{3}$, d'où

$$x(x+13) \equiv 3 \pmod{33} \iff \begin{cases} (x+23)^2 \equiv 1 \pmod{3} \\ (x+23)^2 \equiv 4 \pmod{11}. \end{cases}$$

3. *a)* En testant chaque entier entre 0 et 2, nous trouvons deux solutions : 1 et 2.

   *b)* De la même manière, nous trouvons également deux solutions : 2 et 9.

4. *a)* D'après les questions B.2.c, B.3.a et B.3.b, on a $x(x+13) \equiv 3 \pmod{33}$ si et seulement si

$$\begin{cases} x + 23 \equiv 1 \text{ ou } 2 \pmod{3} \\ x + 23 \equiv 2 \text{ ou } 9 \pmod{11} \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} x \equiv 2 \text{ ou } 1 \pmod{3} \\ x \equiv 1 \text{ ou } 8 \pmod{11}, \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod 3 \\ x \equiv 8 \pmod{11} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x \equiv 0 \pmod 3 \\ x \equiv 1 \pmod{11} \end{cases}$$

$$\text{ou} \quad \begin{cases} x \equiv 2 \pmod 3 \\ x \equiv 1 \pmod{11} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x \equiv 0 \pmod 3 \\ x \equiv 8 \pmod{11}. \end{cases}$$

*b)* L'ensemble des solutions des systèmes précédents dans $\{0, 1, 2, \dots, 32\}$ est $\{8, 12, 23, 30\}$.

5. Voir la figure 9.

```
Pour x allant de 0 à 32
    Si le reste de la division de x(x + 13) par 33 est égal à 3 alors
        Afficher x
    Fin Si
Fin Pour
```

FIGURE 9

6. D'après la question B.4.b, l'équation $x(x+13) \equiv 3 \pmod{33}$ possède plusieurs solutions tels que $0 \leqslant x < 26$, par conséquent, le « chiffre de Rabin » ne permet pas de décoder un message lettre par lettre. On peut néanmoins affirmer que la première lettre du message de Bob est A, M ou X.