ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES

DU

BACCALAURÉAT SCIENTIFIQUE

2013

Sujets & corrigés détaillés

Éric Guirbal

24 juin 2013

Éric Guirbal
Professeur privé de mathématiques
Toulouse
eric.guirbal@lecons-de-maths.fr
www.lecons-de-maths.fr

Ce document est en chantier.
Les mises à jour se font en continu et sont disponibles à l'adresse
http://www.lecons-de-maths.fr/ressources/cours-et-exercices#annales_bac_s

Version du 24 juin 2013.

Sommaire

Sujet 1

Amérique du Nord

30 mai 2013

Sujet 2

Antilles-Guyanne

18 juin 2013

Sujet 3

Liban

28 mai 2013

Sujet 4

Métropole

20 juin 2013

ÉNONCÉ

Exercice 1 (4 points)
Commun à tous les candidats.

Une jardinerie vend de jeunes plants d'arbres qui proviennent de trois horticulteurs : 35 % des plants proviennent de l'horticulteur H_1, 25 % de l'horticulteur H_2 et le reste de l'horticulteur H_3. Chaque horticulteur livre deux catégories d'arbres : des conifères et des arbres à feuilles.

La livraison de l'horticulteur H_1 comporte 80 % de conifères alors que celle de l'horticulteur H_2 n'en comporte que 50 % et celle de l'horticulteur H_3 seulement 30 %.

1. Le gérant de la jardinerie choisit un arbre au hasard dans son stock. On envisage les évènements suivants :
   - H_1 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_1 » ;
   - H_2 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_2 » ;
   - H_3 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_3 » ;
   - C : « l'arbre choisi est un conifère » ;
   - F : « l'arbre choisi est un arbre feuillu ».
2. a. Construire un arbre pondéré traduisant la situation.
   b. Calculer la probabilité que l'arbre choisi soit un conifère acheté chez l'horticulteur H_3.
   c. Justifier que la probabilité de l'évènement C est égale à 0,525.
   d. L'arbre choisi est un conifère. Quelle est la probabilité qu'il ait été acheté chez l'horticulteur H_1 ? On arrondira à 10^{-3}.

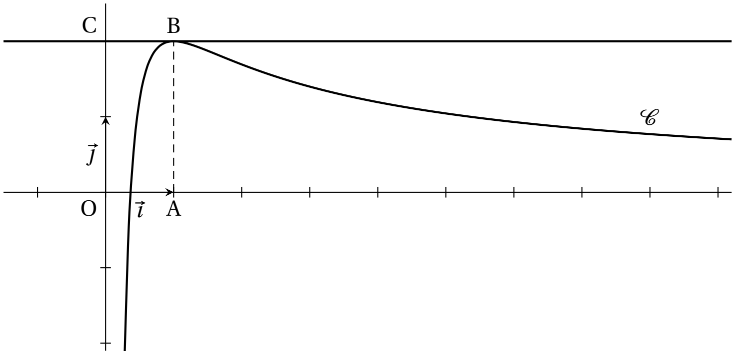

FIGURE 1

3. On choisit au hasard un échantillon de 10 arbres dans le stock de cette jardinerie. On suppose que ce stock est suffisamment important pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise de 10 arbres dans le stock.

   On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de conifères de l'échantillon choisi.

   a. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

   b. Quelle est la probabilité que l'échantillon prélevé comporte exactement 5 conifères ? On arrondira à 10^{-3}.

   c. Quelle est la probabilité que cet échantillon comporte au moins deux arbres feuillus ? On arrondira à 10^{-3}.

Exercice 2 (7 points)
Commun à tous les candidats.

Sur le graphique de la figure 1, on a tracé, dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

On dispose des informations suivantes :

– les points A, B, C ont pour coordonnées respectives $(1,0)$, $(1,2)$, $(0,2)$;
– la courbe $\mathscr{C}$ passe par le point B et la droite (BC) est tangente à $\mathscr{C}$ en B. ;
– il existe deux réels positifs a et b tels que pour tout réel strictement positif x,

$$f(x) = \frac{a + b\ln x}{x}.$$

1. a. En utilisant le graphique, donner les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.

   b. Vérifier que pour tout réel strictement positif,

$$f'(x) = \frac{(b-a) - b\ln x}{x^2}.$$

   c. En déduire les réels a et b.

2. a. Justifier que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0\,;+\infty[$, $f'(x)$ a le même signe que $-\ln x$.

   b. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$. On pourra remarquer que pour tout réel x strictement positif,

$$f(x) = \frac{2}{x} + 2\frac{\ln x}{x}.$$

   c. En déduire le tableau de variations de la fonction f.

3. a. Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0\,;1]$.

   b. Par raisonnement analogue, on démontre qu'il existe un unique réel β de l'intervalle $]1\,;+\infty[$ tel que $f(\beta) = 1$.

   Déterminer l'entier n tel que $n < \beta < n+1$.

4. On donne l'algorithme de la figure 2 page suivante.

   a. Faire tourner cet algorithme en complétant le tableau 1 page suivante que l'on recopiera sur la copie.

   b. Que représentent les valeurs affichées par cet algorithme ?

Variables	a, b et m sont des nombres réels
Initialisation	Affecter à a la valeur 0
	Affecter à b la valeur 1
Traitement	Tant que $b - a > 0{,}1$
	Affecter à m la valeur $\frac{1}{2}(a+b)$
	Si $f(m) < 1$ alors Affecter à a la valeur de m
	Sinon Affecter à b la valeur de m
	Fin de Si
	Fin de Tant que
Sortie	Afficher a
	Afficher b

FIGURE 2

	étape 1	étape 2	étape 3	étape 4	étape 5
a	0				
b	1				
$b-a$					
m					

TABLE 1

c. Modifier l'algorithme pour qu'il affiche les deux bornes d'un encadrement de β d'amplitude 10^{-1}.

5. Le but de cette question est de démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ partage le rectangle OABC en deux domaines d'aires égales.

a. Justifier que cela revient à démontrer que

$$\int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

b. En remarquant que l'expression de $f(x)$ peut s'écrire

$$\frac{2}{x} + 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x,$$

terminer la démonstration.

Exercice 3 (4 points)
Commun à tous les candidats.

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.

Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. **Proposition 1 :** Dans le plan muni d'un repère orthonormé, l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie l'égalité $|z - \mathrm{i}| = |z + \mathrm{i}|$ est une droite.
2. **Proposition 2 :** Le nombre complexe $(1 + \mathrm{i}\sqrt{3})^4$ est un nombre réel.
3. Soit ABCDEFGH un cube (figure 3).

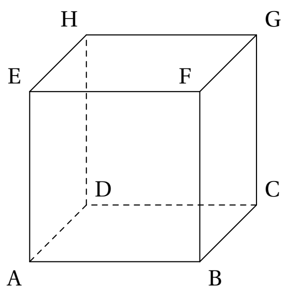

FIGURE 3

Proposition 3 : Les droites (EC) et (BG) sont orthogonales.

4. L'espace muni d'un repère orthonormée $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Soit le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $x+y+3z+4=0$. On note S le point de coordonnées $(1, -2, -2)$.

   Proposition 4 : La droite qui passe par S et qui est perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$ a pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 2+t \\ y = -1+t, \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 1+3t \end{cases}$$

Exercice 4 (5 points)
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.

Soit la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 2 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1.$$

1. a. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4. On pourra en donner des valeurs approchées à 10^{-2} près.
   b. Formuler une conjecture sur le sens de variation de cette suite.
2. a. Démontrer que pour tout entier naturel n,

$$u_n \leqslant n+3.$$

   b. Démontrer que pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n+3-u_n).$$

   c. En déduire une validation de la conjecture précédente.
3. On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - n$.
   a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.

b. En déduire que pour tout entier naturel n,

$$u_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n.$$

c. Déterminer la limite de la suite (u_n).

4. Pour tout entier naturel non nul n, on pose :

$$\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n \quad \text{et} \quad \mathrm{T}_n = \frac{\mathrm{S}_n}{n^2}.$$

a. Exprimer S_n en fonction de n.

b. Déterminer la limite de la suite (T_n).

Exercice 4 (5 points)

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité.

On étudie la population d'un région imaginaire. Le 1er janvier 2013, cette région comptait 250 000 habitants dont 70 % résidaient à la campagne et 30 % en ville.

L'examen des données statistiques recueillies au cours de plusieurs années amène à choisir de modéliser l'évolution de la population pour les années à venir de la façon suivante :

– l'effectif de la population est globalement constant ;
– chaque année, 5 % de ceux qui résident en ville décident d'aller s'installer à la campagne et 1 % de ceux qui résident à la campagne choisissent d'aller habiter en ville.

Pour tout entier naturel n, on note v_n le nombre d'habitants de cette région qui résident en ville au 1er janvier $2013 + n$ et c_n le nombre de ceux qui habitent à la campagne à la même date.

1. Pour tout entier naturel n, exprimer v_{n+1} et c_{n+1} en fonction de v_n et c_n.

2. Soit la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0{,}01 \\ 0{,}05 & 0{,}99 \end{pmatrix}$. On pose $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ où a, b sont deux réels fixés et $\mathrm{Y} = \mathrm{AX}$. Déterminer, en fonction de a et b, les réels c et d tels que $\mathrm{Y} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$.

Les résultats précédents permettent d'écrire que pour tout entier naturel n,

$$X_{n+1} = AX_n$$

où $X_n = \begin{pmatrix} v_n \\ c_n \end{pmatrix}$. On peut donc en déduire que pour tout entier naturel n,

$$X_n = A^n X_0.$$

3. Soient les matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$.

   a. Calculer PQ et QP. En déduire la matrice P^{-1} en fonction de Q.

   b. Vérifier que la matrice $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale D que l'on précisera.

   c. Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1,

$$A^n = PD^nP^{-1}.$$

4. Les résultats des questions précédents permettent d'établir que

$$v_n = \frac{1}{6}\left(1 + 5 \times 0,94^n\right) v_0 + \frac{1}{6}\left(1 - 0,94^n\right) c_0.$$

Quelles informations peut-on en déduire pour la répartition de la population de cette région à long terme ?

CORRIGÉ

Exercice 1

Commun à tous les candidats.

1. a. L'arbre de probabilité de la figure 4 décrit la situation.

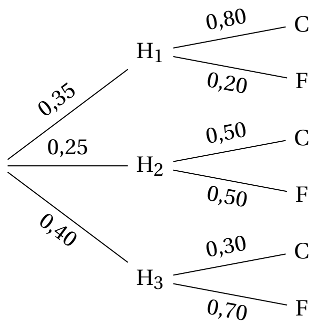

FIGURE 4

b. L'événement « l'arbre choisi est un conifère acheté chez l'horticulteur H_3 » est l'intersection des événements C et H_3. On trouve

$$P(C \cap H_3) = P(H_3) \times P_{H_3}(C) = 0{,}40 \times 0{,}3 = 0{,}12.$$

c. Chaque arbre provient nécessairement d'une et d'une seule des trois jardineries, donc les événements H_1, H_2 et H_3 forment une partition de l'univers. De plus, chacun de ces événements a une probabilité non nulle. Nous pouvons donc appliquer la formule des probabilité totales. Nous obtenons

$$\begin{aligned} P(C) &= P(H_1)P_{H_1}(C) + P(H_2)P_{H_2}(C) + P(H_3)P_{H_3}(C) \\ &= 0{,}35 \times 0{,}80 + 0{,}25 \times 0{,}5 + 0{,}40 \times 0{,}30 \\ &= 0{,}525. \end{aligned}$$

d. La probabilité que le conifère provienne de l'horticulteur H_1 est égale à

$$P_C(H_1) = \frac{P(C \cap H_1)}{P(C)} = \frac{P(H_1)P_{H_1}(C)}{P(C)} = \frac{0{,}35 \times 0{,}8}{0{,}525} = \frac{0{,}28}{0{,}525} \approx 0{,}533.$$

2. a. Le choix d'un arbre donne lieu à deux éventualités incompatibles :
   - *La réussite :* l'arbre choisi est un conifère. Sa probabilité est $p = P(C) = 0{,}525$;
   - *L'échec :* l'arbre choisi est un feuillu. Sa probabilité est $1 - p = 0{,}475$.

   De plus, le tirage s'effectuant avec remise, les choix sont indépendants. L'expérience est donc un schema de Bernoulli et la variable aléatoire X qui donne le nombre de conifères de l'échantillon choisi suit la loi binomiale de paramètres $p = 0{,}525$ et $n = 10$.

   b. La probabilité que l'échantillon comporte exactement 5 arbres est égale à

$$P(X = 5) = \binom{10}{5} 0{,}525^5 \times 0{,}475^5 \approx 0{,}243.$$

   c. La probabilité qu'il y ait au moins deux arbres feuillus est égale à la probabilité qu'il y ait au plus 8 conifères, soit

$$\begin{aligned} P(X \leqslant 8) &= 1 - P(X > 8) \\ &= 1 - P(X = 9) - P(X = 10) \\ &= 1 - \binom{10}{9} 0{,}525^9 \times 0{,}475^1 - \binom{10}{10} 0{,}525^{10} \\ &\approx 0{,}984. \end{aligned}$$

Exercice 2

Commun à tous les candidats.

1. a. On sait que le point B(1,2) appartient à courbe $\mathscr{C}$ donc $f(1) = 2$. On sait aussi que la tangente à $\mathscr{C}$ en B est parallèle à l'axe des abscisses donc $f'(1) = 0$.

   b. Soit $x \in]0\,;+\infty[$. Alors

$$f'(x) = \frac{b\frac{1}{x} \times x - (a + b\ln x) \times 1}{x^2} = \frac{(b-a) - b\ln x}{x^2}.$$

   c. De $f(1) = a$ on tire $a = 2$. Et de $f'(1) = b - a$, on déduit que $b = 2$. Finalement, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$,

$$f(x) = \frac{2 + 2\ln x}{x} \quad \text{et} \quad f'(x) = \frac{-\ln x}{x^2}.$$

2. a. Comme $x^2 > 0$ pour tout réel x, le nombre dérivé $f'(x)$ a le même signe que $-\ln x$.

   b. On sait que

$$\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$$

donc

$$\lim_{x\to O^+} 2 + 2\ln x = -\infty.$$

On sait aussi que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty.$$

Finalement,

$$\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty.$$

De

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0,$$

on déduit

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

FIGURE 5

c. Voir la figure 5.

3. a. *Existence.* La fonction f est continue sur l'intervalle $]0;1]$, de plus $\lim_{x\to 0^+} f(x) < 1$ et $f(1) \geqslant 1$, donc nous pouvons appliquer le théorème des valeurs intermédiaires qui affirme que l'équation $f(x) = 1$ possède au moins une solution sur l'intervalle $]0;1]$.

   Unicité. La fonction f est strictement monotone sur $]0;1]$, donc l'équation $f(x) = 1$ possède au plus une solution sur $]0;1]$.

   Nous avons démontré que l'équation $f(x) = 1$ possède une et une seule solution sur l'intervalle $]0;1]$.

   b. À l'aide de la calculatrice, on trouve $f(5) \approx 1{,}04 \geqslant 1$ et $f(6) \approx 0{,}93 \leqslant 1$. Comme la fonction f est continue sur l'intervalle $[5;6]$, le théorème des valeurs intermédiaires nous dit que l'équation $f(x) = 1$ admet une solution sur l'intervalle $[5;6]$. D'après l'énoncé, cette équation possède une unique solution sur $]1;+\infty[$, donc $5 \leqslant \beta \leqslant 6$. Puisque $f(5) \neq 1$ et $f(6) \neq 1$, nous concluons que $n < \beta < n+1$ avec $n = 5$.

4. a. Voir la table 2 page ci-contre.

   b. L'algorithme affiche les bornes d'un encadrement de α d'amplitude inférieure ou égale à 10^{-1}.

   c. Pour obtenir un encadrement de β d'amplitude 10^{-1}, il suffit d'initialiser les valeurs de a et de b avec respectivement la borne

	étape 1	étape 2	étape 3	étape 4	étape 5
a	0	0	0,25	0,375	0,4375
b	1	0,5	0,5	0,5	0,5
$b-a$	1	0,5	0,25	0,125	0,0625
m	0,5	0,25	0,375	0,4375	

TABLE 2

Variables	a, b et m sont des nombres réels
Initialisation	Affecter à a la valeur 5
	Affecter à b la valeur 6
Traitement	Tant que $b-a>0{,}1$
	Affecter à m la valeur $\frac{1}{2}(a+b)$
	Si $f(m)<1$ alors Affecter à a la valeur de m
	Sinon Affecter à b la valeur de m
	Fin de Si
	Fin de Tant que
Sortie	Afficher a
	Afficher $a+0{,}1$

FIGURE 6

inférieure et la borne supérieure de l'encadrement trouvé à la question 3.a., de remplacer $f(m)<1$ par $f(m)>1$ car la fonction est décroissante sur $[2;+\infty[$, et enfin de remplacer b par $a+0{,}1$ à la sortie de façon à avoir une amplitude de 10^{-1}. Voir l'algorithme figure 6.

5. a. La courbe $\mathscr{C}$ partage le rectangle OABC en deux domaines. Notons $\mathscr{D}$ celui qui est délimité par la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations $x=1$ et $y=0$ (figure 7 page suivante). Les deux domaines ont la même aire si et seulement si l'aire du domaine $\mathscr{D}$ est égale

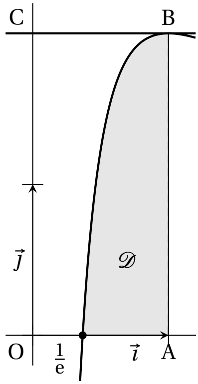

FIGURE 7

à la moitié de l'aire du rectangle OABC. Le rectangle a une aire égale à 2. Notons x_0 l'abscisse du point d'intersection de la courbe avec le segment [OA]. Comme $x_0 \in]0;1]$ et que la fonction f est positive sur l'intervalle $[x_0;1]$, l'aire du domaine $\mathscr{D}$ est égale à

$$\int_{x_0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Calculons x_0. Sur $]0;1]$, on a les équivalences

$$\begin{aligned} f(x_0) = 0 &\iff \frac{2+2\ln x_0}{x_0} = 0 \\ &\iff 2+2\ln x_0 = 0 \\ &\iff \ln x_0 = -1 \\ &\iff x_0 = \frac{1}{e}. \end{aligned}$$

Finalement, la courbe $\mathscr{C}$ partage le rectangle OABC en deux domaines d'aires égales si et seulement si

$$\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

b. Déterminons une primitive de la fonction f. Pour cela, remarquons que
$$f(x) = \frac{2+2\ln x}{x} = 2(1+\ln x)\frac{1}{x}.$$
c'est-à-dire que $f(x)$ est de la forme
$$f(x) = 2u(x)u'(x),$$
où u est la fonction dérivable définie sur $]0\,;+\infty[$ par $u(x) = 1+\ln x$. Nous en déduisons qu'une primitive de la fonction f est la fonction u^2. Il ne nous reste plus qu'à calculer l'aire du domaine $\mathscr{D}$. On trouve
$$\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = u^2(1) - u^2\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right) = (1+\ln 1)^2 - \left(1+\ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)\right)^2.$$
Comme $\ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right) = -\ln \mathrm{e} = -1$, il vient
$$\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 1,$$
ce qui achève la démonstration.

Exercice 3

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.

1. *La proposition est vraie.* Soient A, B et M les points d'affixes respectives $-\mathrm{i}$, i et z. Les nombres complexes $z-\mathrm{i}$ et $z+\mathrm{i}$ sont les affixes des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{BM}}$. Donc $|z-\mathrm{i}| = |z+\mathrm{i}|$ si et seulement si $\mathrm{MA} = \mathrm{MB}$. On conclut que l'ensemble cherché est la médiatrice du segment [AB].

Solution alternative. L'équation $|z-\mathrm{i}| = |z+\mathrm{i}|$ est équivalente à l'équation $|z-\mathrm{i}|^2 = |z+\mathrm{i}|^2$. Posons $z = x+\mathrm{i}y$ avec $x, y \in \mathbb{R}$. Alors

$z - \mathrm{i} = x + \mathrm{i}(y-1)$ et $z + \mathrm{i} = x + \mathrm{i}(y+1)$, donc

$$\begin{aligned} |z-\mathrm{i}| = |z+\mathrm{i}| &\iff x^2 + (y-1)^2 = x^2 + (y+1)^2 \\ &\iff y^2 - 2y + 1 = y^2 + 2y + 1 \\ &\iff -2y = 2y \\ &\iff y = 0. \end{aligned}$$

Nous retrouvons que l'ensemble cherché est l'axe des abscisses.

2. *La proposition est fausse.* En effet,

$$\arg(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^4 = 4\arg(1+\mathrm{i}\sqrt{3}) = 4\arg\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{4\pi}{3} \pmod{2\pi}.$$

Or $\frac{4\pi}{3} \neq 0 \pmod{\pi}$, donc $(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^4$ n'est pas un nombre réel.

3. *La proposition est vraie.* Dans le repère orthonormal $(\mathrm{A}; \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}, \overrightarrow{\mathrm{AE}})$, on considère les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{EC}}(1,1,-1)$ et $\overrightarrow{\mathrm{BG}}(0,1,1)$. Comme le repère est orthonormal, le produit scalaire des deux vecteurs est donnée par la formule

$$\overrightarrow{\mathrm{EC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BG}} = 1 \times 0 + 1 \times 1 + (-1) \times 1 = 0.$$

On en déduit que les droites (EC) et (BG) sont orthogonales.

4. *La proposition est vraie.* Le vecteur $\vec{u}(1,1,3)$ est à la fois un vecteur directeur de la droite et un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$. Donc la droite est perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$. De plus, on vérifie que le point S est le point de la droite de paramètre $t = -1$.

Exercice 4

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.

1. a. On trouve

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{2}{3}u_0 + \frac{1}{3} \times 0 + 1 = \frac{7}{3} \approx 2{,}33, \\ u_2 &= \frac{2}{3}u_1 + \frac{1}{3} \times 1 + 1 = \frac{26}{9} \approx 2{,}89, \end{aligned}$$

et en procédant de la même manière,

$$u_3 = \frac{97}{27} \approx 3{,}59 \quad \text{et} \quad u_4 = \frac{356}{81} \approx 4{,}40.$$

b. Étant donné que $u_0 \leqslant u_1 \leqslant u_2 \leqslant u_3 \leqslant u_4$, nous conjecturons que la suite (u_n) est croissante.

2. a. Démontrons par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 0$,

$$u_n \leqslant n+3.$$

L'inégalité est vraie pour $n = 0$; en effet $u_0 = 2 < 3$.
Supposons l'inégalité vraie pour un entier $n \geqslant 0$. Partons de la définition de la suite (u_n),

$$u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1,$$

et utilisons l'hypothèse de récurrence,

$$u_n \leqslant n+3,$$

pour en déduire l'inégalité

$$u_{n+1} \leqslant \frac{2}{3}(n+3) + \frac{1}{3}n + 1.$$

Réduisons le membre de droite,

$$u_{n+1} \leqslant n+3.$$

ajoutons lui 1,

$$u_{n+1} \leqslant (n+1)+3,$$

et nous avons l'inégalité à démontrer appliquée à l'entier $n+1$.
Nous avons démontré que $u_n \leqslant n+3$ pour tout entier $n \geqslant 0$.

b. La différence entre deux termes consécutifs de la suite (u_n) est égale à

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 - u_n = \frac{1}{3}(n+3-u_n).$$

c. Soit n un entier naturel. L'inégalité $n+3-u_n \geqslant 0$, et l'égalité précédente impliquent immédiatement que

$$u_{n+1} - u_n \leqslant 0.$$

La conjecture est démontrée : la suite (u_n) est croissante.

3. a. Déterminons v_{n+1} en fonction de v_n. Pour tout entier $n \geqslant 0$, nous avons

$$v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1) = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 - n - 1 = \frac{2}{3}(u_n - n) = \frac{2}{3}v_n.$$

Donc la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{2}{3}$.

b. Le premier terme de la suite géométrique (v_n) est $v_0 = u_0 - 0 = 2$. Pour tout entier $n \geqslant 0$, le terme de rang n de la suite (v_n) est égal à

$$v_n = v_0 q^n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n,$$

et celui de la suite (u_n) est égal à

$$u_n = v_n + n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n.$$

c. Comme $\left(\frac{2}{3}\right)^n > 0$, l'égalité précédente montre que $u_n \geqslant n$ pour tout entier $n \geqslant 0$. Comme la suite (n) tend vers $+\infty$, un théorème de comparaison sur les limites nous permet de conclure que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$

Solution alternative. La suite géométrique (v_n) a une raison $q = \frac{2}{3}$ tel que $|q| < 1$, donc

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = 0.$$

Bien entendu,

$$\lim_{n\to+\infty} n = +\infty.$$

On en déduit la limite de la somme,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$

4. a. Soit n un entier naturel non nul. On a

$$\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n}(v_k + k) = \sum_{k=0}^{n} v_k + \sum_{k=0}^{n} k.$$

Le terme $\sum_{k=0}^{n} v_k$ est la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$ et de premier terme 2, donc

$$\sum_{k=0}^{n} v_k = 2 \times \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}} = 6\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right).$$

Le terme $\sum_{k=0}^{n} k$ est une somme bien connue,

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Finalement, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\mathrm{S}_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + 6\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right).$$

b. Soit n un entier naturel non nul. En divisant la formule précédente par n^2, nous obtenons

$$\mathrm{T}_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + \frac{6}{n^2}\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right).$$

Nous savons que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n} = 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{6}{n^2} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = 0,$$

donc par sommes et produit, nous en déduisons que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{T}_n = \frac{1}{2}.$$

Flux	Effectif
Migration des citadins vers les campagnes	$0{,}05\,v_n$
Migration des ruraux vers les villes	$0{,}01\,c_n$

FIGURE 8 – *Flux migratoires entre les années* $2013+n$ *et* $2013+n+1$.

Exercice 4

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité.

1. Soit n un entier naturel. À l'aide de la table 8, on trouve

$$\begin{cases} v_{n+1} = v_n - 0{,}05\,v_n + 0{,}01\,c_n \\ c_{n+1} = c_n + 0{,}05\,v_n - 0{,}01\,c_n, \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} v_{n+1} = 0{,}95\,v_n + 0{,}01\,c_n \\ c_{n+1} = 0{,}05\,v_n + 0{,}99\,c_n. \end{cases}$$

2. Effectuons le produit de A par X :

$$\mathrm{Y} = \mathrm{AX} = \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0{,}01 \\ 0{,}05 & 0{,}99 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}95a + 0{,}01b \\ 0{,}05a + 0{,}99b \end{pmatrix}.$$

donc

$$\begin{cases} c = 0{,}95a + 0{,}01b, \\ d = 0{,}05a + 0{,}99b. \end{cases}$$

3. a. Calculons PQ,

$$\mathrm{PQ} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -51 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

puis QP,

$$\mathrm{QP} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

On constate que $P\left(\frac{1}{6}Q\right) = I$ et $\left(\frac{1}{6}Q\right)P = I$ où I est la matrice identité de dimension 2. On en déduit que la matrice P est inversible et que

$$P^{-1} = \frac{1}{6}Q.$$

b. Calculons $P^{-1}AP$. Nous avons

$$\begin{aligned}
P^{-1}AP &= \frac{1}{6}QAP \\
&= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0{,}01 \\ 0{,}05 & 0{,}99 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4{,}7 & 0{,}94 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 5{,}64 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Le produit $P^{-1}AP$ est égale à la matrice diagonale

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}94 \end{pmatrix}.$$

c. Montrons par récurrence que $A^n = PD^nP^{-1}$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

L'égalité est vraie pour $n = 1$; en effet, nous savons que $P^{-1}AP = D$, donc $A = PDP^{-1}$.

Supposons l'égalité vraie pour un entier $n \geqslant 1$. Alors

$$A^{n+1} = A \times A^n = PDP^{-1}PD^nP^{-1} = PDD^nP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}.$$

L'égalité est vraie pour l'entier $n+1$.

Nous avons démontré que l'égalité $A^n = PD^nP^{-1}$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 1$.

4. Déterminons les limites des suites (v_n) et (c_n).

Comme $|0{,}94| < 1$, on a

$$\lim_{n \to +\infty} 0{,}94^n = 0,$$

si bien que

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = \frac{1}{6}(v_0 + c_0) = \frac{1}{6} \times 250\,000 \approx 41\,667.$$

Nous concluons qu'à long terme, la population sera composée de $\frac{41\,667}{250\,000} \approx 17\,\%$ de citadins et de $83\,\%$ de ruraux.

Sujet 5

Polynésie

8 juin 2013

Sujet 6

Pondichéry

16 avril 2013