Annales

de mathématiques

du baccalauréat scientifique

Édition 2014

Sujets & corrigés détaillés

Éric Guirbal

Professeur indépendant, Toulouse

Éric Guirbal
Professeur indépendant de mathématiques
Toulouse
eric.guirbal@lecons-de-maths.fr
www.lecons-de-maths.fr

Ce document est en chantier.
Les mises à jour se font en continu et sont disponibles à l'adresse http://www.lecons-de-maths.fr/ressources/cours-et-exercices#annales_bac_s

Version du 18 juin 2014.

Sommaire

Sujet 1

Pondichéry

8 avril 2014

ÉNONCÉ

Exercice 1 (4 points)
Commun à tous les candidats.

Dans cet exercice, sauf indication contraire, les résultats seront arrondis au centième.

1. La durée de vie, exprimée en années, d'un moteur pour automatiser un portail fabriqué par une entreprise A est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ, où λ est un réel strictement positif.
   On sait que $P(X \leqslant 2) = 0{,}15$.
   Déterminer la valeur exacte du réel λ.
   Dans la suite de l'exercice on prendra 0,081 *pour valeur de* λ.
2. a. Déterminer $P(X \geqslant 3)$.
   b. Montrer que pour tous réels positifs t et h,
   $$P_{X \geqslant t}(X \geqslant t+h) = P(X \geqslant h).$$
   c. Le moteur a déjà fonctionné durant 3 ans. Quelle est la probabilité pour qu'il fonctionne encore 2 ans ?
   d. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X et donner une interprétation de ce résultat.
3. *Dans la suite de cet exercice, on donnera des valeurs arrondies des résultats à* 10^{-3}.
   L'entreprise A annonce que le pourcentage de moteurs défectueux dans la production est égal à 1 %. Afin de vérifier cette affirmation 800 moteurs sont prélevés au hasard. On constate que 15 moteurs sont détectés défectueux.

Le résultat de ce test remet-il en question l'annonce de l'entreprise A ? Justifier.

On pourra s'aider d'un intervalle de fluctuation.

Exercice 2 (4 points)

Commun à tous les candidats.

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie. Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. **Proposition 1.** Toute suite positive croissante tend vers $+\infty$.
2. g est la fonction définie sur $\left]-\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$ par $g(x) = 2x\ln(2x+1)$.

   Proposition 2. Sur $\left]-\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$, l'équation $g(x) = 2x$ a une unique solution : $\frac{\mathrm{e}-1}{2}$.

   Proposition 3. Le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de la fonction g au point d'abscisse $\frac{1}{2}$ est $1+\ln 4$.
3. L'espace est muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

   $\mathscr{P}$ et $\mathscr{R}$ sont les plans d'équations respectives

   $$2x+3y-z=11 \quad \text{et} \quad x+y+5z-11=0.$$

   Proposition 4. Les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{R}$ se coupent perpendiculairement.

Exercice 3 (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}; \vec{u}, \vec{v})$.

Pour tout entier naturel n, on note A_n le point d'affixe z_n défini par

$$z_0 = 1 \quad \text{et} \quad z_{n+1} = \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}\right) z_n.$$

On définit la suite (r_n) par $r_n = |z_n|$ pour tout entier naturel n.

1. Donner la forme exponentielle du nombre complexe

   $$\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}.$$

Variables	n entier naturel
	R réel
	P réel strictement positif
Entrée	Demander la valeur de P
Traitement	R prend la valeur 1
	n prend la valeur 0
	Tant que $\text{R} > \text{P}$
	n prend la valeur $n+1$
	R prend la valeur $\frac{\sqrt{3}}{2}\text{R}$
	Fin tant que
Sortie	Afficher n

FIGURE 1

2. a. Montrer que la suite (r_n) est géométrique de raison $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
   b. En déduire l'expression de r_n en fonction de n.
   c. Que dire de la longueur OA_n lorsque n tend vers $+\infty$?
3. On considère l'algorithme de la figure 1.
   a. Quelle est la valeur affichée par l'algorithme pour $\text{P} = 0{,}5$?
   b. Pour $\text{P} = 0{,}01$ on obtient $n = 33$. Quel est le rôle de cet algorithme ?
4. a. Démontrer que le triangle $\text{OA}_n\text{A}_{n+1}$ est rectangle en A_{n+1}.
   b. On admet que $z_n = r_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{6}}$.
   Déterminer les valeurs de n pour lesquelles A_n est un point de l'axe des ordonnées.
   c. Compléter la figure 2 page suivante en représentant les points A_6, A_7, A_8 et A_9. Les traits de construction seront apparents.

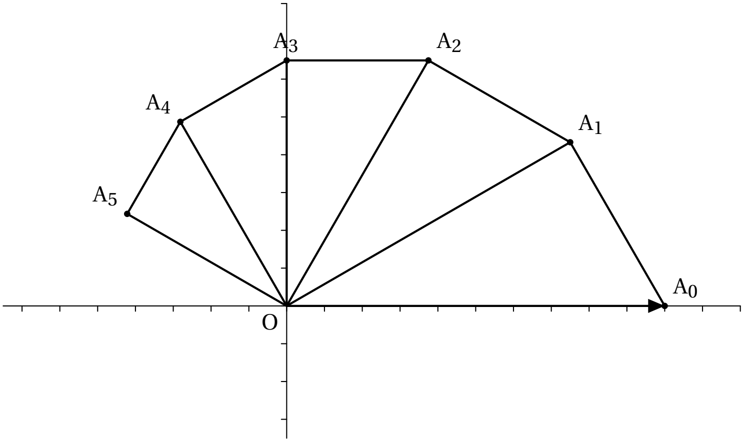


FIGURE 2 – *À compléter et à rendre avec la copie.*

Exercice 3 (5 points)
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité.

Chaque jeune parent utilise chaque mois une seule marque de petits pots pour bébé. Trois marques X,Y et Z se partagent le marché. Soit n un entier naturel.

On note

— X_n l'événement « la marque X est utilisée le mois n » ;

— Y_n l'événement « la marque Y est utilisée le mois n » ;

— Z_n l'événement « la marque Z est utilisée le mois n ».

Les probabilités des événements X_n, Y_n, Z_n sont notées respectivement x_n, y_n, z_n.

La campagne publicitaire de chaque marque fait évoluer la répartition.

Un acheteur de la marque X le mois n, a le mois suivant

— 50 % de chance de rester fidèle à cette marque ;

— 40 % de chance d'acheter la marque Y ;

— 10 % de chance d'acheter la marque Z.

Un acheteur de la marque Y le mois n, a le mois suivant

— 30 % de chance de rester fidèle à cette marque ;

— 50 % de chance d'acheter la marque X ;

— 20 % de chance d'acheter la marque Z.

Un acheteur de la marque Z le mois n, a le mois suivant

— 70 % de chance de rester fidèle à cette marque ;

— 10 % de chance d'acheter la marque X ;

— 20 % de chance d'acheter la marque Y.

1. a. Exprimer x_{n+1} en fonction de x_n, y_n et z_n.
   On admet que

$$y_{n+1} = 0{,}4x_n + 0{,}3y_n + 0{,}2z_n \quad \text{et} \quad z_{n+1} = 0{,}1x_n + 0{,}2y_n + 0{,}7z_n.$$

   b. Exprimer z_n en fonction de x_n et y_n. En déduire l'expression de x_{n+1} et y_{n+1} en fonction de x_n et y_n.

2. On définit la suite (U_n) par $\mathrm{U}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ pour tout entier naturel n.
   On admet que, pour tout entier naturel n,

$$\mathrm{U}_{n+1} = \mathrm{A} \times \mathrm{Y}_n + \mathrm{B} \quad \text{où} \quad \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ 0{,}2 \end{pmatrix}.$$

   Au début de l'étude statistique (mois de janvier 2014 : $n = 0$), on estime que $\mathrm{U}_0 = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}3 \end{pmatrix}$.
   On considère l'algorithme de la figure 3 page suivante.

   a. Donner les résultats affichés par cet algorithme pour $n = 1$ puis pour $n = 3$.

   b. Quelle est la probabilité d'utiliser la marque X au mois d'avril ?

   Dans la suite de l'exercice, on cherche à déterminer une expression de U_n en fonction de n. On note I la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et N la matrice $\mathrm{I} - \mathrm{A}$.

3. On désigne par C une matrice colonne à deux lignes.

   a. Démontrer que $\mathrm{C} = \mathrm{A} \times \mathrm{C} + \mathrm{B}$ équivaut à $\mathrm{N} \times \mathrm{C} = \mathrm{B}$.

Variables	n et i des entiers naturels
	A, B et U des matrices
Entrée et Initialisation	Demander la valeur de n
	i prend la valeur 0
	A prend la valeur $\begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix}$
	B prend la valeur $\begin{pmatrix} 0{,}1 \\ 0{,}2 \end{pmatrix}$
	U prend la valeur $\begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}3 \end{pmatrix}$
Traitement	Tant que $i < n$
	U prend la valeur $\mathrm{A} \times \mathrm{U} + \mathrm{B}$
	i prend la valeur $i + 1$
	Fin tant que
Sortie	Afficher U

FIGURE 3

b. On admet que N est une matrice inversible et que

$$\mathrm{N}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{45}{23} & \frac{20}{23} \\ \frac{10}{23} & \frac{30}{23} \end{pmatrix}.$$

En déduire que $\mathrm{C} = \begin{pmatrix} \frac{17}{46} \\ \frac{7}{23} \end{pmatrix}$.

4. On note V_n la matrice telle que $\mathrm{V}_n = \mathrm{U}_n - \mathrm{C}$ pour tout entier naturel n.

 a. Montrer que, pour tout entier naturel n, $\mathrm{V}_{n+1} = \mathrm{A} \times \mathrm{V}_n$.

 b. On admet que $\mathrm{U}_n = \mathrm{A}^n \times (\mathrm{U}_0 - \mathrm{C}) + \mathrm{C}$. Quelles sont les probabilités d'utiliser les marques X, Y et Z au mois de mai ?

Exercice 4 (7 points)
Commun à tous les candidats.

Partie A

f est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. f' est la fonction dérivée de la fonction f.

Dans le plan muni d'un repère orthogonal, on nomme $\mathscr{C}_1$ la courbe représentative de la fonction f et $\mathscr{C}_2$ la courbe représentative de la fonction f'.

Le point A de coordonnées $(0;2)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}_1$. Le point B de coordonnées $(0;1)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}_2$.

1. Dans les trois situations de la figure 4 page suivante, on a dessiné la courbe représentative $\mathscr{C}_1$ de la fonction f. Sur l'une d'entre elles, la courbe $\mathscr{C}_2$ de la fonction dérivée f' est tracée convenablement. Laquelle ? Expliquer le choix effectué.
2. Déterminer l'équation réduite de la droite Δ tangente à la courbe $\mathscr{C}_1$ en A.
3. On sait que pour tout réel x, $f(x) = \mathrm{e}^{-x} + ax + b$ où a et b sont deux nombres réels.
   a. Déterminer la valeur de b en utilisant les renseignements donnés par l'énoncé.
   b. Prouver que $a = 2$.
4. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
5. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

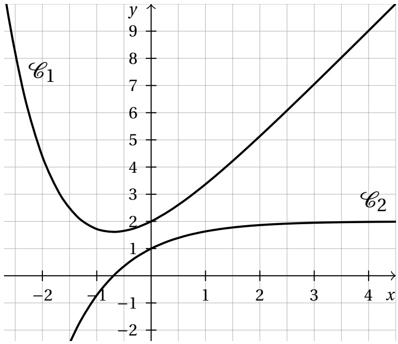
Partie B

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) - (x+2)$.

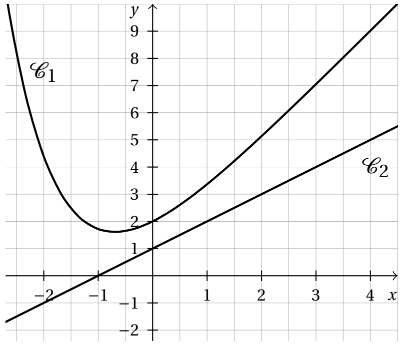
1. a. Montrer que la fonction g admet 0 comme minimum sur $\mathbb{R}$.
   b. En déduire la position de la courbe $\mathscr{C}_1$ par rapport à la droite Δ.

   La figure 5 page 9 représente le logo d'une entreprise. Pour dessiner ce logo, son créateur s'est servi de la courbe $\mathscr{C}_1$ et de la droite Δ, comme l'indique la figure 6 page 9. Afin d'estimer les coûts de peinture, il souhaite déterminer l'aire de la partie colorée en gris.

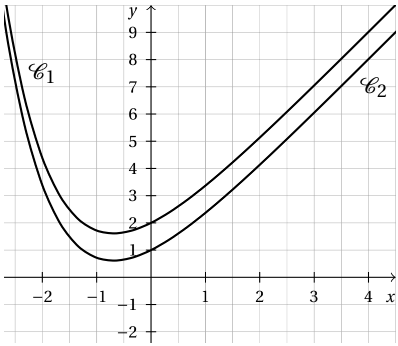
   Le contour du logo est représenté par le trapèze DEFG où



Situation 1



Situation 2 ($\mathscr{C}_2$ est une droite)



Situation 3

FIGURE 4

- D est le point de coordonnées $(-2;0)$;
- E est le point de coordonnées $(2;0)$;
- F est le point d'abscisse 2 de la courbe $\mathscr{C}_1$;
- G est le point d'abscisse -2 de la courbe $\mathscr{C}_1$.

La partie du logo colorée en gris correspond à la surface située entre la droite Δ, la courbe $\mathscr{C}_1$, la droite d'équation $x = -2$ et la droite d'équation $x = 2$.

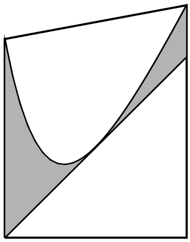


FIGURE 5

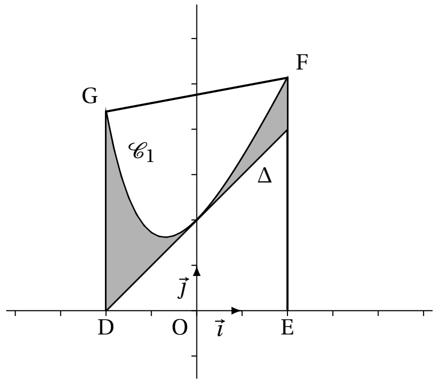


FIGURE 6

2. Calculer, en unités d'aire, l'aire de la partie du logo colorée en gris (on donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie à 10^{-2} du résultat).

CORRIGÉ

Exercice 1

Commun à tous les candidats.

1. Pour tout réel $t > 0$, nous avons

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} \leqslant t) = \int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = [-\mathrm{e}^{-\lambda x}]_0^t = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t},$$

donc

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\mathrm{X} \leqslant 2) = 0{,}15 &\iff 1 - \mathrm{e}^{-2\lambda} = 0{,}15\\ &\iff \mathrm{e}^{-2\lambda} = 0{,}85\\ &\iff \ln\left(\mathrm{e}^{-2\lambda}\right) = \ln 0{,}85\\ &\iff -2\lambda = \ln 0{,}85\\ &\iff \lambda = -\frac{1}{2}\ln 0{,}85.\end{aligned}$$

La variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre

$$\lambda = -\frac{1}{2}\ln 0{,}85 \approx 0{,}08.$$

2. a. Soit un réel $t > 0$. Nous avons

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} \geqslant t) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{X} < t).$$

Puisque X est une loi à densité, $\mathrm{P}(\mathrm{X} < t) = \mathrm{P}(\mathrm{X} \leqslant t)$, donc

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} \geqslant t) = 1 - (1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}) = \mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

En particulier,

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} \geqslant 3) = \mathrm{e}^{-0{,}081 \times 3} \approx 0{,}78.$$

b. Soit deux réels $t \geqslant 0$ et $h \geqslant 0$. Puisque $\mathrm{P}(\mathrm{X} \geqslant t) \neq 0$, la probabilité conditionnelle $\mathrm{P}_{\mathrm{X} \geqslant t}(\mathrm{X} \geqslant t + h)$ existe et est donnée par la formule

$$\mathrm{P}_{\mathrm{X} \geqslant t}(\mathrm{X} \geqslant t + h) = \frac{\mathrm{P}(\{\mathrm{X} \geqslant t + h\} \cap \{\mathrm{X} \geqslant t\})}{\mathrm{P}(\mathrm{X} \geqslant t)}.$$

L'inclusion $\{X \geqslant t+h\} \subset \{X \geqslant t\}$ implique $\{X \geqslant t+h\} \cap \{X \geqslant t\} = \{X \geqslant t+h\}$, si bien que

$$P_{X \geqslant t}(X \geqslant t+h) = \frac{P(X \geqslant t+h)}{P(X \geqslant t)}.$$

Utilisons la formule établie à la question précédente. Nous obtenons

$$P_{X \geqslant t}(X \geqslant t+h) = \frac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}} = \frac{e^{-\lambda t}e^{-\lambda h}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda h},$$

et nous concluons que pour tous réels $t \geqslant 0$ et $h \geqslant 0$,

$$P_{X \geqslant t}(X \geqslant t+h) = P(X \geqslant h).$$

c. La probabilité pour que le moteur fonctionne encore 2 ans (au moins), sachant qu'il a déjà fonctionné 3 ans, est, en utilisant le résultat de la question précédente,

$$P_{X \geqslant 3}(X \geqslant 3+2) = P(X \geqslant 2) = 1 - P(X \leqslant 2) = 1 - 0{,}15 = 0{,}85.$$

d. La variable aléatoire X a une espérance égale à

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0{,}081} \approx 12{,}35.$$

Nous en déduisons que ce modèle de moteur a une durée de vie moyenne de 12,35 ans.

3. Conformément à l'annonce de l'entreprise A, faisons l'hypothèse que la probabilité pour qu'un moteur choisi au hasard soit défectueux est égale à $p = 0{,}01$. Testons-la avec l'échantillon de $n = 800$ moteurs. Comme $n \geqslant 30$, $np = 8 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 792 \geqslant 5$, l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % est

$$\begin{aligned} I &= \left[p - 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\,;p + 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right] \\ &= \left[0{,}01 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}01 \times 0{,}99}{800}}\,;0{,}01 + 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}01 \times 0{,}99}{800}}\right] \end{aligned}$$

soit, en arrondissant à 10^{-3},

$$\mathrm{I} \approx [0{,}003\,;0{,}017].$$

Dans l'échantillon, on a observé une fréquence de moteurs défectueux égale à

$$f = \frac{15}{800} = 0{,}01875.$$

Puisque $f \notin \mathrm{I}$, nous concluons que l'hypothèse est fausse avec un risque d'erreur de 5 %, et donc nous remettons en cause l'annonce de l'entreprise.

Exercice 2

Commun à tous les candidats.

1. La proposition 1 est fausse. Prouvons-le à l'aide d'un contre-exemple. Soit la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ de terme général

$$u_n = 1 - \frac{1}{n}.$$

— *La suite est à valeurs positives.* Pour tout $n \geqslant 1$, $\frac{1}{n} < 1$ donc $u_n \geqslant 0$.

— *La suite est croissante,* en effet, pour tout entier $n \geqslant 1$, nous avons

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} > 0.$$

— *La suite ne converge pas vers* $+\infty$. Comme

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

il vient

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 1.$$

2. La proposition 2 est fausse. En effet, $g(0) = 0$ et $2 \times 0 = 0$, donc 0 est une solution de l'équation $g(x) = 2x$ sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$.

Le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de la fonction g au point d'abscisse $\frac{1}{2}$ est donné par $g'\left(\frac{1}{2}\right)$. La fonction g est dérivable sur $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$, et pour tout $x > -\frac{1}{2}$, nous avons

$$g'(x) = 2\ln(2x+1) + 2x\frac{2}{2x+1} = 2\ln(2x+1) + \frac{4x}{2x+1},$$

donc

$$g'\left(\frac{1}{2}\right) = 2\ln 2 + 1 = \ln 4 + 1.$$

La proposition 3 est vraie.

3. Les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{R}$ ont pour vecteurs normaux respectifs $\vec{u}(2,3,-1)$ et $\vec{v}(1,1,5)$. Le repère étant orthonormé, leur produit scalaire est donné par la formule

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 2\times 1 + 3\times 1 - 1\times 5.$$

Nous trouvons $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$. Cela signifie que les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{R}$ se coupent perpendiculairement. La proposition 4 est vraie.

Exercice 3

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.

1. Le module de $\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}$ étant égal à

$$\left|\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right| = \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{12}{16}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

nous devons avoir

$$\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i} = \frac{\sqrt{3}}{2}(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta),$$

d'où

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{1}{2},$$

donc

$$\theta \equiv \frac{\pi}{6} \pmod{2\pi}.$$

Par conséquent,

$$\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i} = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6}.$$

2. a. De la relation de récurrence

$$z_{n+1} = \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}\right) z_n,$$

nous tirons

$$|z_{n+1}| = \left|\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}\right| |z_n|,$$

c'est-à-dire

$$r_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{2} r_n.$$

Nous reconnaissons dans cette égalité la définition d'une suite géométrique de raison $q = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

b. Le terme général d'une suite géométrique $(r_n)_{n\geqslant 0}$ de raison q est $r_n = r_0 q^n$. Nous connaissons déjà q, et $r_0 = |z_0| = 1$. Donc, pour tout entier $n \geqslant 0$, nous avons

$$r_n = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n.$$

c. Comme $\mathrm{OA}_n = |z_n| = r_n$ et que $(r_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite géométrique dont la raison a une valeur absolue strictement inférieure à 1, il s'ensuit que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{OA}_n = 0.$$

3. a. Pour $\mathrm{P} = 0{,}5$, l'algorithme affiche 5.

b. L'algorithme détermine le plus petit entier $n \geqslant 0$ tel que $r_n \leqslant \mathrm{P}$. Puisque $\mathrm{P} > 0$ et que la suite (r_n) converge vers 0, l'existence d'un tel entier est assurée. L'algorithme s'executera donc en un temps fini.

4. a. Démontrons que le triangle $\mathrm{OA}_{n+1}\mathrm{A}_n$ est rectangle en A_{n+1} à l'aide de la réciproque du théorème de Pythagore. Nous devons vérifier que

$$\mathrm{OA}_{n+1}^2 + \mathrm{A}_{n+1}\mathrm{A}_n^2 = \mathrm{OA}_n^2,$$

que nous récrivons ainsi

$$r_{n+1}^2 + |z_{n+1} - z_n|^2 = r_n^2.$$

Exprimons chacun des termes du 1[er] membre en fonction de r_n. Nous trouvons

$$r_{n+1}^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 r_n^2 = \frac{3}{4} r_n^2,$$

et

$$\begin{aligned}
|z_{n+1} - z_n|^2 &= \left|\left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}\right) z_n - z_n\right|^2 = \left|\left(-\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}\right) z_n\right|^2 \\
&= \left|-\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}\right|^2 |z_n|^2 = \left(\frac{1}{16} + \frac{3}{16}\right)^2 r_n^2 \\
&= \frac{1}{4} r_n^2,
\end{aligned}$$

donc leur somme est égale à

$$\begin{aligned}
r_{n+1}^2 + |z_{n+1} - z_n|^2 &= \frac{1}{4} r_n^2 + \frac{3}{4} r_n^2 \\
&= r_n^2.
\end{aligned}$$

Nous avons bien prouvé que le triangle $\mathrm{OA}_{n+1}\mathrm{A}_n$ est rectangle en A_{n+1}.

Solution alternative. Nous savons que deux vecteurs non nuls sont orthogonaux si et seulement si le quotient de leurs affixes est un nombre imaginaire pur non nul. Les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{OA}_{n+1}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{A}_n}$ ont pour affixes respectives z_{n+1} et $z_n - z_{n+1}$. Nous avons

$$\mathrm{Re}\left(\frac{z_n - z_{n+1}}{z_{n+1}}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{z_n}{z_{n+1}} - 1\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{z_n}{z_{n+1}}\right) - 1.$$

D'après la question 1, $z_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6} z_n$ donc

$$\mathrm{Re}\left(\frac{z_n - z_{n+1}}{z_{n+1}}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6}\right) - 1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = 0,$$

ce qui prouve que le triangle $\mathrm{OA}_{n+1}\mathrm{A}_n$ est rectangle en A_{n+1}.

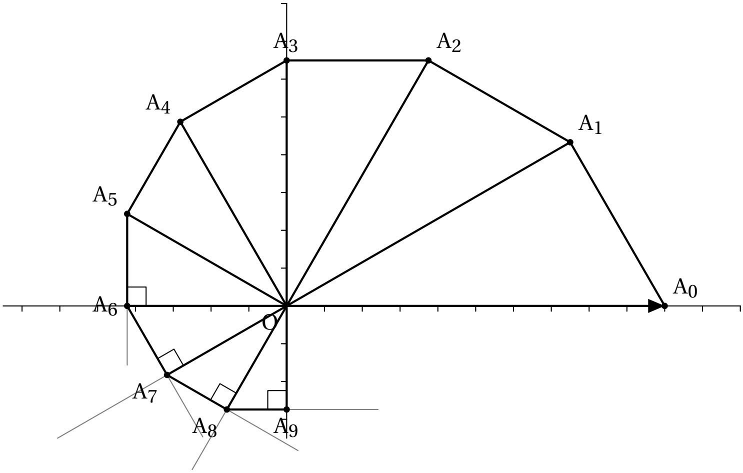


FIGURE 7

b. On a l'équivalence

$$\mathrm{A}_n \in (\mathrm{O}y) \iff \arg z_n \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi} \quad \text{ou} \quad z_n = 0.$$

Or la suite la suite (z_n) ne s'annule pas (question 2b), et la forme exponentielle $z_n = r_n \mathrm{e}^{in\pi/6}$ donne $\arg z_n \equiv \frac{n\pi}{6} \pmod{2\pi}$, donc

$$\begin{aligned} \mathrm{A}_n \in (\mathrm{O}y) &\iff \frac{n\pi}{6} \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi} \\ &\iff (n-3)\frac{\pi}{6} \equiv 0 \pmod{\pi} \\ &\iff n-3 \equiv 0 \pmod{6}. \end{aligned}$$

Ainsi le point A_n appartient à l'axe des ordonnées si et seulement si n est un entier de la forme $3+6k$ ($k \in \mathbb{Z}$).

c. Voir la figure 7.

Commentaire. Le point A_{n+1} peut être obtenu de deux façons : soit comme projeté orthogonal du point A_n sur la droite (OA_{n-5}), soit comme intersection du cercle de diamètre $[\mathrm{OA}_n]$ avec la droite (OA_{n-5}).

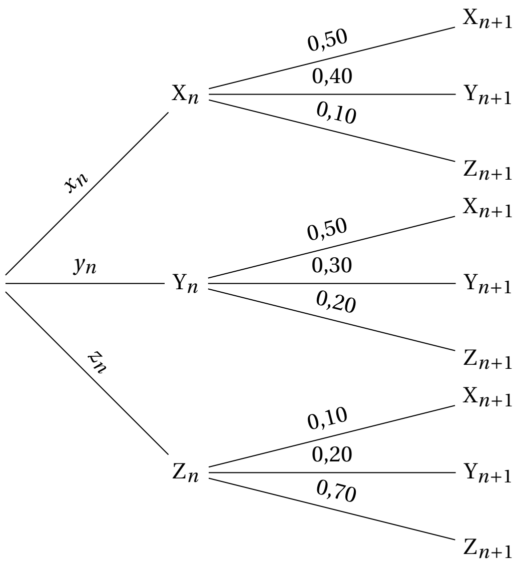


FIGURE 8

Exercice 3

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité.

1. a. L'arbre de probabilité de la figure 8 décrit la situation. Soit $n \in \mathbb{N}$. La formule des probabilités totales appliquée au calcul de $P(X_{n+1})$ s'écrit

$$P(X_{n+1}) = P_{X_n}(X_{n+1})P(X_n) + P_{Y_n}(X_{n+1})P(Y_n) + P_{Z_n}(X_{n+1})P(Z_n),$$

c'est-à-dire

$$x_{n+1} = 0{,}5x_n + 0{,}5y_n + 0{,}1z_n.$$

b. Puisque les événements X_n, Y_n et Z_n forment une partition de l'univers, nous pouvons écrire

$$P(X_n) + P(Y_n) + P(Z_n) = 1,$$

d'où nous déduisons

$$z_n = 1 - x_n - y_n,$$

puis

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 0{,}5x_n + 0{,}5y_n + 0{,}1(1 - x_n - y_n) \\ &= 0{,}4x_n + 0{,}4y_n + 0{,}1 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= 0{,}4x_n + 0{,}3y_n + 0{,}2(1 - x_n - y_n) \\ &= 0{,}2x_n + 0{,}1y_n + 0{,}2. \end{aligned}$$

2. a. Pour une valeur de n donnée, l'algorithme affiche U_n. Nous devons donc déterminer U_1 et U_3. En utilisant la formule de récurrence, nous obtenons

$$U_1 = A \times U_0 + B = \begin{pmatrix} 0{,}42 \\ 0{,}33 \end{pmatrix},$$
$$U_2 = A \times U_1 + B = \begin{pmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}317 \end{pmatrix},$$

et

$$U_3 = A \times U_2 + B = \begin{pmatrix} 0{,}3868 \\ 0{,}3117 \end{pmatrix}.$$

b. Le mois d'avril est le quatrième mois de l'année, donc la probabilité d'utiliser la marque X ce mois-là est donnée par le quatrième terme de la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$, c'est-à-dire x_3. En utilisant U_3 calculée à la question précédente, nous obtenons $x_3 = 0{,}3868$.

3. a. Nous avons les équivalences

$$\begin{aligned} C = A \times C + B &\iff I \times C - A \times C = B \\ &\iff (I - A) \times C = B \\ &\iff N \times C = B. \end{aligned}$$

b. D'après le résultat de la question précédente, nous avons

$$C = N^{-1} \times B = \begin{pmatrix} \frac{45}{23} & \frac{20}{23} \\ \frac{10}{23} & \frac{30}{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ 0{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{45}{23} \times 0{,}1 + \frac{20}{23} \times 0{,}2 \\ \frac{10}{23} \times 0{,}1 + \frac{30}{23} \times 0{,}2 \end{pmatrix},$$

soit

$$C = \begin{pmatrix} \frac{17}{46} \\ \frac{7}{23} \end{pmatrix}.$$

4. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soustrayons membre à membre les égalités

$$U_{n+1} = A \times U_n + B$$

et

$$C = A \times C + B.$$

Nous obtenons ainsi

$$U_{n+1} - C = A \times (U_n - C),$$

c'est-à-dire

$$V_{n+1} = A \times V_n.$$

b. Le mois de mai est le cinquième mois de l'année, donc les probabilités d'utiliser les différentes marques en mai sont les coefficients du vecteur U_4, qui selon la formule admise est donnée par

$$U_4 = A^4 \times (U_0 - C) + C,$$

où

$$U_0 - C = \begin{pmatrix} \frac{3}{23} \\ -\frac{1}{230} \end{pmatrix},$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0{,}24 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}09 \end{pmatrix},$$

$$A^4 = (A^2)^2 = \begin{pmatrix} 0{,}0776 & 0{,}066 \\ 0{,}033 & 0{,}0281 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{97}{1250} & \frac{33}{500} \\ \frac{33}{1000} & \frac{281}{10000} \end{pmatrix},$$

ce qui nous donne

$$U_4 = \begin{pmatrix} 0{,}3794 \\ 0{,}30853 \end{pmatrix}.$$

Nous concluons que les probabilités d'utiliser les marques X, Y et Z en mai sont

$$x_4 = 0{,}3794, \quad y_4 = 0{,}30853 \quad \text{et} \quad z_4 = 1 - x_4 - y_4 = 0{,}31207.$$

Commentaire. Il était beaucoup plus rapide de faire semblant de ne pas avoir vu la formule admise et de calculer U_4 à partir de U_3 trouvée à la question 2a.

Exercice 4

Commun à tous les candidats.

Partie A

1. Soit $[\alpha\,;\beta]$ l'intervalle sur lequel est dessinée la courbe représentative de la fonction f. Nous constatons que la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $[\alpha\,;\gamma]$ où $-0{,}8 \leqslant \gamma \leqslant -0{,}6$, et strictement croissante sur l'intervalle $[\gamma\,;\beta]$. Par conséquent la courbe $\mathscr{C}_2$ doit être situé sous l'axe des abscisses sur l'intervalle $[\alpha\,;\gamma]$ et au-dessus de l'axe des abscisses sur l'intervalle $[\gamma\,;\beta]$. Nous en déduisons, par élimination, que la situation 1 est la seule qui propose une représentation convenable de la courbe $\mathscr{C}_2$.

   Solution alternative. Sur l'intervalle $[2\,;4]$ la courbe $\mathscr{C}_1$ peut être approchée par une droite de coefficient directeur 2. Nous en déduisons que sur cet intervalle la dérivée doit être presque constante et proche de 2. Nous concluons que la situation 1 est la seule qui convienne.

2. La courbe $\mathscr{C}_1$ passe par le point A, donc $f(0) = 2$. La courbe $\mathscr{C}_2$ passe par le point B, donc $f'(0) = 1$. Nous en déduisons que l'équation réduite de la droite Δ est $y = x + 2$..
3. a. Nous trouvons $f(0) = 1 + b$. D'après l'énoncé, $f(0) = 2$, d'où $b = 1$.

   b. Dérivons la fonction f. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = -\mathrm{e}^{-x} + a$, ce qui nous donne $f'(0) = -1 + a$. Or, nous savons que $f'(0) = 1$, d'où $a = 2$.
4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$f'(x) = -\mathrm{e}^{-x} + 2.$$
   La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$f''(x) = \mathrm{e}^{-x}.$$

x	$-\infty$		$-\ln 2$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$3-2\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

FIGURE 9 – *Tableau de variation de la fonction* $f(x) = \mathrm{e}^{-x} + 2x + 1$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-x} > 0$, donc la fonction f' est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Résolvons l'équation $f'(x) = 0$. Nous avons les équivalences

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\iff -\mathrm{e}^{-x} + 2 = 0 \\ &\iff \mathrm{e}^{-x} = 2 \\ &\iff \ln(\mathrm{e}^{-x}) = \ln 2 \\ &\iff -x = \ln 2 \\ &\iff x = -\ln 2. \end{aligned}$$

Nous en déduisons le tableau de variation (figure 9) de la fonction f. Le minimum de la fonction f est $f(-\ln 2) = \mathrm{e}^{\ln 2} - 2\ln 2 + 1 = 3 - 2\ln 2$.

5. Déterminons la limite de f en $+\infty$. Nous avons

$$\lim_{x \to +\infty} -x = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{x} = 0,$$

donc par composition,

$$\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0.$$

Aussi,

$$\lim_{x \to +\infty} 2x + 1 = +\infty,$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

FIGURE 10 – *Tableau de variation de la fonction* $g(x) = \mathrm{e}^{-x} + x - 1$.

donc

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

PARTIE B

1. a. La fonction g est dérivable, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons

$$g'(x) = f'(x) - 1 = -\mathrm{e}^{-x} + 1.$$

Puisque la fonction f' est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (question 4), nous en déduisons que la fonction g' est également strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Enfin, l'équation $g'(x) = 0$ admet 0 pour solution évidente. Résumons cela dans un tableau de variation (figure 10).

La fonction g admet en 0 un minimum égal à $g(0) = 0$.

b. Nous venons de montrer que

$$f(x) - (x+2) \begin{cases} > 0 & \text{si } x \neq 0 \\ = 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

donc la courbe $\mathscr{C}_1$ est située strictement au-dessus de la droite Δ, sauf au point d'abscisse 0 où elles se coupent.

2. L'aire $\mathscr{A}$ de la partie colorée du logo est donnée par l'intégrale

$$\int_{-2}^{2} f(x) - (x+2)\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{2} g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Une primitive de la fonction g sur $\mathbb{R}$ est la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\mathrm{G}(x) = -\mathrm{e}^{-x} + \frac{x^2}{2} - x,$$

donc

$$\mathscr{A} = \mathrm{G}(2) - \mathrm{G}(-2) = -\mathrm{e}^{-2} + \mathrm{e}^{2} - 4$$

La partie colorée du logo a une aire égale à environ 3,25 unités d'aire.

Sujet 2

Liban

27 mai 2014

ÉNONCÉ

Exercice 1 (5 points)
Commun à tous les candidats.

Les trois parties A, B *et* C *peuvent être traités de façon indépendante. Les probabilités seront arrondies au dix millième.*

Un élève doit se rendre à son lycée chaque matin pour 8 h 00. Pour cela, il utilise, selon les jours, deux moyens de transport : le vélo ou le bus.

PARTIE A

L'élève part tous les jours à 7 h 40 de son domicile et doit arriver à 8 h 00 à son lycée. Il prend le vélo 7 jours sur 10 et le bus le reste du temps.

Les jours où il prend le vélo, il arrive à l'heure dans 99,4 % des cas et lorsqu'il prend le bus, il arrive en retard dans 5 % des cas.

On choisir une date au hasard en période scolaire et on note V l'événement « l'élève se rend au lycée à vélo », B l'événement « l'élève se rend au lycée en bus » et R l'événement « l'élève arrive en retard au lycée ».

1. Traduire la situation par un arbre de probabilités.
2. Déterminer la probabilité de l'événement $V \cap R$.
3. Démontrer que la probabilité de l'événement R est 0,0192.
4. Un jour donné, l'élève est arrivé en retard au lycée. Quelle est la probabilité qu'il s'y soit rendu en bus ?

Partie B. Le vélo

On suppose dans cette partie que l'élève utilise le vélo pour se rendre à son lycée.

Lorsqu'il utilise le vélo, on modélise son temps de parcours exprimé en minutes, entre son domicile et son lycée par une variable aléatoire T qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 17$ et d'écart-type $\sigma = 1{,}2$.

1. Déterminer la probabilité que l'élève mette entre 15 et 20 minutes pour se rendre à son lycée.
2. Il part de son domicile à vélo à 7 h 40. Quelle est la probabilité qu'il soit en retard au lycée ?
3. L'élève part à vélo. Avant quelle heure doit-il partir pour arriver à l'heure au lycée avec une probabilité de 0,9 ? Arrondir le résultat à la minute près.

Partie C. Le bus

Lorsque l'élève utilise le bus, on modélise son temps de parcours, exprimé en minutes, entre son domicile et son lycée par une variable aléatoire T' qui suit la loi normale d'espérance $\mu' = 15$ et d'écart-type σ'.

On sait que la probabilité qu'il mette plus de 20 minutes pour se rendre à son lycée en bus est de 0,05.

On note Z' la variable aléatoire égales à $(\mathrm{T}' - 15)/\sigma'$.

1. Quelle loi la variable aléatoire Z' suit-elle ?
2. Déterminer une valeur approchée à 0,01 près de l'écart-type σ' de la variable aléatoire T'.

Exercice 2 (5 points)

Commun à tous les candidats.

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier chaque réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé. On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation

$$x - y + 3z + 1 = 0,$$

et la droite $\mathscr{D}$ dont une équation paramétrique est

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = -5 + 3t. \end{cases}$$

On donne les points A(1;1;0), B(3;0;−1) et C(7;1;−2).

1. **Proposition.** Une représentation paramétrique de la droite (AB) est

$$\begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = -1 + t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = -2 + t. \end{cases}$$

2. **Proposition.** Les droites $\mathscr{D}$ et (AB) sont orthogonales.
3. **Proposition.** Les droites $\mathscr{D}$ et (AB) sont coplanaires.
4. **Proposition.** La droite $\mathscr{D}$ coupe le plan $\mathscr{P}$ au point E de coordonnées (8;−3;−4).
5. **Proposition.** Les plans $\mathscr{P}$ et (ABC) sont parallèles.

Exercice 3 (5 points)
Commun à tous les candidats.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

Partie A

1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0;+\infty[$.
Pour tout réel x de l'intervalle $[0;+\infty[$, calculer $f'(x)$. En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0;+\infty[$.
2. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. Quelle interprétation graphique peut-on faire de ce résultat ?

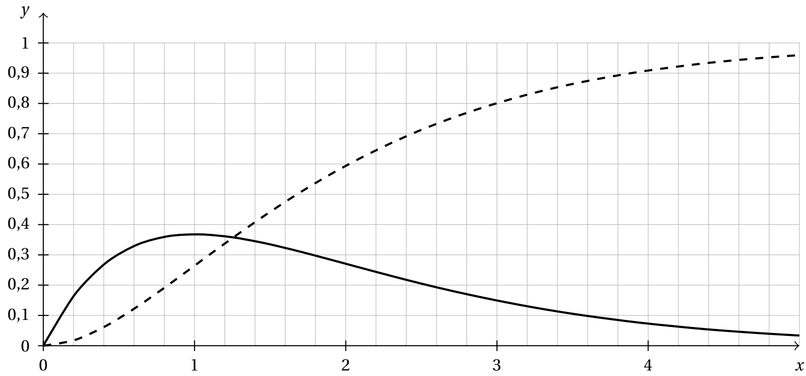


FIGURE 1 – *Représentations graphiques des fonctions f et $\mathscr{A}$*

PARTIE B

Soit $\mathscr{A}$ la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ de la façon suivante : pour tout réel t de l'intervalle $[0\,;+\infty[$, $\mathscr{A}(t)$ est l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = t$.

1. Déterminer le sens de variation de la fonction $\mathscr{A}$.
2. On admet que l'aire du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}$ et l'axe des abscisses est égale à 1 unité d'aire. Que peut-on en déduire pour la fonction $\mathscr{A}$?
3. On cherche à prouver l'existence d'un nombre réel α tel que la droite d'équation $x = \alpha$ partage le domaine compris entre l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}$, en deux parties de même aire, et à trouver une valeur approchée de ce réel.

   a. Démontrer que l'équation $\mathscr{A}(t) = \frac{1}{2}$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

   b. Sur la figure 1 sont tracées la courbe $\mathscr{C}$, ainsi que la courbe Γ représentant la fonction $\mathscr{A}$.
   Sur le graphique, identifier les courbes $\mathscr{C}$ et Γ, puis tracer la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$. En déduire une valeur approchée du réel α. Hachurer le domaine correspondant à $\mathscr{A}(\alpha)$.

4. On définit la fonction g sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par

$$g(x) = (x+1)\mathrm{e}^{-x}.$$

   a. On note g' la fonction dérivée de la fonction g sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
   Pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;+\infty[$, calculer $g'(x)$.
   b. En déduire, pour tout réel t de l'intervalle $[0\,;+\infty[$, une expression de $\mathscr{A}(t)$.
   c. Calculer une valeur approchée à 10^{-2} près de $\mathscr{A}(6)$.

Exercice 4 (5 points)
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.

On considère la suite de nombres complexes (z_n) définie par $z_0 = \sqrt{3} - \mathrm{i}$ et pour tout entier naturel n,

$$z_{n+1} = (1+\mathrm{i})z_n.$$

Les parties A *et* B *peuvent être traitées de façon indépendante.*

Partie A

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = |z_n|$.

1. Calculer u_0.
2. Démontrer que (u_n) est la suite géométrique de raison $\sqrt{2}$ et de premier terme 2.
3. Pour tout entier naturel n, exprimer u_n en fonction de n.
4. Déterminer la limite de la suite (u_n).
5. Étant donné un réel positif p, on souhaite déterminer, à l'aide d'un algorithme, la plus petite valeur de l'entier naturel n telle que $u_n > p$.
   Recopier l'algorithme de la figure 2 page suivante et le compléter par les instructions de traitement et de sortie, de façon à afficher la valeur cherchée de l'entier n.

Partie B

1. Déterminer la forme algébrique de z_1.
2. Déterminer la forme exponentielle de z_0 et de $1+\mathrm{i}$. En déduire la forme exponentielle de z_1.
3. Déduire des questions précédentes la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Variables	u est un réel
	p est un réel
	n est un entier
Initialisation	Affecter à n la valeur 0
	Affecter à u la valeur 2
Entrée	Demander la valeur de p
Traitement	
Sortie	

FIGURE 2

Exercice 4 (5 points)
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité.

Un laboratoire étudie la propagation d'une maladie sur une population. Un *individu sain* est un individu n'ayant jamais été touché par la maladie. Un *individu malade* est un individu qui a été touché par la maladie et non guéri. Un *individu guéri* est un individu qui a été touché par la maladie et qui a guéri. Une fois guéri, un individu est immunisé et ne peut plus tomber malade. Les première observations nous montrent que, d'un jour au suivant :

— 5 % des individus tombent malades ;

— 20 % des individus guérissent.

Pour tout entier naturel n, on pose a_n la proportion d'individus sains n jours après le début de l'expérience, b_n la proportion d'individus malades n jours après le début de l'expérience, et c_n celle d'individus guéris n jours après le début de l'expérience. On suppose qu'au début de l'expérience, tous les individus sont sains, c'est-à-dire que $a_0 = 1$, $b_0 = 0$ et $c_0 = 0$.

1. Calculer a_1, b_1 et c_1.
2. a. Quelle est la proportion d'individus sains qui restent sains d'un jour au jour suivant ? En déduire a_{n+1} en fonction de a_n.

   b. Exprimer b_{n+1} en fonction de a_n et de b_n.

On admet que $c_{n+1} = 0{,}2b_n + c_n$. Pour tout entier naturel n, on définit

$$\mathrm{U}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}.$$

On définit les matrices

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0 & 0 \\ 0{,}05 & 0{,}8 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{D} = \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On admet qu'il existe une matrice inversible P telle que $\mathrm{D} = \mathrm{P}^{-1} \times \mathrm{A} \times \mathrm{P}$ et que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $\mathrm{A}^n = \mathrm{P} \times \mathrm{D}^n \times \mathrm{P}^{-1}$.

3. a. Vérifier que, pour tout entier naturel n,

$$\mathrm{U}_{n+1} = \mathrm{A} \times \mathrm{U}_n.$$

On admet que, pour tout entier naturel n,

$$\mathrm{U}_n = \mathrm{A}^n \times \mathrm{U}_0.$$

b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n,

$$\mathrm{D}^n = \begin{pmatrix} 0{,}95^n & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On admet que

$$\mathrm{A}^n = \begin{pmatrix} 0{,}95^n & 0 & 0 \\ \frac{1}{3}\left(0{,}95^n - 0{,}8^n\right) & 0{,}8^n & 0 \\ \frac{1}{3}\left(3 - 4 \times 0{,}95^n + 0{,}8^n\right) & 1 - 0{,}8^n & 1 \end{pmatrix}$$

4. a. Vérifier que pour tout entier naturel n,

$$b_n = \frac{1}{3}\left(0{,}95^n - 0{,}8^n\right).$$

Variables	b, b', x, y sont des réels
	k est un entier naturel
Initialisation	Affecter à b la valeur 0
	Affecter à b' la valeur 0,05
	Affecter à k la valeur 0
	Affecter à x la valeur 0,95
	Affecter à y la valeur 0,8
Traitement	Tant que $b < b'$ faire
	Affecter à k la valeur $k+1$
	Affecter à b la valeur b'
	Affecter à x la valeur $0{,}95x$
	Affecter à y la valeur $0{,}80y$
	Affecter à b' la valeur ....
	Fin Tant que
Sortie	Afficher ....

FIGURE 3 – *Algorithme à compléter*

b. Déterminer la limite de la suite (b_n).

c. On admet que la proportion d'individus malades croît pendant plusieurs jours, puis décroit. On souhaite déterminer le pic épidémique, c'est-à-dire le moment où la proportion d'individus malades est à son maximum. À cet effet, on utilise un algorithme (figure 3), dans lequel on compare les termes successifs de la suite (b_n). Compléter l'algorithme de façon qu'il affiche le rang du jour où le pic épidémique est atteint et compléter la table 1 page suivante.

	k	b	x	y	b'	Test : $b < b'$?
Après le 7^{e} passage dans la boucle Tant que	7	0,1628	0,6634	0,1678	0,1652	Vrai
Après le 8^{e} passage éventuel dans la boucle Tant que						
Après le 9^{e} passage éventuel dans la boucle Tant que						

TABLE 1 – *Tableau à compléter*

CORRIGÉ

Exercice 1

Commun à tous les candidats.

Partie A

1. L'arbre de probabilité de la figure 4 représente la situation.

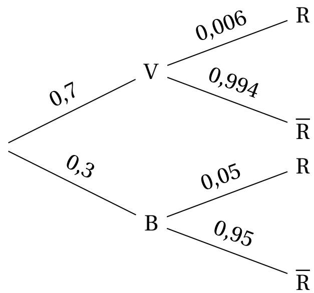


FIGURE 4

2. En utilisant l'arbre de probabilité, nous trouvons

$$P(V \cap R) = P(V)P_V(R) = 0{,}7 \times 0{,}006 = 0{,}0042.$$

3. Dans l'arbre de probabilité nous lisons

$$P(R) = P(V)P_V(R) + P(B)P_B(R) = 0{,}7 \times 0{,}006 + 0{,}3 \times 0{,}05 = 0{,}0192.$$

4. Sachant que l'élève est en retard, la probabilité qu'il se soit rendu au lycée en bus est

$$P_R(B) = \frac{P(R \cap B)}{P(R)} = \frac{P(B)P_B(R)}{P(R)} = \frac{0{,}3 \times 0{,}05}{0{,}0192},$$

dont un arrondi à 10^{-4} près est

$$P_R(B) \approx 0{,}7813.$$

PARTIE B. LE VÉLO

1. La probabilité pour qu'un élève mette entre 15 et 20 minutes pour se rendre à vélo à son lycée est égale à

$$P(15 \leqslant T \leqslant 20) = P(T \leqslant 20) - P(T \leqslant 15) \approx 0{,}9460.$$

2. Si l'élève quitte son domicile en vélo à 7 h 40, la probabilité pour qu'il arrive en retard est égale à la probabilité pour que le trajet dure plus de 20 minutes, c'est-à-dire

$$P(T > 20) = 1 - P(T \leqslant 20) \approx 0{,}0062.$$

3. Afin de déterminer l'heure à laquelle l'élève doit quitter son domicile pour arriver à l'heure avec une probabilité de 0,9, il suffit de déterminer la durée t du trajet. Cette durée vérifie l'inégalité

$$P(T \leqslant t) = 0{,}9.$$

À l'aide d'une calculatrice on trouve $t \approx 18{,}54$ minutes. Nous concluons que l'élève doit partir entre 7 h 41 et 7 h 42.

PARTIE C. LE BUS

1. La variable aléatoire Z' suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.
2. Déterminons σ' tel que

$$P(T' \geqslant 20) = 0{,}05.$$

Étant donné que l'inégalité $T' \geqslant 20$ est équivalente à l'inégalité $Z' \geqslant \frac{20-15}{\sigma'}$, on a

$$P\left(Z' \geqslant \frac{5}{\sigma'}\right) = 0{,}05.$$

En prenant l'événement complémentaire, nous obtenons

$$P\left(Z' \leqslant \frac{5}{\sigma'}\right) = 0{,}95.$$

Une calculatrice fournit

$$\frac{5}{\sigma'} \approx 1{,}64485362695\ldots$$

Nous en déduisons une valeur approchée à 0,01 près de l'écart-type :

$$\sigma' \approx 3{,}04.$$

Exercice 2

Commun à tous les candidats.

1. **La proposition est vraie.** En donnant à t la valeur 0 (resp. la valeur 1), nous obtenons les coordonnées du point A (resp. B), donc la représentation paramétrique proposée est bien une représentation paramétrique de la droite (AB).

2. **La proposition est vraie.** Les vecteurs $\vec{u}(2,1,3)$ et $\vec{v}(-2;1;1)$ sont des vecteurs directeurs des droites $\mathscr{D}$ et (AB) respectivement. Le repère étant orthonormé, leur produit scalaire est donné par

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 2\times 2 + 1\times(-1) + 3\times(-1)$$

soit

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0.$$

Nous en déduisons que les droites $\mathscr{D}$ et (AB) sont orthogonales.

3. **La proposition est fausse.** Puisque les droites $\mathscr{D}$ et (AB) sont orthogonales celles-ci sont coplanaires si et seulement si elles sont sécantes. Supposons qu'elles soient sécantes. Alors les paramètres t et t', relativement aux équations paramétriques de $\mathscr{D}$ et (AB), de leur point d'intersection vérifient le système d'équations suivant :

$$2t = 5 - 2t' \quad (1)$$
$$1 + t = -1 + t' \quad (2)$$
$$-5 + 3t = -2 + t'. \quad (3)$$

En faisant (2)−(3), nous obtenons l'équation $6-2t=1$, d'où $t=\frac{5}{2}$. Ensuite l'équation (2) donne $t' = 2+t = 2+\frac{5}{2} = \frac{9}{2}$. Avec ces valeurs de t et t', on a $2t = 5$ et $5-2t' = -4$, donc l'équation (1) n'est pas satisfaite. Le système n'a pas de solution. Nous en déduisons que les droites $\mathscr{D}$ et (AB) ne sont pas coplanaires.

4. **La proposition est fausse.** Si le point E appartient à la droite $\mathscr{D}$, alors il existe un réel t tel que

$$\begin{cases} 2t = 8 \\ 1+t = -3 \\ -5+3t = -4. \end{cases}$$

La première équation donne $t=4$, or 4 ne vérifie pas les deux autres équations. Par conséquent le point E n'appartient pas à la droite $\mathscr{D}$. Donc la droite $\mathscr{D}$ ne coupe pas le plan $\mathscr{P}$ au point E.

5. **La proposition est vraie.** Nous avons $\overrightarrow{AB}(2;-1;-1)$, $\overrightarrow{AC}(6;0;-2)$ et $\vec{n}(1;-1;3)$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$ tel que

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB} = 1\times 2 + (-1)\times(-1) + 3\times(-1) = 0$$

et

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC} = 1\times 6 + (-1)\times 0 + 3\times(-2) = 0,$$

donc le vecteur $\vec{n}$ est normal à chacun des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. De plus, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires (par exemple $2\times 0 \neq (-1)\times 6$). Il s'ensuit que le plan $\mathscr{P}$ est parallèle au plan (ABC).

Exercice 3

Commun à tous les candidats.

Partie A

1. Pour tout réel $x \geqslant 0$, on a

$$f'(x) = \mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x} = (1-x)\mathrm{e}^{-x}.$$

La fonction exponentielle est à valeurs positives, donc $f'(x)$ est du même signe que $1-x$. Nous en déduisons le tableau de variation (figure 5 page suivante).

2. Pour tout réel $x > 0$, on a $f(x) = (\mathrm{e}^x/x)^{-1}$. D'après le théorème des croissances comparées, $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x/x = +\infty$, donc

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

Nous en déduisons que l'axe des abscisses est une asymptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{\mathrm{e}}$	$\searrow$	0

FIGURE 5 – *Tableau de variation de la fonction* $f(x) = x\mathrm{e}^{-x}$.

PARTIE B

1. La fonction f est continue et positive sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$, donc pour tout réel $t \geqslant 0$, l'aire $\mathscr{A}(t)$ du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = t$ est égal à

$$\mathscr{A}(t) = \int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Soit t_0 et t_1 deux réels tels que $0 \leqslant t_0 < t_1$. Comme la fonction f est strictement positive sur $]0\,;+\infty[$, on a

$$\mathscr{A}(t_1) - \mathscr{A}(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} f(x)\,\mathrm{d}x > 0,$$

ce qui montre que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Solution alternative. La fonction $\mathscr{A}$ définie pour tout réel $t \geqslant 0$ par

$$\mathscr{A}(t) = \int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x$$

est la primitive de la fonction f qui s'annulle en 0, donc

$$\mathscr{A}'(t) = f(t)$$

pour tout réel $t \geqslant 0$. Étant donné que $f > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$, on conclut que la fonction $\mathscr{A}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

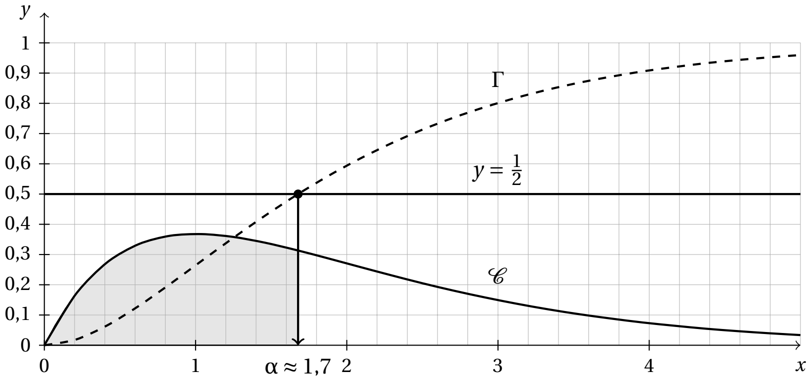


FIGURE 6 – *Résolution graphique de l'équation* $\mathscr{A}(t) = \frac{1}{2}$.

2. L'aire du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}$ et l'axe des abscisses est égale à $\lim_{t\to+\infty} \mathscr{A}(t)$. Selon l'énoncé, l'aire de ce domaine est de 1 unité d'aire, par conséquent

$$\lim_{t\to+\infty} \mathscr{A}(t) = 1.$$

3. a. La fonction $\mathscr{A}$ est continue sur l'intervalle $[0;+\infty[$, $\mathscr{A}(0) = 0 \leqslant \frac{1}{2}$ et $\lim_{t\to+\infty} \mathscr{A}(t) = 1 \geqslant \frac{1}{2}$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $\mathscr{A}(t) = \frac{1}{2}$ possède au moins une solution sur l'intervalle $[0;+\infty[$. Comme la fonction $\mathscr{A}$ est strictement monotone, l'équation possède au plus une solution. En conclusion, l'équation $\mathscr{A}(t) = \frac{1}{2}$ possède exactement une solution α sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

   b. La solution α de l'équation $\mathscr{A}(t) = \frac{1}{2}$ est l'abscisse du point d'intersection de la courbe Γ avec la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$. Une lecture graphique (figure 6) donne $\alpha \approx 1{,}7$.

4. a. Pour tout réel $x \geqslant 0$, on a

$$g'(x) = \mathrm{e}^{-x} - (x+1)\mathrm{e}^{-x} = -x\mathrm{e}^{-x}.$$

   b. Remarquons que $g' = -f$, il s'ensuit que la fonction $-g$ est une primitive de la fonction f. Par conséquent, pour tout réel $t \geqslant 0$, on a

$$\mathscr{A}(t) = [-g(x)]_0^t = -g(t) + g(0),$$

c'est-à-dire

$$\mathscr{A}(t) = 1 - (t+1)\mathrm{e}^{-t}.$$

c. À l'aide du résultat de la question précédente, nous trouvons

$$\mathscr{A}(6) = 1 - 7\mathrm{e}^{-6} \approx 0{,}98.$$

Exercice 4

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.

Partie A

1. Le module de $z_0 = \sqrt{3} - \mathrm{i}$ est $\sqrt{3+1} = 2$ donc

$$u_0 = 2.$$

2. La suite (z_n) vérifie la relation de récurrence

$$z_{n+1} = (1+\mathrm{i})z_n.$$

Prenons le module de chacun des membres de l'égalité, et utilisons la propriété $|zw| = |z|\,|w|$. Nous obtenons ainsi

$$|z_{n+1}| = |(1+\mathrm{i})z_n| = |1+\mathrm{i}|\,|z_n|.$$

Le module de $1+\mathrm{i}$ est $\sqrt{2}$, donc

$$u_{n+1} = \sqrt{2}u_n.$$

La suite (u_n) est une suite géométrique de raison $q = \sqrt{2}$ et de premier terme $u_0 = 2$.

3. Pour tout entier $n \geqslant 0$, on a $u_n = u_0 q^n = 2(\sqrt{2})^n$, ou encore

$$u_n = 2^{1+n/2}.$$

4. La suite (u_n) est une suite géométrique de raison strictement plus grande que 1 et de premier terme strictement positif, donc elle tend vers $+\infty$.
5. Voir la figure 7 page suivante pour l'algorithme complété.

Variables	u est un réel
	p est un réel
	n est un entier
Initialisation	Affecter à n la valeur 0
	Affecter à u la valeur 2
Entrée	Demander la valeur de p
Traitement	Tant que $u \leqslant p$
	Affecter à n la valeur de $n+1$
	Affecter à u la valeur de $\sqrt{2}u$
	Fin tant que
Sortie	Afficher n

FIGURE 7 – *Algorithme pour le calcul du plus petit entier n tel que $u_n > p$.*

PARTIE B

1. La formule de récurrence donne

$$z_1 = (1+\mathrm{i})z_0 = (1+\mathrm{i})(\sqrt{3}-\mathrm{i})$$

donc la forme algébrique de z_1 est

$$z_1 = 1+\sqrt{3}+(\sqrt{3}-1)\mathrm{i}$$

2. Sachant que $|z_0| = 2$, on a

$$z_0 = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}\right) = 2\left(\cos\frac{-\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{-\pi}{6}\right),$$

donc la forme exponentielle de z_0 est

$$z_0 = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6}.$$

Nous savons déjà que $|1+\mathrm{i}| = \sqrt{2}$, donc

$$1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right),$$

donc la forme exponentielle de $1+\mathrm{i}$ est

$$1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}.$$

On rappelle que

$$z_1 = (1+\mathrm{i})z_0.$$

À l'aide des formes exponentielles de $1+\mathrm{i}$ et de z_0, nous obtenons

$$z_1 = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6} = 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi/4-\pi/6)},$$

donc la forme exponentielle de z_1 est

$$z_1 = 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/12}.$$

3. Écrivons l'égalité entre la forme algébrique et la forme exponentielle de z_1,

$$1+\sqrt{3}-(1-\sqrt{3})\mathrm{i} = 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/12}.$$

et identifions les parties réelles. Nous obtenons l'égalité

$$1+\sqrt{3} = 2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12},$$

de laquelle nous tirons

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}},$$

que nous embellissons en multipliant le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{2}$, soit

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}.$$

Exercice 5

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité.

1. Les deuxièmes termes des suites (a_n), (b_n) et (c_n) sont

$$\begin{aligned} a_1 &= 0{,}95a_0 = 0{,}95,\\ b_1 &= 0{,}05a_0 + 0{,}80b_0 = 0{,}05,\\ c_1 &= 0{,}2b_0 + c_0 = 0. \end{aligned}$$

2. a. Chaque jour, la proportion des individus qui restent sains est de 95 %. Il s'ensuit que

$$a_{n+1} = 0{,}95 a_n.$$

b. Le jour $n+1$, 5 % des a_n individus sains, soit $0{,}05a_n$ individus, tombent malades, et 80 % des b_n individus déjà malades, soit $0{,}80b_n$ individus, restent malades, donc le nombre d'individus malades au jour $n+1$ s'élève à

$$b_{n+1} = 0{,}05a_n + 0{,}80b_n.$$

3. a. Effectuons le produit des matrices A et U_n :

$$\mathrm{A} \times \mathrm{U}_n = \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0 & 0 \\ 0{,}05 & 0{,}8 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}95a_n \\ 0{,}05a_n + 0{,}8b_n \\ 0{,}2b_n + c_n \end{pmatrix}.$$

Dans cette dernière matrice, nous reconnaissons a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1}, donc

$$\mathrm{U}_{n+1} = \mathrm{A} \times \mathrm{U}_n.$$

b. Montrons que pour tout entier $n \geqslant 0$,

$$\mathrm{D}^n = \begin{pmatrix} 0{,}95^n & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Raisonnons par récurrence. L'égalité est vrai pour $n = 0$. En effet, les deux membres de l'égalité sont égaux à la matrice identité.
Supposons l'égalité vraie pour un entier n. Écrivons

$$\mathrm{D}^{n+1} = \mathrm{D} \times \mathrm{D}^n,$$

et appliquons l'hypothèse de récurrence à D^n. Nous obtenons

$$\mathrm{D}^{n+1} = \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}95^n & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}95^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

où nous reconnaissons l'égalité (4) pour l'entier $n+1$. Nous avons montré que l'égalité (4) est vraie pour tout entier naturel n.

4. a. Soit n un entier naturel. De la relation $U_n = A^n \times U_0$, nous tirons immédiatement

$$b_n = \frac{1}{3}(0{,}95^n - 0{,}8^n).$$

b. Les suites géométriques $(0{,}95^n)$ et $(0{,}8^n)$ ont des raisons strictement comprises entre -1 et 1, donc elles convergent vers 0. Il s'ensuit que

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = 0.$$

c. La variable b' a pour valeur u_{k+1}. La variable b sert à mémoriser la valeur précédente de b', donc elle a pour valeur u_k. La variable x (resp. y) a pour valeur $0{,}95^{k+1}$ (resp. $0{,}80^{k+1}$), donc à l'intérieur du bloc « Tant que $b < b'$ faire », il faut « affecter à b' la valeur $\frac{1}{3}(x-y)$. Après ce bloc, $b \geqslant b'$, donc il faut « afficher k ».

Voir l'algorithme complet sur la figure 8 page ci-contre.

La table 2 page 46 montre que le maximum épidémique est atteint le 9e jour. À ce moment là, environ 16,53 % de la population est malade.

Variables	b, b', x, y sont des réels
	k est un entier naturel
Initialisation	Affecter à b la valeur 0
	Affecter à b' la valeur 0,05
	Affecter à k la valeur 0
	Affecter à x la valeur 0,95
	Affecter à y la valeur 0,8
Traitement	Tant que $b < b'$ faire
	Affecter à k la valeur $k+1$
	Affecter à b la valeur b'
	Affecter à x la valeur $0{,}95x$
	Affecter à y la valeur $0{,}80y$
	Affecter à b' la valeur $\frac{1}{3}(x-y)$
	Fin tant que
Sortie	Afficher k

FIGURE 8 – *Algorithme de calcul du pic épidémique*

	k	b	x	y	b'	Test : $b < b'$?
Après le 7[e] passage dans la boucle Tant que	7	0,1628	0,6634	0,1678	0,1652	Vrai
Après le 8[e] passage éventuel dans la boucle Tant que	8	0,1652	0,6302	0,1342	0,1653	Vrai
Après le 9[e] passage éventuel dans la boucle Tant que	9	0,1653	0,5987	0,1074	0,1638	Faux

TABLE 2 – *Exécution de l'algorithme pour* $7 \leqslant k \leqslant 9$.

Sujet 3

Amérique du Nord

30 mai 2014

ÉNONCÉ

Exercice 1 (5 points)
Commun à tous les candidats.

Une grande enseigne de cosmétiques lance une nouvelle crème hydratante.

PARTIE A. CONDITIONNEMENT DES POTS

Cette enseigne souhaite vendre la nouvelle crème sous un conditionnement de 50 mL et dispose pour ceci de pots de contenance maximale 55 mL. On dit qu'un pot de crème est non conforme s'il contient moins de 49 mL de crème.

1. Plusieurs séries de tests conduisent à modéliser la quantité de crème, exprimée en mL, contenue dans chaque pot par une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 50$ et d'écart-type $\sigma = 1{,}2$.
   Calculer la probabilité qu'un pot de crème soit non conforme.
2. La proportion de pots de crème non conformes est jugée trop importante. En modifiant la viscosité de la crème, on peut changer la valeur de l'écart-type de la variable aléatoire X, sans modifier son espérance $\mu = 50$. On veut réduire à 0,06 la probabilité qu'un pot choisi au hasard soit non conforme.
   On note σ' le nouvel écart-type, et Z la variable aléatoire égale à $\frac{X-50}{\sigma'}$.
   a. Préciser la loi que suit la variable aléatoire Z.
   b. Déterminer une valeur approchée du réel u tel que $P(Z \leqslant u) = 0{,}06$.
   c. En déduire la valeur attendue de σ'.

3. Une boutique commande à son fournisseur 50 pots de cette nouvelle crème. On considère que le travail sur la viscosité de la crème a permis d'atteindre l'objectif fixé et donc que la proportion de pots non conformes dans l'échantillon est 0,06.

   Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de pots non conformes parmi les 50 pots reçus.

   a. On admet que Y suit une loi binomiale. En donner les paramètres.

   b. Calculer la probabilité que la boutique reçoive deux pots non conformes ou moins de deux pots non conformes.

Partie B. Campagne publicitaire

Une association de consommateurs décide d'estimer la proportion de personnes satisfaites par l'utilisation de cette crème. Elle réalise un sondage parmi les personnes utilisant ce produit. Sur 140 personnes interrogées, 99 se déclarent satisfaites.

Estimer, par intervalle de confiance au seuil de 95 %, la proportion de personnes satisfaites parmi les utilisateurs de la crème.

Exercice 2 (6 points)

Commun à tous les candidats.

On considère la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par

$$f(x) = 5\mathrm{e}^{-x} - 3\mathrm{e}^{-2x} + x - 3.$$

On note $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de la fonction f et $\mathscr{D}$ la droite d'équation

$$y = x - 3.$$

Partie A. Positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{D}$

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par

$$g(x) = f(x) - (x - 3).$$

1. Justifier que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;+\infty[$, $g(x) > 0$.
2. La courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite $\mathscr{D}$ ont-elles un point commun ? Justifier.

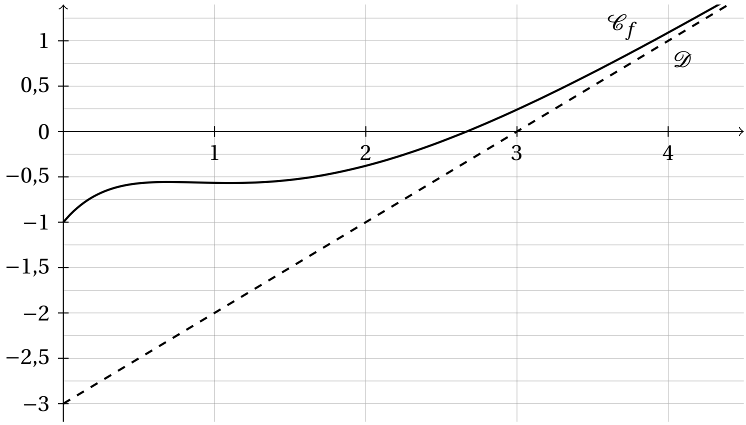


FIGURE 1

PARTIE B. ÉTUDE DE LA FONCTION g

On note M le point d'abscisse x de la courbe $\mathscr{C}_f$, N le point d'abscisse x de la droite $\mathscr{D}$ et on s'intéresse à l'évolution de la distance MN.

1. Justifier que, pour tout x de l'intervalle $[0\,;+\infty[$, la distance MN est égale à $g(x)$.
2. On note g' la fonction dérivée de la fonction g sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$. Pour tout x de l'intervalle $[0\,;+\infty[$, calculer $g'(x)$.
3. Montrer que la fonction g possède un maximum sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ que l'on déterminera. En donner une interprétation graphique.

PARTIE C. ÉTUDE D'UNE AIRE

On considère la fonction $\mathscr{A}$ définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par

$$\mathscr{A}(x) = \int_0^x \big(f(t) - (t-3)\big)\,\mathrm{d}t.$$

1. Hachurer sur le graphique (figure 1) le domaine dont l'aire est donnée par $\mathscr{A}(2)$.
2. Justifier que la fonction $\mathscr{A}$ est croissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

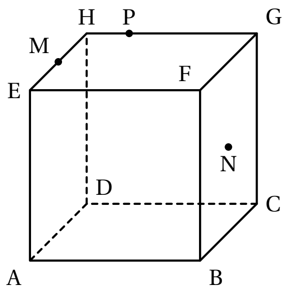


FIGURE 2

3. Pour tout réel x strictement positif, calculer $\mathscr{A}(x)$.
4. Existe-t-il une valeur de x telle que $\mathscr{A}(x) = 2$?

Exercice 3 (4 points)
Commun à tous les candidats.

On considère un cube ABCDEFGH donné sur la figure 2. On note M le milieu du segment [EH], N celui de [FC] et P le point tel que $\overrightarrow{HP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{HG}$.

PARTIE A. SECTION DU CUBE PAR LE PLAN (MNP)

1. Justifier que les droites (MP) et (FG) sont sécantes en un point L. Construire le point L.
2. On admet que les droite (LN) et (CG) sont sécantes et on note T leur point d'intersection. On admet que les droites (LN) et (BF) sont sécantes et on note Q leur point d'intersection.
   a. Construire les points T et Q en laissant apparents les traits de construction.
   b. Construire l'intersection des plans (MNP) et (ABF).
3. En déduire une construction de la section du cube par le plan (MNP).

PARTIE B

L'espace est rapporté au repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

1. Donner les coordonnées des points M, N et P dans ce repère.
2. Déterminer les coordonnées du point L.
3. On admet que le point T a pour coordonnées $\left(1;1;\frac{5}{8}\right)$. Le triangle TPN est-il rectangle en T ?

Exercice 4 (5 points)
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.

Un volume constant de 2 200 m^3 d'eau est réparti entre deux bassins A et B. Le bassin A refroidit une machine. Pour des raisons d'équilibre thermique on crée un courant d'eau entre les deux bassins à l'aide de pompes. On modélise les échanges entre les deux bassins de la façon suivante :

— au départ, le bassin A contient 800 m^3 d'eau et le B contient 1 400 m^3 d'eau ;

— tous les jours, 15 % du volume d'eau présent dans le bassin B au début de la journée est transféré vers le bassin A ;

— tous le jours, 10 % du volume d'eau présent dans le bassin A au début de la journée est transféré vers le bassin B.

Pour tout entier naturel n, on note :

— a_n le volume d'eau, exprimée en m^3, contenu dans le bassin A à la fin du n-ième jour de fonctionnement ;

— b_n le volume d'eau, exprimée en m^3, contenu dans le bassin B à la fin du n-ième jour de fonctionnement.

On a donc $a_0 = 800$ et $b_0 = 1\,400$.

1. Par quelle relation entre a_n et b_n traduit-on la conservation du volume total d'eau du circuit ?
2. Justifier que, pour tout entier naturel n,
$$a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + 330.$$
3. L'algorithme de la figure 3 page suivante permet de déterminer la plus petite valeur de n à partir de laquelle a_n est supérieur ou égal à 1 100.
   Recopier cet algorithme en complétant les parties manquantes.

Variables	n est un entier naturel
	a est un réel
Initialisation	Affecter à n la valeur 0
	Affecter à a la valeur 800
Traitement	Tant que $a < 1\,100$ faire
	Affecter à a la valeur ....
	Affecter à n la valeur $n+1$
	Fin Tant que
	Affecter à n la valeur .... [a]
Sortie	Afficher n

a. Ne tenez pas compte de cette ligne. Il s'agit d'une erreur d'énoncé présente dans le sujet original. {Ndlr}

FIGURE 3 – *Algorithme à compléter*

4. Pour tout entier naturel n, on note $u_n = a_n - 1320$.

   a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

   b. Exprimer u_n en fonction de n. En déduire que, pour tout entier naturel n,

$$a_n = 1320 - 520 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

5. On cherche à savoir si, un jour donné, les deux bassins peuvent avoir, au mètre cube près, le même volume d'eau.

   Proposer une méthode pour répondre à ce questionnement.

Exercice 4 (5 points)
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité.

Un volume constant de $2\,200\ \text{m}^3$ d'eau est réparti entre deux bassins A et B. Le bassin A refroidit une machine. Pour des raisons d'équilibre thermique on crée un courant d'eau entre les deux bassins à l'aide de deux pompes. On modélise les échanges entre les deux bassins de la façon suivante :

— au départ, le bassin A contient 1 100 m^3 d'eau et le B contient 1 100 m^3 d'eau ;

— tous les jours, 15 % du volume d'eau présent dans le bassin B au début de la journée est transféré vers le bassin A ;

— tous le jours, 10 % du volume d'eau présent dans le bassin A au début de la journée est transféré vers le bassin B, et, pour des raisons de maintenance, on transfère également 5 m^3 du bassin A vers le bassin B.

Pour tout entier naturel n, on note :

— a_n le volume d'eau, exprimée en m^3, contenu dans le bassin A à la fin du n-ième jour de fonctionnement ;

— b_n le volume d'eau, exprimée en m^3, contenu dans le bassin B à la fin du n-ième jour de fonctionnement.

On a donc $a_0 = 1\,100$ et $b_0 = 1\,100$.

Partie A

1. Traduire la conservation du volume total d'eau du circuit par une relation liant a_n et b_n.
2. On utilise un tableur pour visualiser l'évolution du volume d'eau dans les bassins. Donner les formules à écrire et à recopier vers le bas dans les cellules B3 et C3 permettant d'obtenir la feuille de calcul de la figure 4 page suivante.
3. Quelle conjectures peut-on faire sur l'évolution du volume d'eau dans chacun des bassins ?

Partie B

On considère la matrice carrée

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}15 \\ 0{,}1 & 0{,}85 \end{pmatrix}$$

et les matrices colonnes

$$\mathrm{R} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{X}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}.$$

	A	B	C
1	Jour N°	Volume du bassin A	Volume du bassin B
2	0	1100,00	1100,00
3	1		
4	2	1187,50	1012,50
5	3	1215,63	984,38
6	4	1236,72	963,28
7	5	1252,54	947,46
8	6	1264,40	935,60
9	7	1273,30	926,70
10	8	1279,98	920,02
11	9	1284,98	915,02
12	10	1288,74	911,26
13	11	1291,55	908,45
14	12	1293,66	906,34
15	13	1295,25	904,75
16	14	1296,44	903,56
17	15	1297,33	902,67
18	16	1298,00	902,00
19	17	1298,50	901,50
20	18	1298,87	901,13

FIGURE 4

On admet que, pour tout entier naturel n,

$$X_{n+1} = MX_n + R.$$

1. On note $S = \begin{pmatrix} 1300 \\ 900 \end{pmatrix}$. Vérifier que $S = MS + R$. En déduire que, pour tout entier naturel n,

$$X_{n+1} - S = M(X_n - S).$$

Dans la suite, on admettra que, pour tout entier naturel n,

$$X_n - S = M^n (X_0 - S)$$

et que

$$M^n = \begin{pmatrix} 0,6 + 0,4 \times 0,75^n & 0,6 - 0,6 \times 0,75^n \\ 0,4 - 0,4 \times 0,75^n & 0,4 + 0,6 \times 0,75^n \end{pmatrix}.$$

2. Montrer que, pour tout entier naturel n,

$$X_n = \begin{pmatrix} 1\,300 - 200 \times 0{,}75^n \\ 900 + 200 \times 0{,}75^n \end{pmatrix}.$$

3. Valider ou invalider les conjectures effectuées à la question 3 de la partie A.

4. On considère que le processus est stabilisé lorsque l'entier naturel n vérifie

$$1300 - a_n < 1{,}5 \quad \text{et} \quad b_n - 900 < 1{,}5.$$

Déterminer le premier jour pour lequel le processus est stabilisé.

CORRIGÉ

Exercice 1

Commun à tous les candidats.

Partie A. Conditionnement des pots

1. La probabilité qu'un pot de crème soit non conforme est égale à

$$P(X < 49) \approx 0{,}202.$$

2. a. Par construction, la variable aléatoire Z suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.

   b. À l'aide de calculatrice, nous trouvons que $P(Z \leqslant u) = 0{,}06$ pour

$$u \approx -1{,}555.$$

   c. Nous souhaitons déterminer σ' de sorte que

$$P(X < 49) = 0{,}06.$$

   L'inégalité $X < 49$ est équivalente à l'inégalité $\frac{X-50}{\sigma'} < \frac{-1}{\sigma'}$, donc σ' vérifie

$$P\left(Z \leqslant -\frac{1}{\sigma'}\right) = 0{,}06.$$

   D'après la question précédente, $-\frac{1}{\sigma'} = u$, donc

$$\sigma' = -\frac{1}{u} \approx 0{,}643.$$

3. a. La variable aléatoire Y suit la loi binomiale $\mathcal{B}(50; 0{,}06)$.

   b. Soit un entier $0 \leqslant k \leqslant 50$. La probabilité que le lot comprenne exactement k pots non conforme est égale à

$$P(Y = k) = \binom{50}{k} 0{,}06^k \times 0{,}94^{50-k}.$$

   Donc la probabilité d'avoir au plus 2 pots non conformes est

$$\begin{aligned} P(Y \leqslant 2) &= P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2) \\ &= 0{,}94^{50} + 50 \times 0{,}06 \times 0{,}94^{49} + 1\,225 \times 0{,}06^2 \times 0{,}94^{48} \\ &\approx 0{,}416. \end{aligned}$$

Partie B. Campagne publicitaire

La taille de l'échantillon $n = 140$, et la proportion $f = \frac{99}{140} \approx 0{,}707$ de personnes satisfaites dans l'échantillon vérifient les conditions $n \geqslant 30$, $nf \geqslant 5$ et $n(1-f) \geqslant 5$, donc un intervalle de confiance de la proportion de consommateurs satisfaits au seuil de confiance de 95 % est

$$\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}; f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[\frac{99}{140} - \frac{1}{\sqrt{140}}; \frac{99}{140} + \frac{1}{\sqrt{140}}\right] \approx [0{,}623\,;0{,}792].$$

Nous pouvons estimer que la proportion de consommateurs satisfaits est comprise entre 62,3 % et 79,2 % au niveau de confiance à 95 %.

Exercice 2

Commun à tous les candidats.

Partie A. Positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{D}$

1. Pour tout réel $x \geqslant 0$, on a

$$g(x) = 5\mathrm{e}^{-x} - 3\mathrm{e}^{-2x} = \mathrm{e}^{-2x}(5\mathrm{e}^{x} - 3).$$

La fonction exponentielle est une fonction croissante à valeurs strictement positives, donc

$$\mathrm{e}^{-2x} > 0 \quad \text{et} \quad 5\mathrm{e}^{x} - 3 \geqslant 5\mathrm{e}^{0} - 3 = 2,$$

si bien que $g(x) > 0$ pour tout réel $x \geqslant 0$.

2. Les abscisses des points communs éventuels entre les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{D}$ sont les solutions de l'équation $f(x) = x-3$, c'est-à-dire $g(x) = 0$. Or nous venons de montrer que $g > 0$, donc les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{D}$ n'ont pas de point commun.

Partie B. Étude de la fonction g

1. Soit $(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ le repère orthogonal.[1] Le point M a pour coordonnées $(x, f(x))$ et le point N a pour coordonnées $(x, x-3)$. Donc

$$\overrightarrow{\mathrm{MN}} = (f(x) - (x-3))\vec{\jmath} = g(x)\vec{\jmath}.$$

1. Le repère n'est à priori pas orthonormal. Nous ne pouvons donc pas utiliser la formule $\mathrm{MN} = \sqrt{(x_\mathrm{N} - x_\mathrm{M})^2 + (y_\mathrm{N} - y_\mathrm{M})^2}$.

x	0		$\ln\frac{6}{5}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{25}{12}$	$\searrow$	

FIGURE 5 – *Tableau de variation de la fonction g.*

Nous en déduisons que $\mathrm{MN} = \left\|g(x)\vec{\jmath}\right\| = \left|g(x)\right| \left\|\overrightarrow{\jmath}\right\|$. Comme g est positive sur $[0\,;+\infty[$, il vient $\mathrm{MN} = g(x)\left\|\vec{\jmath}\right\|$, expression que nous réécrivons

$$\mathrm{MN} = g(x) \text{ u.l.},$$

où l'unité de longueur est la norme du vecteur $\vec{\jmath}$.

2. La dérivée de la fonction g est définie sur $[0\,;+\infty[$ par

$$g'(x) = -5\mathrm{e}^{-x} + 6\mathrm{e}^{-2x}.$$

3. Soit un réel $x \geqslant 0$. Nous pouvons factoriser $g'(x)$ ainsi :

$$g'(x) = \mathrm{e}^{-2x}(6 - 5\mathrm{e}^{x}).$$

Comme $\mathrm{e}^{-2x} > 0$, le nombre dérivé $g'(x)$ est du même signe que $6 - 5\mathrm{e}^{x}$. La fonction $x \mapsto 6 - 5\mathrm{e}^{x}$ est décroissante (comme $-\exp$) sur $[0\,;+\infty[$. De plus,

$$6 - 5\mathrm{e}^{x} = 0 \iff \mathrm{e}^{x} = \frac{6}{5} \iff x = \ln\frac{6}{5}.$$

Nous en déduisons le tableau de variation de la fonction g (figure 5). Nous voyons que la fonction g admet un maximum en $\ln\frac{6}{5}$ égale à

$$g\left(\frac{6}{5}\right) = 5\mathrm{e}^{-\ln(6/5)} - 3\mathrm{e}^{-2\ln(6/5)} = 5\mathrm{e}^{\ln(5/6)} - 3\mathrm{e}^{\ln(5/6)^2} = 5\frac{5}{6} - 3\left(\frac{5}{6}\right)^2,$$

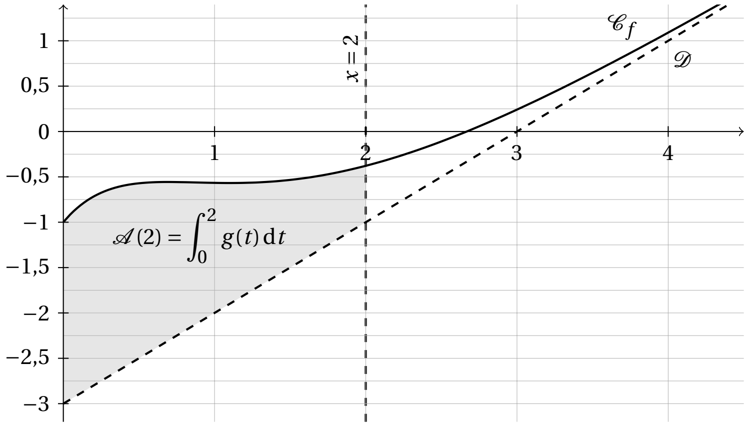


FIGURE 6

soit

$$g\left(\frac{6}{5}\right) = \frac{25}{12}.$$

La distance maximale entre M et N est $\frac{25}{12}$ u.l. et est atteinte pour $x = \frac{6}{5}$.

PARTIE C. ÉTUDE D'UNE AIRE

1. Le réel $\mathscr{A}(2)$ est l'aire du domaine délimité par les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{D}$, l'axe des ordonnées, et la droite d'équation $x = 2$. Il est représenté sur la figure 6.
2. La fonction $\mathscr{A}$ définie pour tout réel $x \geqslant 0$ par

$$\mathscr{A}(x) = \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t,$$

où g est une fonction continue, est une primitive de la fonction g (celle qui s'annule en 0). Par conséquent la fonction $\mathscr{A}$ est dérivable et $\mathscr{A}' = g$. Or nous avons montré que $g \geqslant 0$, il s'ensuit que la fonction $\mathscr{A}$ est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.
3. Soit un réel $x > 0$. Nous avons

$$\mathscr{A}(x) = \int_0^x 5\mathrm{e}^{-t} - 3\mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t = \left[-5\mathrm{e}^{-t} + \frac{3}{2}\mathrm{e}^{-2t}\right]_0^x = -5\mathrm{e}^{-x} + \frac{3}{2}\mathrm{e}^{-2x} + 5 - \frac{3}{2}$$

si bien que
$$\mathscr{A}(x) = \frac{7}{2} - 5e^{-x} + \frac{3}{2}e^{-2x}.$$

4. Déterminons la limite de $\mathscr{A}$ en $+\infty$. Des limites
$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} e^{-2x} = 0,$$
et de l'expression de $\mathscr{A}(x)$ de la question précédente, nous déduisons immédiatement que
$$\lim_{x\to+\infty} \mathscr{A}(x) = \frac{7}{2}.$$
La fonction $\mathscr{A}$ est continue sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$, $\mathscr{A}(0) < 2$ et $\lim_{x\to+\infty}\mathscr{A}(x) > 2$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $\mathscr{A}(x) = 2$ possède au moins une solution[2] dans l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

Solution alternative. Résolvons dans $[0\,;+\infty[$ l'équation
$$\mathscr{A}(x) = 2. \tag{1}$$
D'après la question précédente,
$$(1) \iff \frac{3}{2} - 5e^{-x} + \frac{3}{2}e^{-2x} = 0.$$
Multiplions ses membres par le réel non nul $2e^{2x}$. Nous obtenons ainsi
$$(1) \iff 3e^{2x} - 10e^{x} + 3 = 0.$$
Posons $X = e^x$. Alors
$$(1) \iff \begin{cases} 3X^2 - 10X + 3 = 0, \\ X = e^x. \end{cases}$$

2. En fait, la fonction $\mathscr{A}$ est strictement croissante, donc l'équation $\mathscr{A}(x) = 2$ possède une unique solution.

Le polynôme a un discriminant[3] $(-10)^2 - 4 \times 3 \times 3 = 64$ strictement positif, donc il admet deux racines réels distinctes :

$$\frac{-(-10)-\sqrt{64}}{2\times 3} = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad \frac{-(-10)+\sqrt{64}}{2\times 3} = 3.$$

Étant donné l'équivalence

$$x \geqslant 0 \iff \mathrm{X} \geqslant 1,$$

seule la racine 3 convient. De $3 = \mathrm{e}^x$ nous tirons $x = \ln 3$.

Nous avons démontré que l'équation (1) admet $\ln 3$ comme unique solution positive.

Exercice 3

Commun à tous les candidats.

Partie A. Section du cube par le plan (MNP)

1. Supposons que les droites (MP) et (FG) ne sont pas sécantes. Alors (MP) $/\!/$ (FG) car elles sont coplanaires. Comme EFGH est un carré, on a (EH) $/\!/$ (FG). Il s'ensuit que (EH) $/\!/$ (MP). Or M $\in$ (EH), donc les droites (EH) et (MP) sont confondues, si bien que P = H. La définition du point P implique alors que HG = 4HP = 0. Cela signifie que le cube est réduit à un point. Contradiction. Les droites (MP) et (FG) sont donc sécantes.
2. a. Voir la figure 7 page suivante.

   b. L'intersection des plans (ABF) et (MNP) est une droite. Notons la $\mathscr{D}$. Déterminons deux de ces points. Le point L appartient à la droite (MP) dont L appartient au plan (MNP), et par conséquent la droite (LN) appartient au plan (MNP). La droite (LN) appartient au plan (BFG). Le point Q, intersection des droites (LN) et (BF) est un point de la

3. Voici une alternative à la méthode du discriminant. Les résultats utilisés sont hors-programme, cependant ils sont si simples à démontrer et si utiles que beaucoup d'entre vous les ont vus en exercices. Le polynôme étant à coefficients entiers, ses racines entières éventuelles sont des diviseurs de 3 (coefficient de X^2). En remarquant que les racines sont nécessairement positives, il nous reste deux candidats : 1 et 3. Seul 3 convient. L'une des deux relations entre les coefficients et les racines nous dit que le produit des racines est égal à 1, si bien que la seconde racine est $\frac{1}{3}$.

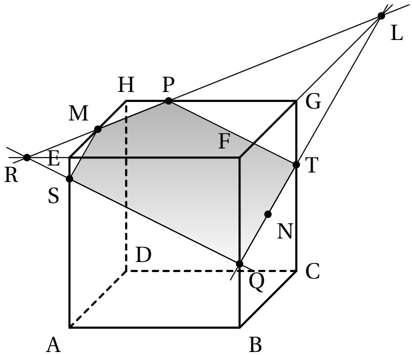


FIGURE 7

droite $\mathscr{D}$. Soit R le point d'intersection de la droite (MP) avec la droite (EF). Il appartient à la droite $\mathscr{D}$. En conclusion, l'intersections des plans (ABF) et (MNP) est la droite (QR).

3. Soit S l'intersection de la droite (QR) avec la droite (AE). La section du cube par le plan (MNP) est la région du plan (MNP) délimitée par le polygone (MPTQS).

PARTIE B

1. Pour déterminer les coordonnées des points M, N et P il suffit de d'écrire les vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AN}$ et $\overrightarrow{AP}$ comme une combinaisons linéaires des vecteurs de la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

   — On a $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EM}$, et étant donné que M est le milieu du segment [EH], il vient $\overrightarrow{EM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$, donc $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$. Le point M a pour coordonnées $\left(0; \frac{1}{2}; 1\right)$.

   — On a $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}$. Vu que N est le milieu de la diagonale [FC] du carré [BFGC], le point N est aussi le milieu de la diagonale [BG], donc $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CG}$, puis $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$. Le point N a pour coordonnées $\left(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

   — On a $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{HP} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{HP}$ où $\overrightarrow{HP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{HG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$, donc $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$. Le point P a pour coordonnées $\left(\frac{1}{4}; 1; 1\right)$.

2. Notons (a, b, c) les coordonnées du point L. Le point L appartient à la droite (FG), intersection des plans (BFG) d'équation $x = 1$ et (EFG) d'équation $z = 1$, donc $a = 1$ et $c = 1$. Le point L appartient à la droite (MP), donc les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{MP}}\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2};0\right)$ et $\overrightarrow{\mathrm{ML}}\left(1;b-\frac{1}{2};0\right)$ sont colinéaires. L'égalité du produit en croix

$$\frac{1}{4}\left(b-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

donne $b = \frac{5}{2}$. Le point L a pour coordonnées $\left(1;\frac{5}{2};1\right)$.

3. Les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{NT}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{PT}}$ ont pour coordonnées respectives $\left(0;\frac{1}{2};\frac{1}{8}\right)$ et $\left(\frac{3}{4};0;-\frac{3}{8}\right)$. Le repère est orthonormé, donc leur produit scalaire est donnée par la formule

$$\overrightarrow{\mathrm{NT}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PT}} = 0\times\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\times 0-\frac{1}{8}\times\frac{3}{8}=-\frac{3}{64}.$$

Comme $\overrightarrow{\mathrm{NT}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PT}} \neq 0$, les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{NT}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{PT}}$ ne sont pas orthogonaux, donc le triangle NTP n'est pas rectangle en T.

Solution alternative. Comparons NP^2 et $\mathrm{NT}^2+\mathrm{PT}^2$:

$$\mathrm{NP}^2=\left(\frac{1}{4}-1\right)^2+\left(1-\frac{1}{2}\right)^2+\left(1-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{9}{16}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{17}{16}>1,$$

et

$$\begin{aligned}\mathrm{NT}^2+\mathrm{PT}^2&=\left(1-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{5}{8}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(1-\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{5}{8}-1\right)^2\\&=\frac{1}{4}+\frac{1}{64}+\frac{9}{16}+\frac{9}{64}\\&=\frac{31}{32}<1.\end{aligned}$$

On voit que $\mathrm{NP}^2 \neq \mathrm{NT}^2+\mathrm{PT}^2$. La contraposée du théorème de Pythagore nous permet de conclure que le triangle NPT n'est pas rectangle en T.

Variables	n est un entier naturel
	a est un réel
Initialisation	Affecter à n la valeur 0
	Affecter à a la valeur 800
Traitement	Tant que $a < 1\,100$ faire
	Affecter à a la valeur $\frac{3}{4}a + 330$
	Affecter à n la valeur $n + 1$
	Fin Tant que
Sortie	Afficher n

FIGURE 8

Exercice 4

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.

1. La conservation du volume total d'eau du circuit se traduit par la relation

$$a_n + b_n = 2\,200.$$

2. Le $(n+1)$-ième jour, le bassin A perd 10 % du volume d'eau présent à la fin du n-ième jour, et reçoit 15 % du volume d'eau présent dans le bassin B à la fin du n-ième jour, donc

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n - 0{,}1a_n + 0{,}15b_n \\ &= 0{,}9a_n + 0{,}15b_n. \end{aligned}$$

Comme $b_n = 2\,200 - a_n$, il vient

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 0{,}9a_n + 0{,}15(2\,200 - a_n) \\ &= 0{,}75a_n + 330 \\ &= \frac{3}{4}a_n + 330. \end{aligned}$$

3. La ligne « Affecter à n la valeur .... » est une erreur de l'énoncé. Voir l'algorithme complet figure 8.

4. Partons de la relation de récurrence

$$a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + 330.$$

et retranchons 1 320 aux membres de l'égalité,

$$a_{n+1} - 1\,320 = \frac{3}{4}a_n - 990$$

puis,

$$a_{n+1} - 1\,320 = \frac{3}{4}(a_n - 1\,320) + \underbrace{\frac{3}{4} \times 1\,320 - 990}_{=0}$$

et enfin,

$$u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n.$$

Donc la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{3}{4}$ et de premier terme $u_0 = a_0 - 1\,320 = 800 - 1\,320 = -520$.

5. Pour tout entier $n \geqslant 0$, on a

$$u_n = -520 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n,$$

d'où nous déduisons le terme général de la suite (a_n) :

$$a_n = u_n + 1\,320 = 1\,320 - 520 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

6. La question revient à se demander si l'inéquation

$$-1 \leqslant a_n - b_n \leqslant 1 \tag{2}$$

possède une solution. Or,

$$a_n - b_n = a_n - (2\,200 - a_n) = 2a_n - 2\,200,$$

puis à l'aide du terme général de la suite (a_n) trouvé à la question précédente,

$$\begin{aligned} a_n - b_n &= 2\,640 - 1040 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n - 2\,200 \\ &= 440 - 1040 \times 0{,}75^n, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}(2) &\iff -1 \leqslant 440 - 1040 \times 0{,}75^n \leqslant 1 \\ &\iff 439 \leqslant 0{,}75^n \leqslant 441.\end{aligned}$$

Appliquons la fonction logarithme aux membres de l'inégalité. Le sens des inégalités est conservé car la fonction logarithme est croissante.

$$\begin{aligned}(2) &\iff \ln 439 \leqslant \ln 0{,}75^n \leqslant \ln 441 \\ &\iff \ln 439 \leqslant n \ln 0{,}75 \leqslant \ln 441.\end{aligned}$$

Divisons par $\ln 0{,}75 < 0$, il vient

$$\frac{\ln(441/1040)}{\ln 0{,}75} \leqslant n \leqslant \frac{\ln(439/1040)}{\ln 0{,}75},$$

où $\frac{\ln(441/1040)}{\ln 0{,}75} = 2{,}982\ldots$ et $\frac{\ln(439/1040)}{\ln 0{,}75} = 2{,}998\ldots$ À partir de là nous pouvons tirer deux conclusions correspondantes à des interprétations différentes de la question.

La première est qu'il n'y a aucun jour où les bassins ont en fin de journée le même volume d'eau au mètre cube près puisqu'aucun entier ne satisfait l'inégalité.

La seconde est que si on suppose que le volume d'eau d'un bassin varie continûment, alors les deux bassins ont exactement le même volume d'eau entre le 3[e] ($n = 2$) et le 4[e] jour.

Exercice 4

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité.

PARTIE A

1. La conservation du volume d'eau du circuit peut s'exprimer par la relation

$$a_n + b_n = 2\,200.$$

2. Le $(n+1)$-ième jour, le bassin A perd 10 % de son volume d'eau présent en début de journée, et reçoit 15 % du volume d'eau présent en début de

journée dans le bassin B. Ces échanges se traduisent par la relation de récurrence

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n - 0{,}1a_n + 0{,}15b_n \\ &= 0{,}9a_n + 0{,}15b_n. \end{aligned}$$

Par conséquent il nous faut mettre dans la cellule B3 la formule `=0,9*$B2+0,15*$C2`. La relation de conservation du volume d'eau s'exprime par la formule `=2200-$B3` à mettre dans la cellule C3.

3. À l'aide de la feuille de calcul, nous pouvons conjecturer que la suite (a_n) est croissante, la suite (b_n) décroissante et qu'elles sont toutes les deux convergentes.

PARTIE B

1. Calculons MS + R. D'abord

$$\mathrm{MS} = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}15 \\ 0{,}1 & 0{,}85 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1300 \\ 900 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}9 \times 1300 + 0{,}15 \times 900 \\ 0{,}1 \times 1300 + 0{,}85 \times 900 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1305 \\ 895 \end{pmatrix},$$

puis

$$\mathrm{MS} + \mathrm{R} = \begin{pmatrix} 1305 \\ 895 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1300 \\ 900 \end{pmatrix},$$

donc

$$\mathrm{S} = \mathrm{MS} + \mathrm{R}.$$

2. Soustrayons membre à membre les égalités

$$\mathrm{X}_{n+1} = \mathrm{MX}_n + \mathrm{R}$$

et

$$\mathrm{S} = \mathrm{MS} + \mathrm{R}.$$

Nous obtenons ainsi l'égalité désirée

$$\mathrm{X}_{n+1} - \mathrm{S} = \mathrm{M}(\mathrm{X}_n - \mathrm{S}).$$

3. La matrice X_n peut être obtenue par la formule

$$X_n = S + M^n(X_0 - S).$$

Étant donné que $X_n = \binom{a_n}{b_n}$ et que $a_n + b_n = 2\,200$, proposons nous d'alléger les calculs en utilisant la formule ci-dessus pour seulement calculer le premier coefficient a_n. Nous trouvons

$$\begin{aligned} a_n &= 1\,300 + \begin{pmatrix} 0{,}6 + 0{,}4 \times 0{,}75^n & 0{,}6 - 0{,}6 \times 0{,}75^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1100 - 1300 \\ 1100 - 900 \end{pmatrix} \\ &= 1\,300 - 200 \times (0{,}6 + 0{,}4 \times 0{,}75^n) + 200 \times (0{,}6 - 0{,}6 \times 0{,}75^n) \\ &= 1\,300 - 200 \times 0{,}75^n. \end{aligned}$$

La relation de conservation fournit le second coefficient b_n :

$$b_n = 2\,200 - a_n = 900 + 200 \times 0{,}75^n.$$

Ainsi, nous avons établi que

$$X_n = \begin{pmatrix} 1\,300 - 200 \times 0{,}75^n \\ 900 + 200 \times 0{,}75^n \end{pmatrix}.$$

4. Le sens de variation de la suite (a_n) (resp. (b_n)) est l'opposé (resp. le même) que celui de la suite de terme général $200 \times 0{,}75^n$. Or cette dernière est une suite géométrique dont le premier terme est strictement positif et dont la raison est strictement comprise entre 0 et 1, par conséquent cette suite est strictement décroissante. Nous en déduisons que la suite (a_n) (resp. (b_n)) est strictement décroissante (resp. strictement croissante).

   De plus, une suite géométrique dont la raison est strictement comprise entre 0 et 1 converge vers 0, donc

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = 1300 \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} b_n = 900.$$

5. En utilisant les expressions de a_n et b_n trouvée à la question 3, nous obtenons $1300 - a_n = b_n - 900 = 200 \times 0{,}75^n$. Il s'ensuit que le système d'inéquations

$$\begin{cases} 1300 - a_n < 1{,}5 \\ b_n - 900 < 1{,}5 \end{cases}$$

est équivalent à l'inéquation

$$200 \times 0{,}75^n < 1{,}5$$

ou encore

$$0{,}75^n < 75 \times 10^{-4}.$$

Appliquons le logarithme. La fonction logarithme étant croissante, le sens de l'inégalité est préservée. Il vient

$$n \ln 0{,}75 < \ln(75 \times 10^{-4}).$$

La fonction logarithme est négative sur $]0\,;1[$, donc

$$n \geqslant \frac{\ln(75 \times 10^{-4})}{\ln 0{,}75} \approx 17{,}008.$$

Nous pouvons conclure que le processus est stabilisé à partir du 19e jour ($n = 18$).

Sujet 4

Centres étrangers

12 juin 2014

ÉNONCÉ

Exercice 1 (4 points)
Commun à tous les candidats.

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples comportant quatre questions indépendantes. Pour chaque question, une seule des quatre affirmations proposées est exacte.

Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à l'affirmation exacte. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte un point ; une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

Question 1. Dans un hypermarché, 75 % des clients sont des femmes. Une femme sur cinq achète un article au rayon bricolage, alors que sept hommes sur dix le font.

Une personne, choisie au hasard, a fait un achat au rayon bricolage. La probabilité que cette personne soit une femme a pour valeur arrondie au millième :

a. 0,750 b. 0,150 c. 0,462 d. 0,700

Question 2. Dans cet hypermarché, un modèle d'ordinateur est en promotion. Une étude statistique a permis d'établir que, chaque fois qu'un client s'intéresse à ce modèle, la probabilité qu'il l'achète est égale à 0,3. On considère un échantillon aléatoire de dix clients qui se sont interessés à ce modèle.

La probabilité qu'exactement trois d'entre eux aient acheté un ordinateur de ce modèle a pour valeur arrondie au millième :

a. 0,900 b. 0,092 c. 0,002 d. 0,267

Question 3. Cet hypermarché vend des téléviseurs dont la durée de vie, exprimée en année, peut être modélisée par une variable aléatoire réelle qui suit une loi exponentielle de paramètre λ. La durée de vie moyenne d'un téléviseur est de huis ans, ce qui se traduit par $\lambda = \frac{1}{8}$.

La probabilité qu'un téléviseur pris au hasard fonctionne encore au bout de six ans a pour valeur arrondie au millième :

a. 0,750 b. 0,250 c. 0,472 d. 0,528

Question 4. Cet hypermarché vend des baguettes de pain dont la masse, exprimée en gramme, est une variable aléatoire qui suit une loi normale de moyenne 200 g. La probabilité que la masse d'une baguette soit comprise entre 184 g et 216 g est égale à 0,954.

La probabilité qu'une baguette prise au hasard ait une masse inférieure à 192 g a pour valeur arrondie au centième :

a. 0,16 b. 0,32 c. 0,84 d. 0,48

Exercice 2 (4 points)

Commun à tous les candidats.

On définit, pour tout entier naturel n, les nombres complexes z_n par

$$\begin{cases} z_0 = 16 \\ z_{n+1} = \dfrac{1+\mathrm{i}}{2} z_n, \quad \text{pour tout entier naturel } n. \end{cases}$$

On note r_n le module du nombre complexe z_n : $r_n = |z_n|$.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct d'origine O, on considère les points A_n d'affixes z_n.

1. a. Calculer z_1, z_2 et z_3.
   b. Placer les points A_1 et A_2 sur le graphique (figure 1 page ci-contre).
   c. Écrire le nombre complexe $\frac{1+\mathrm{i}}{2}$ sous forme trigonométrique.
   d. Démontrer que le triangle $\mathrm{OA}_0\mathrm{A}_1$ est isocèle rectangle en A_1.
2. Démontrer que la suite (r_n) est géométrique, de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$. La suite (r_n) est-elle convergente ? Interpréter géométriquement le résultat précédent.

On note L_n la longueur de la ligne brisée qui relie le point A_0 au point A_n en passant successivement par les points A_1, A_2, A_3, etc. Ainsi

$$\mathrm{L}_n = \sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{A}_i\mathrm{A}_{i+1} = \mathrm{A}_0\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_1\mathrm{A}_2 + \cdots + \mathrm{A}_{n-1}\mathrm{A}_n.$$

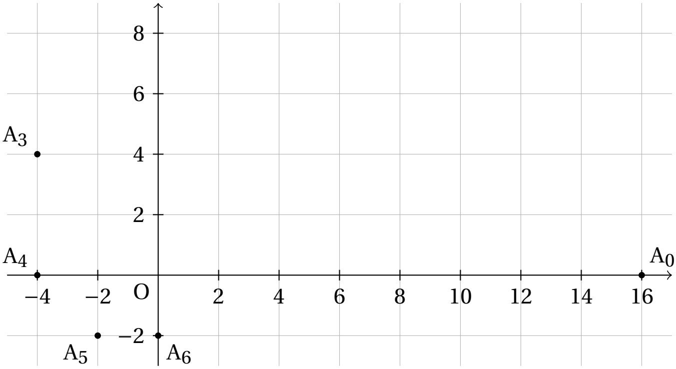


FIGURE 1

3. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n,

$$A_nA_{n+1} = r_{n+1}.$$

b. Donner une expression de L_n en fonction de n.

c. Déterminer la limite éventuelle de la suite (L_n).

Exercice 3 (7 points)
Commun à tous les candidats.

Les parties A et B sont indépendantes.

Une image numérique en noir et blanc est composée de petits carrés (pixels) dont la couleur va du blanc au noir en passant par toutes les nuances de gris. Chaque nuance est codée par un réel x de la façon suivante :

— $x = 0$ pour le blanc ;

— $x = 1$ pour le noir ;

— $x = 0{,}01$; $x = 0{,}02$ et ainsi de suite jusqu'à $x = 0{,}99$ par pas de $0{,}01$ pour toutes les nuances intermédiaires (du clair au foncé).

L'image A (figure 2 page suivante) est composée de quatre pixels et donne un échantillon de ces nuances avec leurs codes.

Un logiciel de retouche d'image utilise des fonctions numériques dites « fonctions de retouche ».

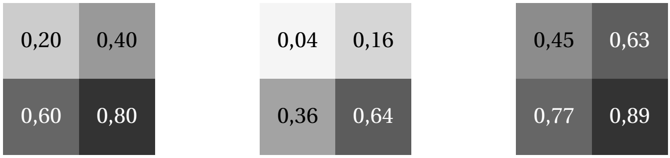


Image A *Image B* *Image C*

FIGURE 2

Une fonction f définie sur l'intervalle $[0;1]$ est dite « fonction de retouche » si elle possède les quatre propriétés suivantes :

— $f(0) = 0$;

— $f(1) = 1$;

— f est continue sur l'intervalle $[0;1]$;

— f est croissante sur l'intervalle $[0;1]$.

Une nuance codée x est dite assombrie par la fonction f si $f(x) > x$, et éclaircie si $f(x) < x$.

Ainsi, si $f(x) = x^2$, un pixel de nuance codée 0,2 prendra la nuance codée $0{,}2^2 = 0{,}04$. L'image A sera transformée en l'image B (figure 2).

Si $f(x) = \sqrt{x}$, la nuance codée 0,2 prendra la nuance codée $\sqrt{0{,}2} \approx 0{,}45$. L'image sera transformée en l'image C (figure 2).

PARTIE A

1. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0;1]$ par

$$f_1(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x.$$

   a. Démontrer que la fonction f_1 est une fonction de retouche.

   b. Résoudre graphiquement l'inéquation $f_1(x) \leqslant x$, à l'aide du graphique figure 3 page ci-contre, à rendre avec la copie, en faisant apparaître les pointillés utiles.

   Interpréter ce résultat en termes d'éclaircissement ou d'assombrissement.

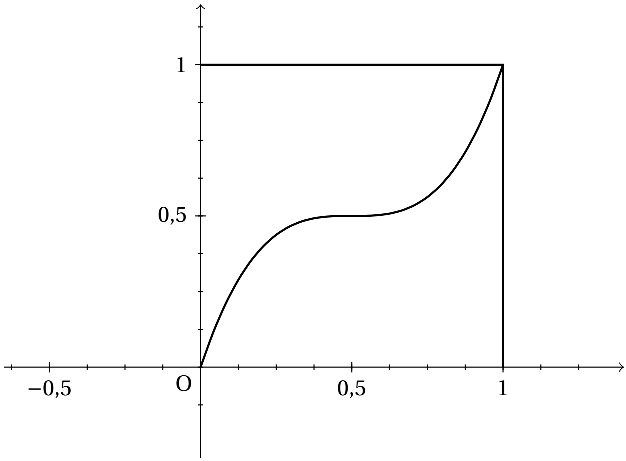


FIGURE 3 – *Courbe représentative de la fonction f_1*

2. On considère la fonction f_2 définie sur l'intervalle $[0\,;1]$ par

$$f_2(x) = \ln\big(1 + (\mathrm{e}-1)x\big).$$

On admet que f_2 est une fonction de retouche. On définit sur l'intervalle $[0\,;1]$ la fonction g par

$$g(x) = f_2(x) - x.$$

a. Établir que, pour tout x de l'intervalle $[0\,;1]$,

$$g'(x) = \frac{(\mathrm{e}-2)-(\mathrm{e}-1)x}{1+(\mathrm{e}-1)x}.$$

b. Déterminer les variations de la fonction g sur l'intervalle $[0\,;1]$.
Démontrer que la fonction g admet un maximum en $\frac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}-1}$, maximum dont une valeur arrondie au centième est 0,12.

c. Établir que l'équation $g(x) = 0{,}05$ admet sur l'intervalle $[0\,;1]$ deux solutions α et β, avec $\alpha < \beta$.
On admettra que $0{,}08 < \alpha < 0{,}09$ et que $0{,}85 < \beta < 0{,}86$.

Variables	x (nuance initiale)
	y (nuance retouchée)
	E (écart)
	c (compteur)
	k
Initialisation	c prend la valeur 0
Traitement	Pour k allant de 0 à 100 faire
	x prend la valeur $\frac{k}{100}$
	y prend la valeur $f(x)$
	E prend la valeur $\lvert y - x \rvert$
	Si E $\geqslant 0{,}05$ faire
	c prend la valeur $c + 1$
	Fin si
	Fin pour
Sortie	Afficher c

FIGURE 4

PARTIE B

On remarque qu'une modification de nuance n'est perceptible visuellement que si la valeur absolue de l'écart entre le code de la nuance initiale et le code de la nuance modifiée est supérieure ou égale à 0,05.

1. Dans l'algorithme de la figure 4, f désigne une fonction de retouche. Quel est le rôle de cet algorithme ?
2. Quelle valeur affichera cet algorithme si on l'applique à la fonction f_2 définie dans la deuxième question de la partie A ?

PARTIE C

Dans cette partie, on s'intéresse à des fonctions de retouche f dont l'effet est d'éclaircir l'image dans sa globalité, c'est-à-dire telles que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;1]$, $f(x) \leqslant x$.

On décide de mesurer l'éclaircissement global de l'image en calculant l'aire A_f de la portion du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe

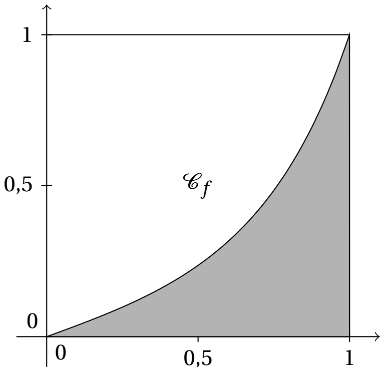


FIGURE 5

représentative de la fonction f, et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$ (figure 5).

Entre deux fonctions, celle qui aura pour effet d'éclaircir le plus l'image sera celle correspondant à la plus petite aire.

On désire comparer l'effet des deux fonctions suivantes, dont on admet qu'elles sont des fonctions de retouche :

$$f_3(x) = x\mathrm{e}^{x^2-1} \quad \text{et} \quad f_4(x) = 4x - 15 + \frac{60}{x+4}.$$

1. a. Calculer A_{f_3}.
   b. Calculer A_{f_4}.
2. De ces deux fonctions, laquelle a pour effet d'éclaircir le plus l'image ?

Exercice 4 (5 points)
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les points $\mathrm{A}(1;2;7)$, $\mathrm{B}(2;0;2)$, $\mathrm{C}(3;1;3)$, $\mathrm{D}(3;-6;1)$ et $\mathrm{E}(4;-8;-4)$.

1. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Soit $\vec{u}(1;b;c)$ un vecteur de l'espace, où b et c désignent deux nombres réels.

a. Déterminer les valeurs de b et c telles que $\vec{u}$ soit un vecteur normal au plan (ABC).

b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est

$$x-2y+z-4=0.$$

c. Le point D appartient-il au plan (ABC) ?

3. On considère la droite $\mathscr{D}$ de l'espace dont une représentation paramétrique est

$$\begin{cases} x=2t+3 \\ y=-4t+5 \\ z=2t-1. \end{cases} \quad \text{où } t \text{ est un nombre réel.}$$

a. La droite $\mathscr{D}$ est-elle orthogonale au plan (ABC) ?

b. Déterminer les coordonnées du point H, intersection de la droite $\mathscr{D}$ et du plan (ABC).

4. Étudier la position de la droite (DE) par rapport au plan (ABC).

Exercice 4 (5 points)
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité.

Partie A. Préliminaires

1. a. Soient n et N deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2, tels que

$$n^2 \equiv \mathrm{N}-1 \pmod{\mathrm{N}}.$$

Montrer que

$$n \times n^3 \equiv 1 \pmod{\mathrm{N}}.$$

b. Déduire de la question précédente un entier k_1 tel que

$$5k_1 \equiv 1 \pmod{26}.$$

On admettra que l'unique entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant 25$ et $5k \equiv 1 \pmod{26}$ vaut 21.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

TABLE 1 – *Table de correspondance*

2. On donne les matrices

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

   a. Calculer la matrice $6\mathrm{A} - \mathrm{A}^2$.
   b. En déduire que A est inversible et que sa matrice inverse, notée A^{-1}, peut s'écrire sous la forme $\mathrm{A}^{-1} = \alpha\mathrm{I} + \beta\mathrm{A}$, où α et β sont deux réels que l'on déterminera.
   c. Vérifier que $\mathrm{B} = 5\mathrm{A}^{-1}$.
   d. Démontrer que si $\mathrm{AX} = \mathrm{Y}$, alors $5\mathrm{X} = \mathrm{BY}$.

PARTIE B. PROCÉDURE DE CODAGE

Coder le mot « ET », en utilisant la procédure de codage décrite ci-dessous.

— Le mot à coder est remplacé par la matrice $\mathrm{X} = \binom{x_1}{x_2}$, où x_1 est l'entier représentant la première lettre du mot et x_2 l'entier représentant la deuxième, selon le tableau de correspondance (table 1).

— La matrice X est transformée en la matrice $\mathrm{Y} = \binom{y_1}{y_2}$ telle que $\mathrm{Y} = \mathrm{AX}$.

— La matrice Y est transformée en la matrice $\mathrm{R} = \binom{r_1}{r_2}$, où r_1 est le reste de la division euclidienne de y_1 par 26 et r_2 le reste de la division euclidienne de y_2 par 26.

— Les entiers r_1 et r_2 donnent les lettres du mot codé, selon le tableau de correspondance (table 1).

Exemple.

« OU » (mot à coder) $\longrightarrow X = \begin{pmatrix} 14 \\ 20 \end{pmatrix} \longrightarrow Y = \begin{pmatrix} 76 \\ 82 \end{pmatrix} \longrightarrow R = \begin{pmatrix} 24 \\ 4 \end{pmatrix} \longrightarrow$ « YE » (mot codé).

Partie C. Procédure de décodage

On conserve les mêmes notations que pour le codage.

Lors du codage, la matrice X a été transformée en la matrice $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ telle que $Y = AX$.

1. Démontrer que

$$\begin{cases} 5x_1 = 2y_1 - y_2 \\ 5x_2 = -3y_1 + 4y_2 \end{cases}.$$

2. En utilisant la question 1.b de la partie A, établir que

$$\begin{cases} x_1 \equiv 16y_1 + 5y_2 \\ x_2 \equiv 15y_1 + 6y_2 \end{cases} \pmod{26}.$$

3. Décoder le mot « QP ».

CORRIGÉ

Exercice 1

Commun à tous les candidats.

Question 1. Réponse a.

Explication. Définissons les événements suivants :

— F : « le client est une femme » ;

— A : « le client achète un article au rayon bricolage ».

La situation est décrite par l'arbre de probabilité de la figure 6.

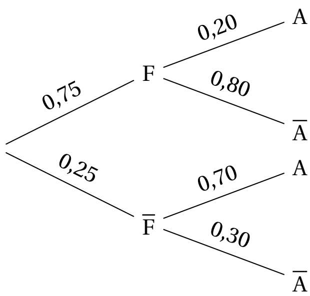


FIGURE 6

On souhaite calculer $P_A(F)$. Pour cela, partons de la définition d'une probabilité conditionnelle,

$$P_A(F) = \frac{P(A \cap F)}{P(A)},$$

et aidons-nous de l'arbre de probabilité pour écrire

$$\begin{aligned} P_A(F) &= \frac{P(F)P_F(A)}{P(F)P_F(A) + P(\overline{F})P_{\overline{F}}(A)} \\ &= \frac{0{,}75 \times 0{,}2}{0{,}75 \times 0{,}2 + 0{,}25 \times 0{,}7}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$P_A(F) \approx 0{,}462.$$

Question 2. Réponse d.

Explication. La variable aléatoire X égale au nombre de clients de l'échantillon qui ont acheté un ordinateur suit la loi binomiale $\mathscr{B}(10;0,3)$. Ainsi pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant 10$, nous avons

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=k)=\binom{10}{k}0{,}3^k \times 0{,}7^{10-k}.$$

Donc la probabilité qu'exactement trois clients de l'échantillon aient acheté un ordinateur de ce modèle est égale à

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=3)=\binom{10}{3}0{,}3^3 \times 0{,}7^7 \approx 0{,}267.$$

Question 3. Réponse c.

Explication. Soit T la variable aléatoire égale à la durée de vie en année d'un téléviseur. Elle suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda=\frac{1}{8}$, donc pour tout réel $t \geqslant 0$, nous avons $\mathrm{P}(\mathrm{T}\geqslant t)=1-\mathrm{P}(\mathrm{T}\leqslant t)=\mathrm{e}^{-t/8}$. Par conséquent, la probabilité qu'un téléviseur pris au hasard fonctionne encore au bout de six ans est égale à

$$\mathrm{P}(\mathrm{T}\geqslant 6)=\mathrm{e}^{-6/8}\approx 0{,}472.$$

Question 4. Réponse a.

Explication. Soit X la variable aléatoire égale à la masse d'une baguette de pain. Afin de calculer $\mathrm{P}(\mathrm{X}\leqslant 192)$ nous devons déterminer son écart-type σ.

Méthode 1. Notons que l'intervalle $[184;216]$ est un intervalle centré sur la moyenne de la variable aléatoire X :

$$\mathrm{P}(200-16\leqslant \mathrm{X}\leqslant 200+16)=0{,}954.$$

D'après un résultat du cours sur la loi normale, on a aussi

$$\mathrm{P}(200-2\sigma\leqslant \mathrm{X}\leqslant 200+2\sigma)\approx 0{,}954.$$

D'où nous tirons $\sigma\approx 8$.

Méthode 2. Considérons la variable aléatoire $\mathrm{Z}=\frac{\mathrm{X}-200}{\sigma}$. Elle suit la loi normale réduite. L'inégalité $184\leqslant \mathrm{X}\leqslant 216$ est équivalente à l'inégalité $-\frac{16}{\sigma}\leqslant \mathrm{Z}\leqslant\frac{16}{\sigma}$, donc

$$\mathrm{P}\left(-\frac{16}{\sigma}\leqslant \mathrm{Z}\leqslant\frac{16}{\sigma}\right)=0{,}954.$$

Appliquons l'identité $\mathrm{P}(-a \leqslant \mathrm{X} \leqslant a) = 1 - 2\mathrm{P}(\mathrm{Z} \leqslant -a)$. Il vient

$$\mathrm{P}\left(\mathrm{Z} \leqslant -\frac{16}{\sigma}\right) = \frac{1-0{,}954}{2} = 0{,}023.$$

À l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel de calcul, nous trouvons

$$-\frac{16}{\sigma} = -1{,}99539331\ldots$$

d'où

$$\sigma = 8{,}01846930\ldots$$

Connaissant les paramètres de la loi X, nous pouvons déterminer la probabilité demandée :

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} \leqslant 192) \approx 0{,}16.$$

Exercice 2

Commun à tous les candidats.

1. a. À l'aide de la définition, nous calculons

$$z_1 = \frac{1+\mathrm{i}}{2} z_0 = \frac{1+\mathrm{i}}{2} \times 16 = 8 + 8\mathrm{i},$$
$$z_2 = \frac{1+\mathrm{i}}{2} z_1 = \frac{1+\mathrm{i}}{2} \times (8+8\mathrm{i}) = 8\mathrm{i},$$
$$z_3 = \frac{1+\mathrm{i}}{2} z_2 = \frac{1+\mathrm{i}}{2} \times 8\mathrm{i} = -4 + 4\mathrm{i}.$$

b. Voir la figure 7 page suivante.

c. Le module de $\frac{1+\mathrm{i}}{2}$ étant égal $\frac{1}{2}\sqrt{1+1} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, on doit avoir

$$\frac{1+\mathrm{i}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta),$$

d'où $\cos\theta = \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, donc $\theta \equiv \frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}$. Par conséquent,

$$\frac{1+\mathrm{i}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

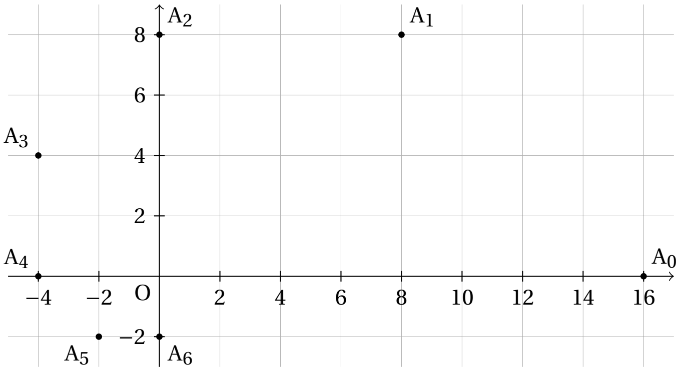


FIGURE 7

d. Les vecteurs $\overrightarrow{A_1A_0}$ et $\overrightarrow{A_1O}$ ont pour affixes

$$z_{\overrightarrow{A_1A_0}} = z_0 - z_1 = 16 - (8+8i) = 8 - 8i$$

et

$$z_{\overrightarrow{A_1O}} = -z_1 = -8 - 8i.$$

Observons que $z_{\overrightarrow{A_1A_0}} = iz_{\overrightarrow{A_1O}}$. Il s'ensuit que

$$\left|z_{\overrightarrow{A_1A_0}}\right| = \left|z_{\overrightarrow{A_1O}}\right| \quad \text{et} \quad \arg z_{\overrightarrow{A_1A_0}} = \frac{\pi}{2} + \arg z_{\overrightarrow{A_1O}},$$

c'est-à-dire

$$A_1A_0 = A_1O \quad \text{et} \quad \widehat{(\overrightarrow{A_1O}, \overrightarrow{A_1A_0})} = \frac{\pi}{2},$$

donc le triangle OA_0A_1 est rectangle isocèle en A_1.

Solution alternative. On a $A_1O = |z_1| = |8+8i|$ et $A_1A_0 = |z_0 - z_1| = |8-8i| = |8+8i| = A_1O$. Par conséquent, le triangle OA_0A_1 est isocèle en A_1. Il s'ensuit que les angles à la base $\widehat{A_0OA_1}$ et $\widehat{OA_0A_1}$ sont égaux. Or,

$$\widehat{(\overrightarrow{OA_0}, \overrightarrow{OA_1})} = \arg z_1 - \arg z_0 = \frac{\pi}{4},$$

donc $\widehat{A_0OA_1} = \widehat{OA_0A_1} = \frac{\pi}{4}$. Dans un triangle la somme des mesures des angles est égale à π, donc $\widehat{OA_1A_0} = \frac{\pi}{2}$. Nous avons démontré que le triangle OA_0A_1 est rectangle isocèle en A_1.

2. Pour tout entier $n \geqslant 0$, on a

$$|z_{n+1}| = \left|\frac{1+i}{2}z_n\right| = \left|\frac{1+i}{2}\right||z_n| = \frac{\sqrt{2}}{2}|z_n|$$

c'est-à-dire

$$r_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}r_n,$$

donc (r_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Étant donné que $|q| < 1$, la suite (r_n) est convergente de limite 0. En d'autres termes, $\lim_{n\to+\infty} OA_n = 0$, c'est-à-dire que la suite de points (A_n) tend vers l'origine O.

3. a. Soit un entier $n \geqslant 0$. On a

$$z_{n+1} - z_n = \frac{1+i}{2}z_n - z_n = \frac{-1+i}{2}z_n,$$

donc

$$|z_{n+1} - z_n| = \frac{\sqrt{2}}{2}|z_n|$$

soit

$$A_nA_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}r_n.$$

Or, la suite (r_n) est géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$, d'où la conclusion :

$$A_nA_{n+1} = r_{n+1}.$$

b. Pour tout entier $n \geqslant 0$, on a

$$L_n = \sum_{i=0}^{n-1} r_{i+1} = r_1 + r_2 + \cdots + r_n.$$

L_n est égal à la somme de n termes consécutifs à partir de r_1 de la suite géométrique (r_n) de raison $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$, donc

$$L_n = r_1 \frac{1-q^n}{1-q}.$$

Le module de z_1 est

$$r_1 = |8+8\mathrm{i}| = \sqrt{64+64} = 8\sqrt{2}.$$

Par conséquent,

$$L_n = 8\sqrt{2}\frac{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}},$$

ou encore après simplification,

$$L_n = 16(1+\sqrt{2})\left(1-\frac{1}{2^{n/2}}\right).$$

c. Étant donné que $\lim_{n\to+\infty} 2^{n/2} = +\infty$, on trouve

$$\lim_{n\to+\infty} L_n = 16(1+\sqrt{2}).$$

Exercice 3

Commun à tous les candidats.

Partie A

1. a. On vérifie facilement que :

— $f_1(0) = 0$;

— $f_1(1) = 4-6+3 = 1$;

— f_1 est continue car c'est une fonction polynomiale ;

— f_1 est croissante ; en effet, f_1 est dérivable comme toutes les fonctions polynomiales, et pour tout $x \in [0;1]$, on a

$$f_1'(x) = 12x^2 - 12x + 3 = 3(4x^2-4x+1) = 3(2x-1)^2 \geqslant 0.$$

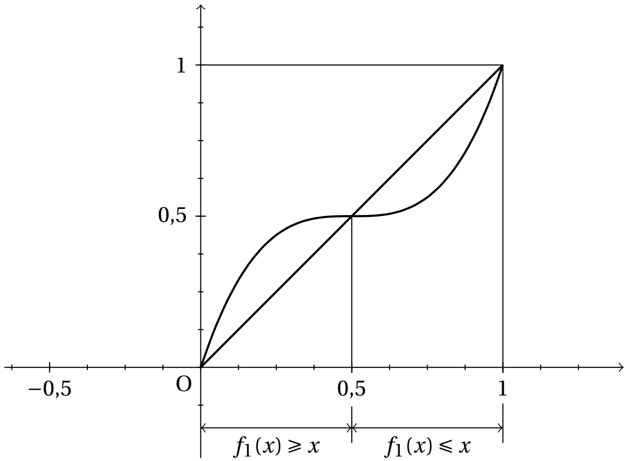


FIGURE 8 – *Résolution graphique de l'inéquation $f_1(x) \leqslant x$*

b. Les solutions de l'inéquation $f_1(x) \leqslant x$ sont les abscisses des points de la courbe représentative de la fonction f_1 qui sont situés sous la droite d'équation $y = x$. Par lecture graphique (figure 8), l'ensemble des solutions de l'inéquation est l'ensemble $\{0\} \cup [0{,}5\,;1]$. [1]
Nous en déduisons que l'ensemble des solutions de l'inéquation $f_1(x) > x$ est l'intervalle $]0\,;0{,}5[$, ce qui signifie que la fonction de retouche f_1 assombrit les pixels clairs dont la nuance est codée par un nombre de l'intervalle $]0\,;0{,}5[$ et éclaircit ou laisse fixe les pixels blancs et foncés dont la nuance est codée par un nombre de l'ensemble $\{0\} \cup [0{,}5\,;1]$.

2. a. Pour tout $x \in [0\,;1]$, on a

$$g'(x) = f_2'(x) - 1 = \frac{\mathrm{e}-1}{1+(\mathrm{e}-1)x} - 1 = \frac{\mathrm{e}-1-1-(\mathrm{e}-1)x}{1+(\mathrm{e}-1)x},$$

c'est-à-dire

$$g'(x) = \frac{\mathrm{e}-2-(\mathrm{e}-1)x}{1+(\mathrm{e}-1)x}.$$

1. L'inéquation $f_1(x) \leqslant x$ est équivalente à l'inéquation $x(2x^2 - 3x + 1) \leqslant 0$. Les racines du polynôme du second degré sont $1/2$ et 1 et son coefficient dominant est positif, donc l'ensemble des solutions est bien l'ensemble $\{0\} \cup [1/2\,;1]$.

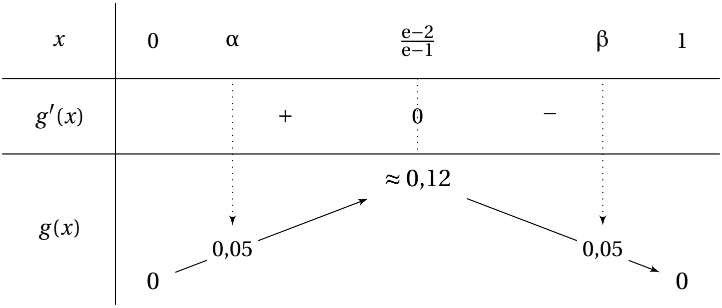


FIGURE 9 – *Tableau de variation de la fonction g*

b. Comme $e-1>0$, pour tout $x \in [0;1]$, $1+(e-1)x>0$. Le numérateur de g' est une fonction affine qui s'annule pour $x=\frac{e-2}{e-1}$. Nous en déduisons le tableau de variation de la fonction g (figure 9). Les images de g aux bornes de son intervalle de définition sont $g(0)=\ln 1=0$ et $g(1)=\ln e-1=0$. Elle admet un maximum en $\frac{e-2}{e-1}$ égal à

$$g\left(\frac{e-2}{e-1}\right)=\ln(1+e-2)-\frac{e-2}{e-1}=\ln(e-1)-\frac{e-2}{e-1}$$

dont l'arrondi au centième est 0,12.

c. La fonction g est continue et strictement monotone sur l'intervalle $\left[0;\frac{e-2}{e-1}\right]$, $g(0)<0{,}05$ et $g\left(\frac{e-2}{e-1}\right)>0{,}05$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $g(x)=0{,}05$ possède une unique solution α sur l'intervalle $\left[0;\frac{e-2}{e-1}\right]$.
De la même manière, on démontre que l'équation $g(x)=x$ possède exactement une solution β sur l'intervalle $\left[\frac{e-2}{e-1};1\right]$.

PARTIE B

1. Pour une fonction retouche f donnée, l'algorithme affiche le nombre des entiers $k \in \{0,1,\ldots,100\}$ tels que

$$\left|f\left(\frac{k}{100}\right)-\frac{k}{100}\right| \geqslant 0{,}05.$$

Autrement dit, l'algorithme affiche le nombre de nuances de gris, parmi les 101 nuances possibles, dont la transformation par la fonction retouche est visuellement perceptible.

2. Nous devons déterminer le nombre d'entiers de l'ensemble

$$\mathscr{E}=\left\{k\in\{0,1,\dots,100\}\ \middle|\ f_2\left(\frac{k}{100}\right)-\frac{k}{100}\geqslant 0{,}05\right\}.$$

Réécrivons $\mathscr{E}$ à l'aide de la fonction g :

$$k\in\mathscr{E}\iff\left|g\left(\frac{k}{100}\right)\right|\geqslant 0{,}05.$$

Comme la fonction g est à valeurs positives, il vient

$$k\in\mathscr{E}\iff g\left(\frac{k}{100}\right)\geqslant 0{,}05.$$

Compte tenu du sens de variation de la fonction g (figure 9 page précédente),

$$k\in\mathscr{E}\iff \alpha\leqslant\frac{k}{100}\leqslant\beta.$$

Sachant que $0{,}08<\alpha<0{,}09$ et $0{,}85<\beta<0{,}86$, il vient

$$k\in\mathscr{E}\iff 0{,}09\leqslant\frac{k}{100}\leqslant 0{,}85,$$

et enfin,

$$k\in\mathscr{E}\iff 9\leqslant k\leqslant 85.$$

Par conséquent, l'ensemble $\mathscr{E}$ contient $85-9+1=77$ entiers. L'algorithme appliqué à la fonction f_2 affichera donc 77.

PARTIE C

1. a. On a

$$\mathrm{A}_{f_3}=\int_0^1 x\mathrm{e}^{x^2-1}\,\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2-1}\right]_0^1=\frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-1})$$

b. et

$$\begin{aligned}\mathrm{A}_{f_4}&=\int_0^1 4x-15+\frac{60}{x+4}\,\mathrm{d}x\\&=\left[2x^2-15x+60\ln(x+4)\right]_0^1\\&=2-15+60\ln 5-60\ln 4\\&=60\ln\frac{5}{4}-13.\end{aligned}$$

2. Les arrondis $A_{f_3} \approx 0{,}32$ et $A_{f_4} \approx 0{,}39$ à 10^{-2} près nous permettent de conclure que la fonction f_3 éclaircit plus l'image que la fonction f_4.

Exercice 4

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.

1. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(1;-2;-5)$ et le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $(2;-1;-4)$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, en effet $1\times(-1) \neq (-2)\times 2$. Il s'ensuit que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. a. Comme les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, tout vecteur $\vec{u}$ satisfaisant
$$\vec{u}\cdot\overrightarrow{AB} = 0 \quad \text{et} \quad \vec{u}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$$
est un vecteur normal au plan (ABC). Comme le repère est orthonormé, le couple de réels (b, c) est solution du système
$$\begin{aligned} 1-2b-5c &= 0 \\ 2-b-4c &= 0 \end{aligned}$$
ou encore
$$2b+5c = 1 \tag{1}$$
$$b+4c = 2 \tag{2}$$
En faisant $(1) - 2\times(2)$, nous obtenons $-3c = -3$, d'où $c = 1$. L'équation (2), devient $b+4 = 2$, d'où $b = -2$.
Par conséquent, le vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées $(1;-2;1)$.

   b. Le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur normal au plan (ABC), donc une équation cartésienne du plan peut s'écrire
$$x-2y+z+d = 0,$$
où d est un réel à déterminer. Les coordonnées du point B doivent vérifier l'équation du plan (ABC). Cela donne
$$2-2\times 0+2+d = 0$$
d'où $d = -4$. Une équation cartésienne du plan (ABC) est donc
$$x-2y+z-4 = 0.$$

c. Le point D n'appartient pas au plan (ABC). En effet, ses coordonnées ne vérifient pas l'équation du plan (ABC) : $3-2\times(-6)+1-4=12\neq 0$.

3. a. Le vecteur $\vec{v}(2;-4;2)$ est un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}$ tel que $\vec{v}=2\vec{u}$, donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. Comme $\vec{u}$ est un vecteur normal du plan (ABC), il s'ensuit que la droite $\mathscr{D}$ est orthogonale au plan (ABC).

   b. Le paramètre du point H par rapport à l'équation de la droite $\mathscr{D}$ vérifie l'équation suivante

$$(2t+3)-2(-4t+5)+(2t-1)-4=0,$$

qui se simplifie en l'équation affine

$$12t-12=0$$

dont la solution est $t=1$. Par conséquent, le point H a pour coordonnées $(2\times1+3;-4\times1+5;2\times1-1)=(5;1;1)$.

4. Le vecteur $\vec{\mathrm{DE}}(1;-2;-5)$ est orthogonal au vecteur $\vec{u}$; en effet, $\vec{u}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DE}}=1\times1-2\times(-2)+1\times(-5)=0$. De plus, le vecteur $\vec{u}$ est orthogonal au plan (ABC) et le point D n'appartient pas au plan (ABC), donc la droite (DE) est strictement parallèle au plan (ABC).

Exercice 4

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité.

Partie A. Préliminaires

1. a. Soient deux entiers naturels $n\geqslant 2$ et $\mathrm{N}\geqslant 2$ tels que

$$n^2\equiv \mathrm{N}-1 \pmod{\mathrm{N}}.$$

Comme $\mathrm{N}-1\equiv -1 \pmod{\mathrm{N}}$, il vient

$$n^2\equiv -1 \pmod{\mathrm{N}}.$$

Élevons au carré les deux membres de l'égalité. Nous obtenons ainsi

$$n\times n^3\equiv 1 \pmod{\mathrm{N}}.$$

b. De $5^2 \equiv 26-1 \pmod{26}$, et de la question précédente, nous déduisons que $k_1 = 5^3$ vérifie la congruence $5k_1 \equiv 1 \pmod{26}$.

2. On a

$$6\mathrm{A} = 6 \times \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & 6 \\ 18 & 12 \end{pmatrix}$$

et

$$\mathrm{A}^2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 6 \\ 18 & 7 \end{pmatrix},$$

donc

$$6\mathrm{A} - \mathrm{A}^2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

3. De $6\mathrm{A} - \mathrm{A}^2 = 5\mathrm{I}$, nous obtenons les deux égalités

$$\mathrm{A}\frac{1}{5}(6\mathrm{I} - \mathrm{A}) = \mathrm{I} \quad \text{et} \quad \frac{1}{5}(6\mathrm{I} - \mathrm{A})\mathrm{A} = \mathrm{I}$$

qui prouvent que la matrice A est inversible et que

$$\mathrm{A}^{-1} = \frac{6}{5}\mathrm{I} - \frac{1}{5}\mathrm{A}.$$

4. Multiplions l'égalité précédente par 5. Nous obtenons

$$5\mathrm{A}^{-1} = 6\mathrm{I} - \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire $5\mathrm{A}^{-1} = \mathrm{B}$.

5. Supposons que

$$\mathrm{AX} = \mathrm{Y},$$

alors en multipliant à gauche les deux membres de l'équation par A^{-1} nous obtenons $\mathrm{X} = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{Y}$, puis $5\mathrm{X} = 5\mathrm{A}^{-1}\mathrm{Y}$, c'est-à-dire

$$5\mathrm{X} = \mathrm{BY}.$$

Partie B. Procédure de codage

Le mot « ET » est représenté par la matrice

$$X = \begin{pmatrix} 4 \\ 19 \end{pmatrix}.$$

Celle-ci se transforme en la matrice

$$Y = AX = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 \\ 50 \end{pmatrix},$$

dont la réduction modulo 26 donne la matrice

$$R = \begin{pmatrix} 9 \\ 24 \end{pmatrix}.$$

Cette dernière représente le mot « JY » qui code donc le mot « ET ».

Partie C. Procédure de décodage

1. Nous avons démontré que si $Y = AX$ alors $5X = BY$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} 5x_1 = 2y_1 - y_2 \\ 5x_2 = -3y_1 + 4y_2 \end{cases}$$

2. Multiplions les équations du système précédent par 21, dont nous savons (question A.1.b) que c'est un inverse de 5 modulo 26. Nous obtenons

$$\begin{cases} x_1 \equiv 42y_1 - 21y_2 \\ x_2 \equiv -63y_1 + 84y_2 \end{cases} \pmod{26}.$$

   Comme

$$\begin{aligned} 42 &\equiv 16 \pmod{26} & -21 &\equiv 5 \pmod{26} \\ -63 &\equiv 15 \pmod{26} & 84 &\equiv 6 \pmod{26}, \end{aligned}$$

   le système peut s'écrire

$$\begin{cases} x_1 \equiv 16y_1 + 5y_2 \\ x_2 \equiv 15y_1 + 6y_2 \end{cases} \pmod{26}.$$

3. Le mot « QP » est représenté par la matrice

$$R = \begin{pmatrix} 16 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

Les coefficients de la matrice Y vérifient le système

$$\begin{cases} y_1 \equiv 16 \\ y_2 \equiv 15 \end{cases} \pmod{26}.$$

À l'aide du système de la question précédente, nous obtenons

$$\begin{cases} x_1 \equiv 16 \times 16 + 5 \times 15 \equiv 331 \\ x_2 \equiv 15 \times 16 + 6 \times 15 \equiv 330 \end{cases} \pmod{26}.$$

Par conséquent,

$$X = \begin{pmatrix} 19 \\ 18 \end{pmatrix}.$$

Le décodage du mot « QP » est achevé : il s'agit du mot « TS ».

Sujet 5

Métropole

19 juin

ÉNONCÉ

Exercice 1 (5 points)
Commun à tous les candidats.

Exercice 2 (5 points)
Commun à tous les candidats.

Exercice 3 (5 points)
Commun à tous les candidats.

Exercice 4 (5 points)
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.

Exercice 4 (5 points)
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité.

CORRIGÉ

Exercice 1
Commun à tous les candidats.

Exercice 2
Commun à tous les candidats.

Exercice 3
Commun à tous les candidats.

Exercice 4
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.

Exercice 4
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité.