

Annales
de **mathématiques**
du baccalauréat scientifique

Édition 2017

Sujets & corrigés détaillés

Éric Guirbal

Éric GUIRBAL
Professeur indépendant de mathématiques
Toulouse
eric.guirbal@lecons-de-maths.fr
www.lecons-de-maths.fr

Ce document est disponible à l'adresse
http://www.lecons-de-maths.fr/ressources/cours-et-exercices#Annales_bac_s

Version du 31 août 2017



Ce document est distribué selon les termes de la licence Creative Commons Attribution -
Pas d'utilisation commerciale - Partage à l'identique 3.0 France.
<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/fr/>

Sommaire

Note liminaire	v
1 Pondichéry	1
Énoncé	1
Corrigé	11
2 Amérique du Nord	25
Énoncé	25
Corrigé	34
3 Liban	47
Énoncé	47
Corrigé	55
4 Centres étrangers	63
Énoncé	63
Corrigé	72
5 Polynésie	85
Énoncé	85
Corrigé	92
6 Antilles-Guyanne	101
Énoncé	101
Corrigé	108
7 Métropole	117
Énoncé	117
Corrigé	127

8	Asie	137
	Énoncé	137
	Corrigé	145

Note liminaire

Il est prévu deux versions de ce document: une pour la lecture sur écran et une autre pour l'impression papier. Seule la première est actuellement disponible.

J'accueille avec plaisir vos remarques et suggestions.

Éric GUIRBAL

Toulouse, le 31 août 2017

Sujet 1

Pondichéry

26 avril 2015

Exercice 1 (5 points)*Commun à tous les candidats**Les parties A, B et C peuvent être traitées de façon indépendante.*

Dans tout l'exercice, les résultats seront arrondis, si nécessaire, au millième.

La chocolaterie « Choc'o » fabrique des tablettes de chocolat noir, de 100 grammes, dont la teneur en cacao annoncée est de 85 %.

PARTIE A

À l'issue de la fabrication, la chocolaterie considère que certaines tablettes ne sont pas commercialisables: tablettes cassées, mal emballées, mal calibrées, etc.

La chocolaterie dispose de deux chaînes de fabrication:

- la chaîne A, lente, pour laquelle la probabilité qu'une tablette de chocolat soit commercialisable est égale à 0,98;
- la chaîne B, rapide, pour laquelle la probabilité qu'une tablette de chocolat soit commercialisable est 0,95.

À la fin de la journée de fabrication, on prélève au hasard une tablette et on note:

- A l'événement: « la tablette de chocolat provient de la chaîne de fabrication A »;
- C l'événement: « la tablette de chocolat est commercialisable ».

On note x la probabilité qu'une tablette de chocolat provienne de la chaîne A.

1. Montrer que $\mathbb{P}(C) = 0,03x + 0,95$.

2. À l'issue de la production, on constate que 96 % des tablettes sont commercialisables et on retient cette valeur pour modéliser la probabilité qu'une tablette soit commercialisable. Justifier que la probabilité que la tablette provienne de la chaîne B est deux fois égale à celle que la tablette provienne de la chaîne A.

PARTIE B

Une machine électronique mesure la teneur en cacao de la tablette de chocolat. Sa durée de vie, en années, peut être modélisée par une variable aléatoire Z suivant une loi exponentielle de paramètre λ .

1. La durée de vie de ce type de machine est de 5 ans. Déterminer le paramètre λ de la loi exponentielle.
2. Calculer $P(Z > 2)$.
3. Sachant que la machine de l'atelier a déjà fonctionné pendant 3 ans, quelle est la probabilité que sa durée de vie dépasse 5 ans ?

PARTIE C

On note X la variable aléatoire donnant la teneur en cacao, exprimée en pourcentage, d'une tablette de 100 g de chocolat commercialisable. On admet que X suit la loi normale d'espérance $\mu = 85$ et d'écart-type $\sigma = 2$.

1. Calculer $P(83 \leq X \leq 87)$. Quelle est la probabilité que la teneur en cacao soit différente de plus de 2 % du pourcentage annoncé sur l'emballage ?
2. Déterminer une valeur approchée au centième du réel a tel que

$$P(85 - a \leq X \leq 85 + a) = 0,9.$$

Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

3. La chocolaterie vend un lot de 10 000 tablette de chocolat à une enseigne de la grande distribution. Elle affirme au responsable achat de l'enseigne que, dans ce lot, 90 % des tablettes ont un pourcentage de cacao appartenant à l'intervalle $[81,7 ; 88,3]$. Afin de vérifier si cette affirmation n'est pas mensongère, le responsable achat fait prélever 550 tablettes au hasard dans le lot et constate que, sur cet échantillon, 80 ne répondent pas au critère. Au vu de l'échantillon prélevé, que peut-on conclure quant à l'affirmation de la chocolaterie ?

Exercice 2 (3 points)

Commun à tous les candidats

On munit le plan complexe d'une repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1. On considère l'équation

$$z^2 - 6z + c = 0 \quad (\text{E})$$

où c est un réel strictement supérieur à 9.

- a) Justifier que (E) admet deux solutions complexes non réelles.
 - b) Justifier que les solutions de (E) sont $z_A = 3 + i\sqrt{c-9}$ et $z_B = 3 - i\sqrt{c-9}$.
2. On note A et B les points d'affixes respectives z_A et z_B . Justifier que le triangle OAB est isocèle en O.
3. Démontrer qu'il existe une valeur du réel c pour laquelle le triangle OAB est rectangle et déterminer cette valeur.

Exercice 3 (4 points)

Commun à tous les candidats

Une entreprise spécialisée dans les travaux de construction a été mandatée pour percer un tunnel à flanc de montagne. Après étude géologique, l'entreprise représente dans le plan la situation de la façon suivante: dans un repère orthonormal, d'unité 2 m, la zone de creusement est la surface délimitée par l'axe des abscisses et la courbe C .

On admet que C est la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[-2,5; 2,5]$ par

$$f(x) = \ln(-2x^2 + 13,5).$$

L'objectif est de déterminer une valeur approchée, au mètre carré près, de l'aire de la zone de creusement.

PARTIE A. ÉTUDE DE LA FONCTION f

- 1. Calculer $f'(x)$ pour $x \in [-2,5; 2,5]$.
- 2. Dresser, en justifiant, le tableau de variation de la fonction f sur $[-2,5; 2,5]$.
En déduire le signe de f sur $[-2,5; 2,5]$.

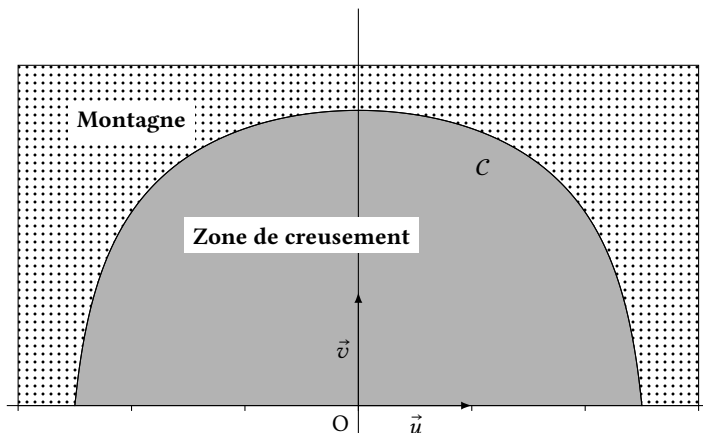


FIGURE 1

PARTIE B. AIRE DE LA ZONE DE CREUSEMENT

On admet que la courbe C est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées du repère.

1. La courbe C est-elle un arc de cercle de centre O ? Justifier la réponse.
2. Justifier que l'aire, en mètre carré, de la zone de creusement est

$$\mathcal{A} = 8 \int_0^{2,5} f(x) dx.$$

3. L'algorithme de la figure 2 page ci-contre permet de calculer une valeur approchée par défaut de $I = \int_0^{2,5} f(x) dx$, notée a . On admet que

$$a \leq I \leq a + \frac{f(0) - f(2,5)}{n} \times 2,5.$$

- a) La table 1 page 6 donne différentes valeurs obtenues pour R et S lors de l'exécution de l'algorithme pour $n = 50$. Compléter ce tableau en calculant les six valeurs manquantes.
- b) En déduire une valeur approchée, au mètre carré près, de l'aire de la zone de creusement.

Variables	R et S sont des réels n et k sont des entiers
Traitement	S prend la valeur 0 Demander la valeur de n Pour k variant de 1 à n faire R prend la valeur $\frac{2.5}{n} \times f\left(\frac{2.5}{n} \times k\right)$ S prend la valeur $S + R$ Fin Pour Afficher S

FIGURE 2

	A	B	C
1	rang n	terme u_n	terme v_n
2	0	1	1
3	1	5	2
4	2	12	4
5	3	25	8
6	4	50	16

FIGURE 3

Exercice 4 (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère deux suites (u_n) et (v_n) :

- la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = 2u_n - n + 3 ;$$

- la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n , par $v_n = 2^n$.

PARTIE A. CONJECTURES

Florent a calculé les premiers termes de ces deux suites à l'aide d'un tableur. Une copie d'écran est donnée figure 3.

Initialisation	S = 0, n = 50		
Boucle Pour	Étape k	R	S
	1		
	2	0,130 060	0,260 176
	3	0,129 968	0,390 144
	4	0,129 837	
	4	4	4
	24	0,118 137	3,025 705
	25	0,116 970	3,142 675
	4	4	4
	49	0,020 106	5,197 538
	50		
Affichage	S =		

TABLE 1 – Valeurs de R et S, arrondies à 10^{-6} , obtenues lors de l'exécution de l'algorithme pour $n = 50$.

1. Quelles formules ont été entrées dans les cellules B3 et C3 pour obtenir par copie vers le bas les termes des deux suites ?
2. Pour les termes de rang 10, 11, 12 et 13 Florent obtient les résultats de la figure 4 page suivante. Conjecturer les limites des suites (u_n) et $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$.

PARTIE B. ÉTUDE DE LA SUITE (u_n)

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a

$$u_n = 3 \times 2^n + n - 2.$$

2. Déterminer la limite de la suite (u_n) .
3. Déterminer le rang du premier terme de la suite supérieur à 1 million.

12	10	3080	1024
13	11	6153	2048
14	12	12298	4096
15	13	24587	8192

FIGURE 4

PARTIE C. ÉTUDE DE LA SUITE $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$

1. Démontrer que la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est décroissante à partir du rang 3.
2. On admet que, pour tout entier n supérieur ou égal 4, on a

$$0 < \frac{n}{2^n} \leq \frac{1}{n}.$$

Déterminer la limite de la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$.

Exercice 4 (5 points)

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On définit les suites (u_n) et (v_n) par $u_0 = v_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = 2u_n + 3v_n \quad \text{et} \quad v_{n+1} = 2u_n + v_n.$$

On admettra que les termes de ces suites sont des entiers naturels non nuls.

PARTIE A. CONJECTURES

Flore a calculé les premiers termes des suites à l'aide d'un tableur. Une copie d'écran est donnée figure 5 page suivante.

1. Quelles formules ont été entrées dans les cellules B3 et C3 pour obtenir par copie vers le bas les termes des deux suites ?
2. Soit n un entier naturel. Conjecturer la valeur de $\text{pgcd}(u_n, v_n)$. Aucune justification n'est demandée.
3. Pour les termes de rang 10, 11 et 13 Flore obtient les résultats de la figure 6 page suivante. Elle émet la conjecture « la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ converge ». Qu'en penser ?

	A	B	C
1	rang n	terme u_n	terme v_n
2	0	1	1
3	1	5	3
4	2	19	13
5	3	77	51
6	4	307	205

FIGURE 5

12	10	1258291	838861
13	11	5033165	3355443
14	12	20132659	13421773
15	13	80530637	53687091

FIGURE 6

PARTIE B. ÉTUDE ARITHMÉTIQUE

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a

$$2u_n - 3v_n = (-1)^{n+1}.$$

2. Soit n un entier naturel. Déduire de la question précédente la valeur de $\text{pgcd}(u_n, v_n)$.

PARTIE C. ÉTUDE MATRICIELLE

Pour tout entier naturel n , on définit:

- la matrice colonne

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix};$$

- les matrices carrées

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q_n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 3 \times 2^n \\ (-1)^{n+1} & 2^{2n+1} \end{pmatrix}.$$

1. a) Montrer que la matrice

$$\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

est l'inverse de P .

- b) On admet que, pour tout entier naturel n , on a $X_n = Q_n P^{-1} X_0$. Démontrer que, pour tout entier naturel n , on a

$$\begin{cases} u_n = \frac{(-1)^{n+1} + 3 \times 2^{2n+1}}{5} \\ v_n = \frac{(-1)^n + 2^{2n+2}}{5}. \end{cases}$$

2. a) Vérifier que, pour tout entier naturel n , on a

$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{\frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n+1}} + 3}{\frac{(-1)^n}{2^{2n+1}} + 2}.$$

- b) En déduire la limite de la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$.

Exercice 5 (3 points)

Commun à tous les candidats

On considère le cube ABCDEFGH de la figure 7.

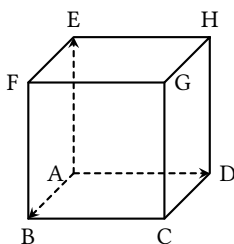


FIGURE 7

L'espace est rapporté au repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$. On note $\mathcal{P}$ le plan d'équation

$$x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{3}z - 1 = 0.$$

Construire la section du cube par le plan $\mathcal{P}$. La construction devra être justifiée par des calculs ou des arguments géométriques.



Exercice 1*Commun à tous les candidats***PARTIE A**

1. Si $0 < x < 1$, alors $\{A, \bar{A}\}$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles, nous pouvons donc appliquer la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(C) &= P(A) \times P_A(C) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(C) \\ &= 0,98x + 0,95(1 - x) \\ &= 0,03x + 0,95. \end{aligned}$$

Si $x = 0$ (resp. $x = 1$), alors toutes les tablettes proviennent de la chaîne B (resp. chaîne A) donc $P(C) = 0,95$ (resp. $P(C) = 0,98$). Finalement, la formule

$$P(C) = 0,03x + 0,95$$

est bien valable pour tout réel x tel que $0 \leq x \leq 1$.

Remarque. Les manuels et les enseignants énoncent généralement la formule des probabilités totales ainsi :

Soit $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ un système complet d'événements de probabilités non nulles d'un univers Ω . Alors pour tout événement $E \subset \Omega$, on a

$$P(E) = \sum_{i=1}^n P_{A_i}(E) \times P(A_i).$$

Notez l'hypothèse $P(A_i) \neq 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, sans laquelle les probabilités conditionnelles de la formule ne seraient pas définies. S'il est possible de se passer de cette hypothèse en adoptant la convention $P_{A_i}(E) = 0$ lorsque $P(A_i) = 0$, nous avons dû distinguer les cas $0 < x < 1$ et $x \in \{0, 1\}$ afin de respecter l'énoncé ci-dessus.

2. Puisque $P(C) = 0,96$ et compte tenu de la formule établie à la question précédente, le nombre x est solution de l'équation

$$0,96 = 0,03x + 0,95,$$

donc

$$x = \frac{0,96 - 0,95}{0,03} = \frac{1}{3}.$$

Il s'ensuit que $P(A) = 1/3$ et $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 1/3 = 2/3$. En d'autres termes, la probabilité qu'une tablette provienne de la chaîne B est égale à deux fois celle qu'elle provienne de la chaîne A.

PARTIE B

1. L'espérance de la variable aléatoire Z est $1/\lambda = 5$, donc $\lambda = 1/5$.
2. $P(Z > 2) = 1 - P(Z \leq 2) = e^{-2\lambda} = e^{-2/5} \approx 0,670$.
3. La loi exponentielle est une loi sans vieillissement, donc la probabilité pour que la durée de vie de la machine dépasse 5 ans sachant qu'elle a déjà fonctionné pendant 3 ans est égale à la probabilité (non conditionnelle) pour que la machine fonctionne plus de 2 ans, ainsi $P(Z > 2) \approx 0,670$.

PARTIE C

1. À l'aide de la calculatrice, on trouve $P(83 \leq X \leq 87) \approx 0,683$.

Remarque. On pouvait aussi remarquer que $P(83 \leq X \leq 87) = P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma)$.

L'événement « la teneur en cacao est différente de plus de 2 % du pourcentage annoncé sur l'emballage » est le complémentaire de l'événement

$$\{85 \times (1 - 2/100) \leq X \leq 85 \times (1 + 2/100)\} = \{83,3 \leq X \leq 86,7\},$$

donc sa probabilité est égale à

$$1 - P(83,3 \leq X \leq 86,7) \approx 0,395.$$

Remarque. Il est fort probable que la question prévue par l'auteur était « Quelle est la probabilité que la teneur en cacao soit différente de plus de 2 points du pourcentage annoncé sur l'emballage ? ». En effet, la réponse à cette question est $1 - P(83 \leq X \leq 87)$.

2. On a

$$P(85 - a \leq X \leq 85 + a) = 1 - (P(X < 85 - a) + P(X > 85 + a)).$$

Or $P(X < 85 - a) = P(X > 85 + a)$, donc

$$P(85 - a \leq X \leq 85 + a) = 1 - 2P(X < 85 - a) = 1 - 2P(X \leq 85 - a).$$

Il s'ensuit que $\mathbb{P}(85 - a \leq X \leq 85 + a) = 0,9$ si et seulement si

$$\mathbb{P}(X \leq 85 - a) = \frac{1 - 0,9}{2} = 0,05.$$

À l'aide d'une calculatrice nous obtenons $85 - a \approx 81,71029$, d'où $a \approx 3,28$. Nous en déduisons que 90 % des tablettes de chocolat ont une teneur en cacao qui ne s'écarte pas plus de 3,28 points de la teneur annoncée sur l'emballage.

3. Testons l'hypothèse suivante : « Dans le lot de 10 000 tablettes de chocolat, la proportion, notée p , des tablettes ayant un pourcentage de cacao appartenant à l'intervalle $[81,7 ; 88,3]$ est égale à 90 %. » Soit $n = 550$ la taille de l'échantillon. Puisque $n \geq 30$, $np = 550 \times 0,9 = 495 \geq 5$ et $n(1-p) = 550 \times (1-0,9) = 55 \geq 5$, l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % est égale à

$$\begin{aligned} & \left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} ; p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right] \\ &= \left[0,9 - 1,96\sqrt{\frac{0,9 \times (1-0,9)}{550}} ; 0,9 + 1,96\sqrt{\frac{0,9 \times (1-0,9)}{550}} \right] \\ &\approx [0,874 ; 0,926], \end{aligned}$$

où nous avons arrondi par défaut la borne inférieure et arrondi par excès la borne supérieure. La fréquence de tablettes conformes de l'échantillon, égale à $(550 - 80)/550 \approx 0,855$, n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation asymptotique, nous devons donc rejeter l'hypothèse avec un risque d'erreur de 5 % : l'affirmation de la chocolaterie est probablement mensongère.

Exercice 2

Commun à tous les candidats

1. a) Le polynôme du second degré $z^2 - 6z + c$ a pour discriminant $(-6)^2 - 4c = 4(9 - c)$. Comme $c > 9$, celui-ci est strictement négatif, donc l'équation admet deux solutions complexes non réelles.
- b) Les solutions de l'équation (E) sont

$$z_A = \frac{-(-6) + i\sqrt{-4(9-c)}}{2 \times 1} = 3 + i\sqrt{c-9} \quad \text{et} \quad z_B = \overline{z_A} = 3 - i\sqrt{c-9}.$$

2. Nous savons que $OA^2 = z_A \overline{z_A}$ et $OB^2 = z_B \overline{z_B}$, or $z_A = \overline{z_B}$, donc $OA^2 = OB^2$, ce qui démontre que le triangle OAB est isocèle en O.
3. La somme des angles dans un triangle étant égale 180° , nous avons $\hat{A} + \hat{B} < 180^\circ$. De plus, le triangle OAB est isocèle en O, donc $\hat{A} = \hat{B} < 90^\circ$. Par conséquent, le triangle OAB ne peut être rectangle qu'en O, donc d'après le théorème de Pythagore et sa réciproque, le triangle OAB est rectangle si et seulement si $AB^2 = OA^2 + OB^2$. Or dans le repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on a $AB^2 = (2\sqrt{c-9})^2 = 4(c-9)$ et $OA^2 + OB^2 = 2OA^2 = 2(3^2 + (\sqrt{c-9})^2) = 2c$, donc OAB est rectangle si et seulement si $4(c-9) = 2c$, soit $c = 18$.

Exercice 3

Commun à tous les candidats

PARTIE A. ÉTUDE DE LA FONCTION f

1. La fonction f est de la forme $f = \ln(u)$ où u est la fonction dérivable définie sur $[-2,5; 2,5]$ par $u(x) = -2x^2 + 13,5$, donc f est dérivable sur son ensemble de définition et pour tout réel $x \in [-2,5; 2,5]$, on a

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{-4x}{-2x^2 + 13,5}$$

ou mieux,

$$f'(x) = \frac{4x}{2x^2 - 13,5}.$$

2. Les racines du polynôme du second degré $2x^2 - 13,5$ sont $-\sqrt{6,75} < -2,5$ et $\sqrt{6,75} > 2,5$, et son coefficient dominant est positif, donc $2x^2 - 13,5 < 0$ sur $[-2,5; 2,5]$. Le signe de $4x$ est celui-ci de x . Nous en déduisons que le signe de $f'(x)$ est l'opposé de celui de x , d'où le tableau de variation figure 8 page suivante. Notons que $f(-2,5) = f(2,5) = \ln 1 = 0$. Le tableau de variation permet alors de conclure que la fonction f est positive sur son ensemble de définition.

PARTIE B. AIRE DE LA ZONE DE CREUSEMENT

1. Soient $A(2,5; 0)$ et $B(0; \ln(13,5))$ des points d'intersection de la courbe C avec l'axe des abscisses et des ordonnées respectivement. On trouve que $OA = 2,5$

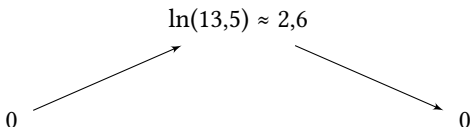
x	-2,5	0	2,5
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$\ln(13,5) \approx 2,6$ 		

FIGURE 8 – Tableau de variation de la fonction f .

et $OB = \ln(13,5) \approx 2,603$. Comme $OA \neq OB$, la courbe C n'est pas un arc de cercle de centre O .

2. La zone de creusement est la région du plan délimitée par la courbe représentative de la fonction continue et positive f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -2,5$ et $x = 2,5$, donc son aire, exprimée en unités d'aire, est

$$\int_{-2,5}^{2,5} f(x) dx.$$

La relation de Chasles,

$$\int_{-2,5}^{2,5} f(x) dx = \int_{-2,5}^0 f(x) dx + \int_0^{2,5} f(x) dx$$

et la symétrie de la courbe C par rapport à l'axe des ordonnées,

$$\int_{-2,5}^0 f(x) dx = \int_0^{2,5} f(x) dx,$$

impliquent que

$$\int_{-2,5}^{2,5} f(x) dx = 2 \int_0^{2,5} f(x) dx.$$

Enfin, l'unité de longueur est 2 m, donc l'unité d'aire est 4 m^2 , si bien que l'aire de la zone de creusement, en mètre carré, est

$$\mathcal{A} = 8 \int_0^{2,5} f(x) dx.$$

Initialisation	S = 0, n = 50		
Boucle Pour	Étape k	R	S
	1	0,130 116	0,130 116
	2	0,130 060	0,260 176
	3	0,129 968	0,390 144
	4	0,129 837	0,519 981
	4	4	4
	24	0,118 137	3,025 705
	25	0,116 970	3,142 675
	4	4	4
	49	0,020 106	5,197 538
	50	0,000 000	5,197 538
Affichage	S = 5,197 538		

TABLE 2 – Valeurs de R et S, arrondies à 10^{-6} , obtenues lors de l'exécution de l'algorithme pour $n = 50$.

3. a) Les valeurs manquantes ont été obtenues de la façon suivante :

Étape 1. Les variables R et S ont pour valeur $\frac{2,5}{50}f\left(\frac{2,5}{50}\right)$.

Étape 4. La variable S est la somme de sa valeur calculée à l'étape 3 et de la valeur courante de R.

Étape 50. La variable R a pour valeur $\frac{2,5}{50}f(2,5) = 0$ et S

Voir table 2 le tableau complété.

b) Appliquons la double inégalité de l'énoncé avec $n = 50$. Nous obtenons

$$a \leq I \leq a + \frac{\ln 13,5}{20}.$$

Le résultat de la question B.2 nous permet d'en déduire un encadrement de l'aire de la zone de creusement,

$$8a \leq \mathcal{A} \leq 8a + \frac{2 \ln 13,5}{5},$$

qui devient, en utilisant l'approximation de a fournie par l'algorithme,

$$41,58 \leq \mathcal{A} \leq 42,63.$$

La zone de creusement a , au mètre carré près, une aire égale à 42 m^2 .

Exercice 4

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

PARTIE A. CONJECTURES

1. La cellule B3 contient la formule $=2*B2-A2+3$ et la cellule C3 contient la formule $=2^{\wedge}A3$.

Remarque. L'adressage relatif n'est nécessaire que sur les lignes, on peut donc utiliser les formules $=2*\$B2-\$A2+3$ et $=2^{\wedge}\$A3$ dans les cellules B3 et C3 respectivement.

2. À partir des données du tableau, nous émettons la conjecture suivante :

Conjecture. La suite (u_n) tend vers $+\infty$ et la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ converge vers 3.

PARTIE B. ÉTUDE DE LA SUITE

1. Démontrons par récurrence que la proposition

$$\mathcal{P}(n) = \ll u_n = 3 \times 2^n + n - 2 \gg$$

est vraie pour tout entier $n \geq 0$.

Initialisation. En substituant $n = 0$ dans l'expression $3 \times 2^n + n - 2$, nous trouvons $3 \times 2^0 + 0 - 2 = 1$, or $u_0 = 1$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Fixons $k \in \mathbb{N}$ et supposons $\mathcal{P}(k)$ vraie. D'après la définition de la suite (u_n) , on a

$$u_{k+1} = 2u_k - k + 3.$$

Appliquons l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= 2(3 \times 2^k + k - 2) - k + 3 \\ &= 3 \times 2^{k+1} + (k + 1) - 2. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que $\mathcal{P}(k + 1)$ est vraie.

Conclusion. Le principe de récurrence nous permet de conclure que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 0$, c'est-à-dire que $u_n = 3 \times 2^n + n - 2$ pour tout entier $n \geq 0$.

2. Déterminons la limite de la suite (u_n) en utilisant l'expression de son terme général que nous venons d'établir. On $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$ car $2 > 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3 \times 2^n = +\infty$. On a aussi $\lim_{n \rightarrow +\infty} n - 2 = +\infty$. Nous en déduisons que la suite (u_n) tend vers $+\infty$.
3. Le résultat de la question précédente assure que l'inéquation $u_n \geq 10^6$ admet une infinité de solutions dans $\mathbb{N}$. Déterminons la plus petite de ces solutions. D'après la question B.1, l'inéquation $u_n \geq 10^6$ est équivalente à l'inéquation

$$3 \times 2^n + n - 2 > 10^6.$$

Ne sachant pas résoudre algébriquement ce type d'équation, nous allons procéder par « tâtonnement ». Remarquons que la suite de terme général $3 \times 2^n + n - 2$ est croissante sur $\mathbb{N}$, nous pouvons donc procéder par dichotomie. On vérifie que $u_{18} = 786\,448$ et $u_{19} = 1\,572\,881$, il s'ensuit que le premier terme de la suite supérieur à 1 000 000 est celui de rang 19.

Remarque. Notons N la solution. Clairement $N > 6$, or pour $n \geq 8$, le terme $n - 2$ est positif et petit comparée à 2^n . Par conséquent, le plus petit entier N' solution de l'inéquation

$$3 \times 2^n > 10^6$$

est un majorant très proche de N . Déterminons N' . Comme la fonction $\ln$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, nous avons

$$\ln(3 \times 2^n) > \ln 10^6,$$

soit

$$\ln 3 + n \ln 2 > \ln 10^6$$

d'où

$$n > \frac{\ln(10^6/3)}{\ln 2} \approx 18,35,$$

donc $N' = 19$. Comme $u_{18} \leq 10^6$ et $u_{19} > 10^6$, nous concluons que $N = 19$.

PARTIE C. ÉTUDE DE LA SUITE $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$

1. Soit $n \geq 3$. Remarquons que la suite (v_n) vérifie la relation de récurrence $v_{n+1} = 2v_n$. À l'aide de la définition par récurrence de la suite (u_n) , nous avons

$$\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} = \frac{2u_n - n + 3}{2v_n} = \frac{u_n}{v_n} - \frac{n-3}{2^{n+1}},$$

où $(n-3)/2^{n+1} \geq 0$, d'où l'inégalité

$$\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leq \frac{u_n}{v_n}$$

qui prouve que la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est décroissante à partir du rang 3.

Solution alternative. La solution que je propose ici est plus compliquée, mais aussi très instructive. À l'aide du terme général de la suite (u_n) , nous obtenons

$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{3 \times 2^n + n - 2}{2^n} = 3 + \frac{n-2}{2^n}.$$

Introduisons la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = 3 + (x-2)/2^x$. Cette fonction est dérivable et pour tout réel $x \geq 0$, on a

$$f'(x) = \frac{2^x - (x-2)2^x \ln 2}{(2^x)^2} = \frac{-x \ln 2 + 1 + 2 \ln 2}{2^x}.$$

Si $x \geq 0$ alors $2^x > 0$. De plus $-x \ln 2 + 1 + 2 \ln 2 \leq 0$ si et seulement si $x \geq 1/\ln 2 + 2 \approx 3,4$. Ainsi la fonction dérivée f' est négative sur $[1/\ln 2 + 2; +\infty[$, par suite la fonction f est décroissante sur $[1/\ln 2 + 2; +\infty[$ prouvant ainsi que la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est décroissante à partir du rang 4. À l'aide du tableau des premières valeurs nous constatons que $u_3/v_3 = u_4/v_4$, donc la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est décroissante à partir du rang 3.

Exercice 4

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

PARTIE A. CONJECTURES

1. La cellule B3 contient la formule $=2*B2+3*C2$ et la cellule C3 contient la formule $=2*B2+C2$.

Remarque. À la place d'un adressage relatif dans les deux directions, il est également possible d'utiliser un adresse absolu sur les colonnes, ce qui donne les formules $=2*\$B2+3*\$C2$ et $=2*\$B2+\$C2$ dans les cellules B3 et C3 respectivement. L'adressage relatif sur les lignes est lui indispensable.

2. La table des premières valeurs des suites (u_n) et (v_n) suggère la conjecture suivante :

Conjecture. Pour tout entier $n \geq 1$, on a $\text{pgcd}(u_n, v_n) = 1$.

3. À partir des données des deux tableaux, il semble que la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ converge vers $\frac{1}{2}$.

PARTIE B. ÉTUDE ARITHMÉTIQUE

1. Démontrons par récurrence que $2u_n - 3v_n = (-1)^{n+1}$ pour tout entier $n \geq 0$.
Initialisation. On a $2u_0 - 3v_0 = 2 - 3 = -1 = (-1)^{0+1}$, donc l'égalité est vraie pour $n = 0$.

Hérédité. Supposons l'égalité vraie pour $n = k \geq 0$, c'est-à-dire

$$2u_k - 3v_k = (-1)^{k+1}.$$

Nous devons en déduire que l'égalité est alors vraie pour $n = k+1$, c'est-à-dire

$$2u_{k+1} - 3v_{k+1} = (-1)^{k+2}.$$

À l'aide des définitions des suites (u_n) et (v_n) , nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} 2u_{k+1} - 3v_{k+1} &= 2(2u_k + 3v_k) - 3(2u_k + v_k) \\ &= -2u_k + 3v_k \\ &= -(2u_k - 3v_k). \end{aligned}$$

Il ne nous reste plus qu'à invoquer l'hypothèse de récurrence :

$$2u_{k+1} - 3v_{k+1} = -(-1)^{k+1} = (-1)^{k+2}.$$

Conclusion. Le principe de récurrence nous permet de conclure que l'on a $2u_n - 3v_n = (-1)^{n+1}$ pour tout entier $n \geq 0$.

2. Soient un entier $n \geq 0$ et $d > 0$ un diviseur de u_n et v_n . Alors d divise $2u_n$ et $3v_n$, donc d divise leur différence $2u_n - 3v_n = (-1)^{n+1} \in \{-1, 1\}$. Nous en déduisons que $d = 1$, c'est-à-dire $\text{pgcd}(u_n, v_n) = 1$.

Solution alternative. Soit un entier $n \geq 0$. D'après un corollaire du théorème de Bézout, l'égalité $2u_n - 3v_n = (-1)^{n+1}$ implique que $\text{pgcd}(u_n, v_n)$ est un diviseur de $(-1)^{n+1} \in \{-1, 1\}$. Étant donné que $\text{pgcd}(u_n, v_n) > 0$, nous en déduisons que $\text{pgcd}(u_n, v_n) = 1$.

Solution alternative. Soit un entier $n \geq 0$. Nous avons démontré que $2u_n - 3v_n = (-1)^{n+1}$. Il s'ensuit que $3v_n - 2u_n = 1$ si n est pair, et $2u_n - 3v_n = 1$ si n est impair. Le théorème de Bézout nous permet de conclure que $\text{pgcd}(u_n, v_n) = 1$.

PARTIE C. ÉTUDE MATRICIELLE

1. a) Calculons :

$$\begin{aligned} \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} P &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 \times 1 + (-3) \times (-1) & 2 \times 3 + (-3) \times 2 \\ 1 \times 1 + 1 \times (-1) & 1 \times 3 + 1 \times 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \\ &= I, \end{aligned}$$

de même,

$$P \times \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = I,$$

ce qui prouve que

$$P^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Pour tout entier $n \geq 0$, on a

$$\begin{aligned}
 X_n &= Q_n P^{-1} X_n \\
 &= \begin{pmatrix} (-1)^n & 3 \times 2^{2n} \\ (-1)^{n+1} & 2^{2n+1} \end{pmatrix} \times \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} (-1)^n & 3 \times 2^{2n} \\ (-1)^{n+1} & 2^{2n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} (-1)^{n+1} + 3 \times 2^{2n+1} \\ (-1)^n + 2^{2n+2} \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{cases} u_n = \frac{(-1)^{n+1} + 3 \times 2^{2n+1}}{5} \\ v_n = \frac{(-1)^n + 2^{2n+2}}{5}. \end{cases}$$

2. Pour tout entier $n \geq 0$, on a

$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{(-1)^{n+1} + 3 \times 2^{2n+1}}{(-1)^n + 2^{2n+2}}.$$

Divisons le numérateur et le dénominateur par 2^{2n+1} . Nous obtenons ainsi

$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{\frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n+1}} + 3}{\frac{(-1)^n}{2^{2n+1}} + 2}.$$

3. Pour tout entier $n \geq 0$, on a

$$\left| \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n+1}} \right| = \left| \frac{(-1)^n}{2^{2n+1}} \right| = \frac{1}{2^{2n+1}}$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^{2n+1}} = 0 \quad \text{car} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{2n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty,$$

par conséquent

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n+1}} = 0,$$

et nous concluons que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{3}{2}.$$

Remarque. Si vous n'êtes pas familier avec les valeurs absolues, vous pouvez démontrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^{n+1}/2^{2n+1} = 0$ en écrivant l'encadrement $-1/2^{2n+1} \leq (-1)^{n+1}/2^{2n+1} \leq 1/2^{2n+1}$ et en invoquant le théorème des gendarmes.

Exercice 5

Commun à tous les candidats

Le vecteur $\vec{n}(1, 1/2, 1/3)$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$. Il n'est normal à aucun des vecteurs $\vec{AB}(1, 0, 0)$, $\vec{AD}(0, 1, 0)$ et $\vec{AE}(0, 0, 1)$, donc le plan $\mathcal{P}$ coupe les trois axes du repère. Déterminons les coordonnées des trois points d'intersection.

L'axe des abscisses (AB) est l'ensemble des points de l'espace de coordonnées (x, y, z) tels que $y = 0$ et $z = 0$. Après substitution dans l'équation du plan, nous trouvons $x = 1$, donc l'intersection du plan $\mathcal{P}$ avec la droite (AB) est le point B(1, 0, 0). De la même manière, nous trouvons les autres points d'intersection : celui avec l'axe des ordonnées (AD) est I(0, 2, 0) et celui avec l'axe des cotes (AE) est J(0, 0, 3).

Les vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{AI}$ et $\vec{AJ}$ sont colinéaires aux vecteurs du repère $\vec{AB}$, $\vec{AD}$ et $\vec{AE}$ respectivement, donc les points B, I et J du plan $\mathcal{P}$ ne sont pas alignés. Nous en déduisons que le plan $\mathcal{P}$ est le plan (BIJ). Représentons-le sur la figure 9 page suivante.

Notons L l'intersection de la droite (BJ) avec la droite (EF) et K l'intersection de la droite (BI) avec la droite (CD). Les segments [BL] et [BK] sont les intersections du plan $\mathcal{P}$ avec les faces ABFE et ABCD du cube. Comme les faces EFGH et ABCD sont parallèles, l'intersection du plan $\mathcal{P}$ avec la face EFGH est le segment [LM] où M est le point d'intersection de droite (GH) et de la droite passant par L et parallèle à la droite (BK). L'intersection du plan $\mathcal{P}$ avec la face CDHG est le segment [KH].

La section du cube par le plan $\mathcal{P}$ est la région de l'espace délimitée par le parallélogramme BLMK.

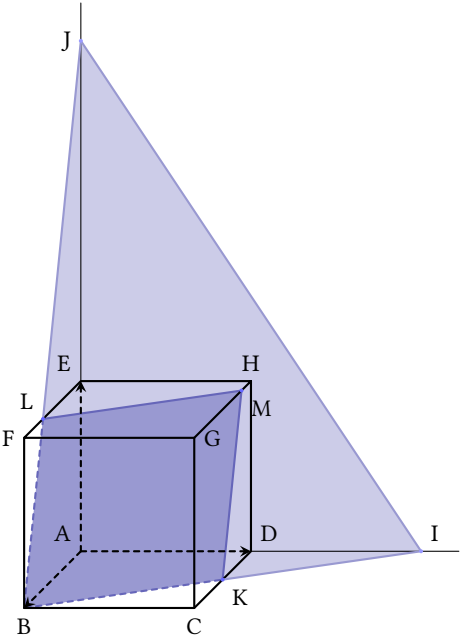


FIGURE 9 – Section du cube ABCDEFGH par le plan $\mathcal{P}$.



Sujet 2

Amérique du Nord

2 juin 2017

Exercice 1 (5 points)*Commun à tous les candidats*

*Dans tout l'exercice, les valeurs seront, si nécessaire, approchées au millième.
Les parties A et B sont indépendantes.*

PARTIE A

Dans le cadre de son activité, une entreprise reçoit régulièrement des demandes de devis. Les montants de ces devis sont calculés par son secrétariat. Une étude statistique sur l'année écoulée conduit à modéliser le montant des devis par une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 2900$ euros et d'écart-type $\sigma = 1250$ euros.

1. Si on choisit au hasard une demande de devis reçue par l'entreprise, quelle est la probabilité que le montant du devis soit supérieur à 4000 euros ?
2. Afin d'améliorer la rentabilité de son activité, l'entrepreneur décide de ne pas donner suite à 10 % des demandes. Il écarte celles dont le montant de devis est le moins élevé. Quel doit être le montant minimum d'un devis demandé pour que celui-ci soit pris en compte ? Donner ce montant à l'euro près.

PARTIE B

Ce même entrepreneur décide d'installer un logiciel anti-spam. Ce logiciel détecte les messages indésirables appelés spams (messages malveillants, publicités, etc.) et les déplace dans un fichier appelé « dossier spam ». Le fabricant affirme que 95 % des spams sont déplacés. De son côté, l'entrepreneur sait que 60 % des messages qu'il reçoit sont des spams. Après installation du logiciel, il constate que 58,6 % des messages sont déplacés dans le dossier spam. Pour un message pris au hasard, on considère les événements suivants :

- D : « le message est déplacé » ;
- S : « le message est un spam ».

1. Calculer $P(S \cap D)$.
2. On choisit au hasard un message qui n'est pas un spam. Montrer que la probabilité qu'il soit déplacé est égale à 0,04.
3. On choisit au hasard un message non déplacé. Quelle est la probabilité que ce message soit un spam ?
4. Pour le logiciel choisi par l'entreprise, le fabricant estime que 2,7 % des messages déplacés vers le dossier spam sont des messages fiables. Afin de tester l'efficacité du logiciel, le secrétariat prend la peine de compter le nombre de messages fiables parmi les messages déplacés. Il trouve 13 messages fiables parmi les 231 messages déplacés pendant une semaine.
Ces résultats remettent-ils en cause l'affirmation du fabricant ?

Exercice 2 (5 points)

Commun à tous les candidats

Un fabricant doit réaliser un portail en bois plein sur mesure pour un particulier. L'ouverture du mur d'enceinte (non encore construit) ne peut excéder 4 mètres de large. Le portail est constitué de deux vantaux de largeur a telle que $0 < a \leq 2$.

Dans le modèle choisi, le portail fermé à la forme illustré sur la figure 1a page ci-contre. Les côtés [AD] et [BC] sont perpendiculaires au seuil [CD] du portail. Entre les points A et B, le haut des vantaux a la forme d'une portion de courbe. Cette portion de courbe est une partie de la représentation graphique de la fonction f définie sur $[-2; 2]$ par

$$f(x) = -\frac{b}{8} \left(e^{\frac{x}{b}} + e^{-\frac{x}{b}} \right) + \frac{9}{4}$$

où $b > 0$. Le repère est choisi de façon que les points A, B, C et D aient pour coordonnées respectives $(-a; f(-a))$, $(a; f(a))$, $(a; 0)$ et $(-a; 0)$ et on note S le sommet de la courbe de f , comme illustré sur la figure 1b page suivante.

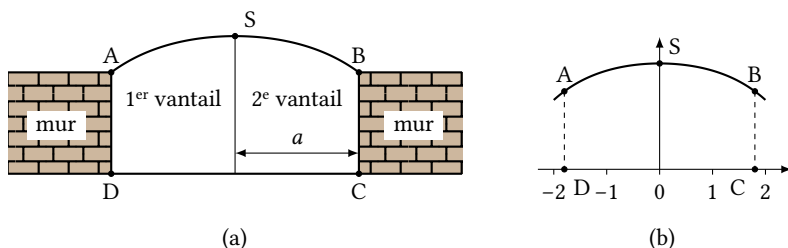


FIGURE 1

PARTIE A

1. Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[-2; 2]$, $f(-x) = f(x)$. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de la fonction f ?
2. On appelle f' la fonction dérivée de la fonction f . Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[-2; 2]$:

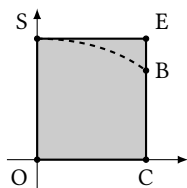
$$f'(x) = -\frac{1}{8} \left(e^{\frac{x}{b}} - e^{-\frac{x}{b}} \right).$$

3. Dresser la tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[-2; 2]$ et en déduire les coordonnées du point S en fonction de b .

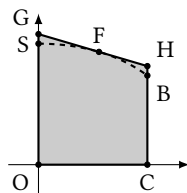
PARTIE B

La hauteur du mur est de 1,5 m. On souhaite que le point S soit à 2 m du sol. On cherche alors les valeurs de a et b .

1. Justifier que $b = 1$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = 1,5$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0; 2]$ et en déduire une valeur approchée de a au centième.
3. Dans cette question, on choisit $a = 1,8$ et $b = 1$. Le client décide d'automatiser son portail si la masse d'un vantail excède 60 kg. La densité des planches de bois utilisées pour la fabrication des vantaux est égale à $20 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2}$. Que décide le client?



(a) Forme 1 : découpe dans un rectangle



(b) Forme 2 : découpe dans un trapèze

FIGURE 2

PARTIE C

On conserve les valeurs de $a = 1,8$ et $b = 1$.

Pour découper les vantaux, le fabricant prédécoupe des planches. Il a le choix entre deux formes de planches prédécoupées : soit un rectangle OCES, soit un trapèze OCHG comme dans les schémas de la figure 2. Dans la deuxième méthode, la droite (GH) est la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point F d'abscisse 1.

La forme 1 est la plus simple, mais visuellement la forme 2 semble plus économique. Évaluer l'économie réalisée en termes de surface de bois en choisissant la forme 2 plutôt que la forme 1.

On rappelle la formule donnant l'aire d'un trapèze. En notant b et B respectivement les longueurs de la petite base et de la grande base du trapèze (côtés parallèles) et h la hauteur du trapèze :

$$\text{Aire} = \frac{b + B}{2} \times h.$$

Exercice 3 (5 points)

Commun à tous les candidats

Le but de l'exercice est d'étudier les suites de termes positifs dont le premier terme u_0 est strictement supérieur à 1 et possédant la propriété suivante : pour tout entier naturel $n > 0$, la somme des n premiers termes consécutifs est égale au produit des n premiers termes consécutifs. On admet qu'une telle suite existe et on la note (u_n) . Elle vérifie donc les trois propriétés suivantes :

Entrée	Saisir n Saisir u
Traitement	s prend la valeur u Pour i variant de 1 à n : u prend la valeur s prend la valeur Fin Pour
Sortie	Afficher u

FIGURE 3

- $u_0 > 0$;
 - pour tout $n \geq 0$, $u_n \geq 0$;
 - pour tout $n > 0$, $u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} = u_0 \times u_1 \times \cdots \times u_{n-1}$.
1. On choisit $u_0 = 3$. Déterminer u_1 et u_2 .
 2. Pour tout entier $n > 0$, on note $s_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} = u_0 \times u_1 \times \cdots \times u_{n-1}$.
On a en particulier $s_1 = u_0$.
 - a) Vérifier que pour tout entier $n > 0$, $s_{n+1} = s_n + u_n$ et $s_n > 1$.
 - b) En déduire que pour tout entier $n > 0$,

$$u_n = \frac{s_n}{s_n - 1}.$$
 - c) Montrer que pour tout $n \geq 0$ et $u_n > 1$.
 3. À l'aide de l'algorithme de la figure 3, on veut calculer le terme u_n pour une valeur de n donnée.
 - a) Recopier et compléter la partie traitement de l'algorithme.
 - b) Le table 1 page suivante donne des valeurs arrondies au millièème de u_n pour différentes valeurs de l'entier n .
Quelle conjecture peut-on faire sur la convergence de la suite (u_n) ?
 4. a) Justifier que pour tout entier $n > 0$, $s_n > n$.
 - b) En déduire la limite de la suite (s_n) puis celle de la suite (u_n) .

n	0	5	10	20	30	40
u_n	3	1,140	1,079	1,043	1,030	1,023

TABLE 1

Exercice 4 (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Un particulier s'intéresse à l'ombre portée sur sa future véranda par le toit de sa maison quand le soleil est au zénith. Cette véranda est schématisée en perspective cavalière dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sur la figure 4 page suivante. Le toit de la véranda est constitué de deux faces triangulaires SEF et SFG.

- Les plans (SOA) et (SOC) sont perpendiculaires.
- Les plans (SOC) et (EAB) sont parallèles, de même que les plans (SOA) et (GCB).
- Les arêtes [UV] et [EF] des toits sont parallèles.

Le point K appartient au segment [SE], le plan (UVK) sépare la véranda en deux zones, l'une éclairée et l'autre ombragée. Le plan (UVK) coupe la véranda selon la ligne polygonale KMNP qui est la limite ombre-soleil.

1. Sans calcul, justifier que :
 - a) le segment [KM] est parallèle au segment [UV];
 - b) le segment [NP] est parallèle au segment [UK].
2. Dans la suite de l'exercice, on se place dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Les coordonnées des différents points sont les suivantes : A(4 ; 0 ; 0), B(4 ; 5 ; 0), C(0 ; 5 ; 0), E(4 ; 0 ; 2,5), F(4 ; 5 ; 2,5), G(0 ; 5 ; 2,5), S(0 ; 0 ; 3,5), U(0 ; 0 ; 6) et V(0 ; 8 ; 6). On souhaite déterminer de façon exacte la section des faces visibles de la véranda par le plan (UVK) qui sépare les zones ombragée et ensoleillée.
 - a) Au moment le plus ensoleillé, le point K a pour abscisse 1,2. Vérifier que les coordonnées du point K sont (1,2 ; 0 ; 3,2).
 - b) Montrer que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées (7 ; 0 ; 3) est un vecteur normal au plan (UVK) et en déduire une équation cartésienne du plan (UVK).

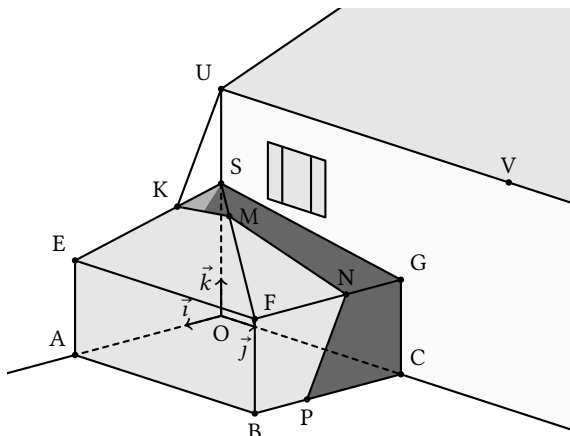


FIGURE 4

- c) Déterminer les coordonnées du point N intersection du plan (UVK) avec la droite (FG).
 - d) Expliquer comment construire la ligne polygonale sur le schéma de la véranda.
3. Afin de faciliter l'écoulement des eaux de pluie, l'angle du segment [SG] avec l'horizontale doit être supérieur à 7° . Cette condition est-elle remplie ?

Exercice 4 (5 points)

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les parties A et B sont indépendantes.

PARTIE A

Une association gère des activités pour des enfants. Elle propose deux programmes d'activités, le programme A : cirque - éveil musical, et le programme B : théâtre - arts plastiques. À sa création en 2014, l'association compte 150 enfants qui suivent tous le programme A. Pour chacune des années suivantes, le nombre d'enfants inscrits dans l'association reste égal à 150. On dispose également des informations suivantes :

- Chaque enfants ne peut suivre qu'un seul programme: soit le programme A, soit le programme B.
- D'une année à l'autre, 20 % des inscrits au programme A choisissent à nouveau le programme A, alors que 40 % choisissent le programme B. Les autres quittent l'association.
- D'une année à l'autre, 60 % des inscrits au programme B choisissent le nouveau programme B et les autres quittent l'association.
- Les nouveaux inscrits, qui comprennent les départs, suivent obligatoirement le programme A.

On modélise le nombre d'inscrits au programme A et le nombre d'inscrits au programme B durant l'année 2014 + n respectivement par deux suites (a_n) et (b_n) et on note U_n la matrice ligne $(a_n \ b_n)$. On a donc $U_0 = (150 \ 0)$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n , on a

$$U_{n+1} = U_n M \quad \text{où} \quad M = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}.$$

2. Montrer que, pour tout entier naturel n ,

$$U_n = \begin{pmatrix} 75 + 75 \times 0,2^n & 75 - 75 \times 0,2^n \end{pmatrix}.$$

3. En déduire la répartition des effectifs à long terme entre les deux programmes.

PARTIE B

L'association affecte à chaque enfant un numéro à 6 chiffres $c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 k$. Les deux premiers chiffres représentent à l'année de naissance de l'enfant, les trois suivants sont attribués à l'enfant au moment de sa première inscription. Le dernier chiffre, appelé clé de contrôle, est calculé automatiquement de la façon suivante :

- on effectue la somme $S = c_1 + c_3 + c_5 + a \times (c_2 + c_4)$ où a est un entier compris entre 1 et 9 ;
- on effectue la division euclidienne de S par 10, le reste obtenu est la clé k .

Lorsqu'un employé saisit le numéro à 6 chiffres d'un enfant, on peut détecter une erreur de saisie lorsqu'un sixième chiffre n'est pas égal à la clé de contrôle calculée à partir des cinq premiers chiffres.

1. Dans cette question seulement, on choisit $a = 3$.
 - a) Le numéro 111383 peut-il être celui d'un enfant inscrit à l'association ?
 - b) L'employé confonfand un frère et une sœur, échange leurs années de naissance : 2008 et 2011. Ainsi, le numéro $08c_3c_4c_5k$ est transformé en $11c_3c_4c_5k$. Cette erreur est-elle détectée grâce à la clé ?
2. On note $c_1c_2c_3c_4c_5k$ le numéro d'un enfant. On cherche les valeurs de l'entier a pour lesquelles la clé détecte systématiquement la faute de frappe lorsque les chiffres c_3 et c_4 sont invertis. On suppose donc que les chiffres c_3 et c_4 sont distincts.
 - a) Montrer que la clé ne détecte pas l'erreur d'inversion des chiffres c_3 et c_4 si et seulement si $(a - 1)(c_4 - c_3)$ est congru à 0 modulo 10.
 - b) Déterminer les entiers n compris entre 0 et 9 pour lesquels il existe un entier p compris entre 1 et 9 tel que $np \equiv 0 \pmod{10}$.
 - c) En déduire les valeurs de l'entier a qui permettent, grâce à la clé, de détecter systématiquement l'intervention des chiffres c_3 et c_4 .



Exercice 1*Commun à tous les candidats***PARTIE A**

1. La probabilité que le montant du devis soit supérieur à 4 000 euros est égale à

$$1 - P(X \leq 4\,000) \approx 0,189.$$

2. Le montant minimum d'un devis pour que celui-ci soit pris en compte est l'unique solution de l'équation $P(X \leq x) = 0,1$ d'inconnue x . La calculatrice donne, à l'euro près, 1 298 euros.

PARTIE B

1. $P(S \cap D) = P(S) \times P_S(D) = 0,6 \times 0,95 = 0,57$.
2. D'après la formule des probabilités totales, on a $P(D) = P(D \cap S) + P(\bar{S})P_{\bar{S}}(D)$, donc la probabilité qu'un message légitime soit déplacé est égale à

$$P_{\bar{S}}(D) = \frac{P(D) - P(D \cap S)}{1 - P(S)} = \frac{0,586 - 0,57}{1 - 0,6} = 0,04.$$

3. La probabilité qu'un message non déplacé soit un spam est égale à

$$P_{\bar{D}}(S) = \frac{P(S \cap \bar{D})}{P(\bar{D})} = \frac{P(S)P_S(\bar{D})}{1 - P(D)} = \frac{0,6 \times 0,05}{1 - 0,586} \approx 0,072.$$

4. Testons l'hypothèse suivante: « Parmi les messages du dossier spam, la proportion de messages fiables est $p = 0,027$. » Soit $n = 231$ la taille de l'échantillon. Comme $n \geq 30$, $np = 231 \times 0,027 = 6,237 \geq 5$ et $n(1 - p) = 231 \times (1 - 0,027) = 224,763 \geq 5$, l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % est égale à

$$\begin{aligned} & \left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} ; p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right] \\ &= \left[0,027 - 1,96\sqrt{\frac{0,027 \times (1 - 0,027)}{231}} ; 0,027 + 1,96\sqrt{\frac{0,027 \times (1 - 0,027)}{231}} \right] \\ &\approx [0,006 ; 0,048], \end{aligned}$$

où nous avons arrondi par défaut la borne inférieure et arrondi par excès la borne supérieure. Dans l'échantillon, la fréquence de messages fiables parmi

les messages déplacés, égale à $13/231 \approx 0,056$, n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation asymptotique. Nous devons donc rejeter l'hypothèse avec un risque d'erreur de 5 % : l'estimation de l'éditeur est fausse.

Exercice 2

Commun à tous les candidats

PARTIE A

1. Pour tout réel $x \in [-2; 2]$, on a $-x \in [-2; 2]$ et

$$f(-x) = -\frac{b}{8}(e^{-x/b} + e^{x/b}) = f(x).$$

Nous en déduisons que la courbe représentative de la fonction f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

2. Pour tout réel $x \in [-2; 2]$, on a

$$f'(x) = -\frac{b}{8}\left(\frac{1}{b}e^{x/b} - \frac{1}{b}e^{-x/b}\right) = -\frac{1}{8}(e^{x/b} - e^{-x/b}).$$

3. Soit $x \in]0; 2]$. Alors $-x < x$. Comme $b > 0$, on a $-x/b < x/b$. La fonction exponentielle étant strictement croissante, il s'ensuit que $e^{-x/b} < e^{x/b}$, d'où $f'(x) < 0$. De plus $f'(0) = 0$. Par conséquent, la fonction f est strictement décroissante sur $[0; 2]$. Par symétrie (question A.1), la fonction f est strictement croissante sur $[-2; 0]$. Nous en déduisons le tableau de variations de f (figure 5 page suivante). Le sommet S de la courbe a pour coordonnées $(0; f(0))$ où

$$f(0) = -\frac{b}{8}(e^0 + e^0) + \frac{9}{4} = \frac{9-b}{4}.$$

PARTIE B

1. D'après la question A.3, le point S est à 2 mètres du sol si et seulement si $(9-b)/4 = 2$, donc $b = 9 - 2 \times 4 = 1$.
2. Soit $b = 1$. La fonction f est continue (car dérivable) sur l'intervalle $[0; 2]$, $f(0) = 2 > 1,5$ et $f(2) = -\frac{1}{8}(e^2 + e^{-2}) + \frac{9}{4} \approx 1,31 < 1,5$, donc d'après le théorème

x	-2	0	2
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$f(-2)$	$\frac{9-b}{4}$	$f(2)$

FIGURE 5 – Tableau de variations de la fonction f .

des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 1,5$ possède au moins une solution sur l'intervalle $[0 ; 2]$. Comme la fonction f est strictement monotone sur $[0 ; 2]$, l'équation $f(x) = 1,5$ a au plus une solution sur l'intervalle $[0 ; 2]$. Finalement, l'équation $f(x) = 1,5$ a une et une seule solution sur l'intervalle $[0 ; 2]$.

La hauteur du mur est $f(a)$ où $a \in [0 ; 2]$, donc a est l'unique solution de l'équation $f(x) = 1,5$ sur $[0 ; 2]$. À l'aide de la calculatrice, on construit une table de valeurs à partir de laquelle nous obtenons $f(1,75) > 1,5$ et $f(1,77) < 1,5$, d'où $a \in]1,75 ; 1,77[$. Il s'ensuit que 1,76 est une valeur approchée de a au centième.

Solution alternative. L'équation $f(x) = 1,5$ qui s'écrit

$$-\frac{1}{8}(e^x + e^{-x}) + \frac{9}{4} = \frac{3}{2},$$

est équivalente à l'équation

$$e^x + e^{-x} = 6. \tag{E}$$

Multiplions les deux membres de l'équation par e^x . Nous obtenons ainsi

$$e^{2x} - 6e^x + 1 = 0.$$

Remarquons que e^x est solution de l'équation du second degré

$$X^2 - 6X + 1 = 0. \tag{E'}$$

Son déterminant, $6^2 - 4 \times 1 \times 1 = 32$ est strictement positif, donc l'équation (E') possède deux racines réelles, qui sont $(6 - \sqrt{32})/2 = 3 - 2\sqrt{2}$ et $3 + 2\sqrt{2}$. Par conséquent, l'équation (E) est équivalente à

$$e^x = 3 - 2\sqrt{2} \quad \text{ou} \quad e^x = 3 + 2\sqrt{2}.$$

Comme $3 - 2\sqrt{2} > 0$ et $3 + 2\sqrt{2} > 0$, l'équation (E) a deux solutions réelles: $\ln(3 - 2\sqrt{2})$ et $\ln(3 + 2\sqrt{2})$. On vérifie que $\ln(3 + 2\sqrt{2}) \in [0; 2]$, et puisque la fonction f est paire, c'est l'unique solution de (E) sur $[0; 2]$.

Comme $f(a)$ est la hauteur du mur, nous concluons que $a = \ln(3 + 2\sqrt{2})$ dont une approximation au centième est 1,76.

3. Notons $\mathcal{A}_{\text{vantail}}$ l'aire d'un vantail en m^2 . Il s'agit de l'aire de la région du plan délimitée par l'axe des abscisses, la courbe représentative de la fonction f et des droites d'équations $x = 0$ et $x = 1,8$. De plus la fonction f est positive, par conséquent

$$\mathcal{A}_{\text{vantail}} = \int_0^{1,8} f(x) \, dx.$$

Une primitive F de la fonction f est définie par

$$F(x) = -\frac{1}{8}(e^x - e^{-x}) + \frac{9}{4}x.$$

Par conséquent,

$$\mathcal{A}_{\text{vantail}} = F(1,8) - F(0) = \frac{e^{-1,8} - e^{1,8} + 32,4}{8} > 3,3.$$

La masse de l'un des vantaux est donc supérieure à $3,3 \, \text{m}^2 \times 20 \, \text{kg} \cdot \text{m}^2 = 66 \, \text{kg}$ et nous concluons que le client va automatiser son portail.

Solution alternative. Sur $[0; 2]$, on trouve $f''(x) = -\frac{1}{8}(e^x + e^{-x}) \leq 0$; la fonction f est donc concave sur $[0; 2]$, en particulier, sur la figure 1b page 27, le segment [BS] est situé sous la représentation graphique de la fonction f sur $[0; 1,8]$. Il s'ensuit que l'aire d'un vantail $\mathcal{A}_{\text{vantail}}$ est minorée par l'aire du trapèze OCBS, c'est-à-dire

$$\mathcal{A}_{\text{vantail}} > \frac{OS + BC}{2} \times OC = \frac{f(0) + f(1,8)}{2} \times 1,8 > 3,1.$$

L'aire d'un vantail est donc supérieure à $3,1 \, \text{m}^2$, si bien que chaque vantail a une masse supérieure à $20 \, \text{kg} \cdot \text{m}^{-2} \times 3,1 \, \text{m}^2 = 62 \, \text{kg}$. Le client décide donc d'automatiser son portail.

PARTIE C

L'économie réalisée en terme de surface de bois en choisissant la forme 2 plutôt que la forme 1 est égale à

$$\mathcal{A}_{\text{forme 1}} - \mathcal{A}_{\text{forme 2}} = OC \times OS - OC \times \frac{OG + CH}{2} = 3,6 - 0,9 \times (OG + GH).$$

La droite (GH) passe par le point F de coordonnées $(1; f(1))$ et a pour coefficient directeur $f'(1)$. Par définition d'un coefficient directeur, avec des notations évidentes, nous avons $f'(1) = (y_G - y_F)/(x_G - x_F) = f(1) - OG$, donc

$$OG = f(1) - f'(1).$$

De même, $f'(1) = (y_H - y_F)(x_H - x_F) = (CH - f(1))/0,8$, donc

$$CH = f(1) + 0,8f'(1).$$

Par conséquent, $OG + CH = 2f(1) - 0,2f'(1)$, d'où

$$\mathcal{A}_{\text{forme 1}} - \mathcal{A}_{\text{forme 2}} = 3,6 - 1,8f(1) + 0,18f'(1) = -0,45 + 0,2025e + 0,2475e^{-1}$$

L'économie réalisée en choisissant le forme 2 est, au cm^2 près, égale à $0,1915 \text{ m}^2$ par vantail.

Exercice 3

Commun à tous les candidats

1. L'égalité $u_0 + u_1 = u_0 u_1$ donne $u_1 = u_0/(u_0 - 1) = 3/2$. De même, l'égalité $(u_0 + u_1) + u_2 = (u_0 u_1)u_2$ donne

$$u_2 = \frac{u_0 + u_1}{u_0 u_1 - 1} = \frac{u_0 u_1}{u_0 u_1 - 1} = \frac{9/2}{9/2 - 1} = \frac{9}{7}.$$

2. a) Soit $n > 0$ un entier. Alors

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= (u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}) + u_n \\ &= s_n + u_n. \end{aligned}$$

Comme $s_{n+1} - s_n = u_n \geq 0$, la suite $(s_n)_{n \geq 1}$ est croissante. De plus, $s_1 = u_0 > 1$. Nous en déduisons que $s_n > 1$ pour tout entier $n > 0$.

Entrée	Saisir n Saisir u
Traitement	s prend la valeur u Pour i variant de 1 à n : u prend la valeur $s/(s-1)$ s prend la valeur $s+u$ Fin Pour
Sortie	Afficher u

FIGURE 6

- b) Soit un entier $n > 0$. Nous avons $s_n + u_n = s_n u_n$, soit $u_n(s_n - 1) = s_n$. De plus $s_n - 1 \neq 0$, donc

$$u_n = \frac{s_n}{s_n - 1}.$$

- c) Pour tout entier $n \geq 0$, on a

$$s_n > s_n - 1 > 0.$$

Or la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$, donc

$$\frac{1}{s_n - 1} > \frac{1}{s_n}.$$

Multiplions par $s_n > 0$. Nous obtenons ainsi

$$u_n > 1.$$

3. a) Connaissant les n -ième termes u_{n-1} et s_n des suites (u_n) et (s_n) , on calcule le terme suivant de chacune de ces suites à l'aide des formules $u_n = s_n/(s_n - 1)$ et $s_{n+1} = s_n + u_n$. Nous en déduisons l'algorithme de la figure 6.

- b) Le tableau invite à formuler la conjecture suivante :

Conjecture. *La suite (u_n) est convergente et a pour limite 1.*

4. a) Soit $n > 0$ un entier. D'après la question 2.c, nous avons

$$s_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} > \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n \text{ termes}},$$

donc $s_n > n$

- b) Évidemment $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$, donc l'inégalité précédente implique

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = +\infty.$$

Comme $s_n \neq 0$, on a

$$u_n = \frac{s_n}{s_n - 1} = \frac{1}{1 - \frac{1}{s_n}}.$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1/s_n = 0$, par conséquent

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1,$$

ce qui prouve la conjecture.

Exercice 4

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. a) Les droites (UV) et (EF) sont parallèles et appartiennent aux plans sécants et distincts (UVK) et (SEF) respectivement. Le théorème du toit affirme que la droite (KM), intersection des deux plans (UVK) et (SEF), est parallèle à la droite (UV).
- b) La droite (UK) appartient au plan (SOA) et la droite (NP) appartient au plan (GCB), or les plans (SOA) et (GCB) sont parallèles, donc les droites (NP) et (UK) ne se coupent pas. Le segment [NP] appartient à la section de la véranda par le plan (UVK), donc les droites (NP) et (UK) sont coplanaires. Or, deux droites coplanaires qui ne se coupent pas sont parallèles, donc les droites (NP) et (UK) sont parallèles.
2. a) Le point K appartient à la droite (SE), donc les vecteurs $\overrightarrow{SK}(1,2;0;z_K-3,5)$ et $\overrightarrow{SE}(4;0;-1)$ sont colinéaires. Par conséquent, $4(z_K - 3,5) = -1,2$, d'où $z_K = 3,2$. Les coordonnées du point K sont $(1,2;0;3,2)$.
- b) Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{UV}$ sont $(0;8;0)$ et celles du vecteur $\overrightarrow{UK}$ sont $(1,2;0;-2,8)$. Le repère étant orthonormé, on a

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{UV} = 7 \times 0 + 0 \times 8 + 3 \times 0 = 0$$

et

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{UK} = 7 \times 1,2 + 0 \times 0 + 3 \times (-2,8) = 0,$$

donc le vecteur $\vec{n}$ est normal aux vecteurs $\overrightarrow{UV}$ et $\overrightarrow{UK}$. Ces derniers n'étant pas colinéaires, nous pouvons conclure que le vecteur $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (UVK).

Une équation cartésienne du plan (UVK) est donc de la forme $7x + 0y + 3z + d = 0$, où d est un réel à déterminer. Les coordonnées du point U doivent vérifier l'équation du plan, ce qui donne $7 \times 0 + 3 \times 6 + d = 0$. On trouve immédiatement $d = -18$. Une équation cartésienne du plan (UVK) est donc

$$7x + 3z - 18 = 0.$$

Solution alternative. Nous pouvons aussi déterminer une équation cartésienne du plan (UVK) de la façon suivante. Soit $M(x; y; z)$ un point de l'espace. Nous avons l'équivalence

$$M(x; y; z) \in (\text{UVK}) \iff \vec{n} \cdot \vec{UM} = 0.$$

Or le vecteur $\vec{UM}$ a pour coordonnées $(x, y; z - 6)$, donc

$$M(x; y; z) \in (\text{UVK}) \iff 7x + 3(z - 6) = 0.$$

Il s'ensuit que $7x + 3z - 18 = 0$ est une équation cartésienne du plan (UVK).

- c) La droite (FG) passe par le point G et a pour vecteur directeur $\vec{i}$, donc la droite (FG) est l'ensemble des points M_t de l'espace de coordonnées $(t; 5; 2,5)$, où $t \in \mathbb{R}$. On a $M_t \in (\text{UVK})$ si et seulement si $7t + 3 \times 2,5 - 18 = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $t = 1,5$. Il s'ensuit que le point d'intersection N du plan (UVK) avec la droite (FG) est le point $M_{1,5}$ de coordonnées $(1,5; 5; 2,5)$.
- d) Pour construire la ligne polygonale KMNP, on commence par placer les points K et N dont nous venons de calculer les coordonnées. Ensuite, on trace la droite passant par K et parallèle à la droite (UV); son point d'intersection avec la droite (FS) est le point M. Enfin, le point P est l'intersection de la droite (BC) et de la droite passant par N et parallèle à la droite (KU).
3. L'angle géométrique que forme le segment [SG] avec l'horizontale a pour mesure $\theta = |\langle \vec{j}, \vec{SG} \rangle|$. Le vecteur $\vec{SG}$ a pour coordonnées $(0; 5; -1)$, donc

$$\vec{j} \cdot \vec{SG} = 0 \times 0 + 5 \times 1 + 0 \times (-1) = 5.$$

On a aussi

$$\vec{j} \cdot \vec{SG} = \|\vec{i}\| \times \|\vec{SG}\| \times \cos \theta = \sqrt{26} \times \cos \theta,$$

ainsi $\cos \theta = 5/\sqrt{26}$, donc $\theta \approx 11,3^\circ$. L'eau s'écoulera correctement.

Solution alternative. L'angle du segment $[SG]$ avec l'horizontal est l'angle $\widehat{HGS}$ où H est le projeté orthogonal du point G sur l'axe (Oz) . Dans le triangle rectangle HGS , on a $\cos \widehat{HGS} = GS/GH$, or $GS = \sqrt{(-5)^2 + 1^2} = \sqrt{26}$ et $GH = OC = 5$, donc $\cos \widehat{HGS} = \sqrt{26}/5$. Une calculatrice donne $\widehat{HGS} \approx 11,3^\circ$. L'eau de pluie s'écoulera correctement.

Exercice 4

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

PARTIE A

1. Soit un entier $n \geq 1$. Les suites (a_n) et (b_n) vérifient les relations de récurrence suivantes

$$\begin{cases} a_{n+1} = 0,2a_n + 0,4a_n + 0,4b_n = 0,6a_n + 0,4b_n, \\ b_{n+1} = 0,4a_n + 0,6b_n \end{cases} \quad (1)$$

dont une écriture matricielle est

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix},$$

soit

$$U_{n+1} = U_n M \quad \text{avec} \quad M = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}.$$

2. Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a l'égalité

$$U_n = (75 + 75 \times 0,2^n \quad 75 - 75 \times 0,2^n).$$

Initialisation. On a $75 + 75 \times 0,2^0 = 150$ et $75 - 75 \times 0,2^0 = 0$, donc l'égalité est vraie pour $n = 0$.

Hérédité. Supposons l'égalité vraie pour $n = k \geq 0$, c'est-à-dire

$$U_k = (75 + 75 \times 0,2^k \quad 75 - 75 \times 0,2^k).$$

ou encore

$$\begin{cases} a_k = 75 + 75 \times 0,2^k \\ b_k = 75 - 75 \times 0,2^k. \end{cases}$$

À l'aide des relations de récurrence (1), nous obtenons

$$\begin{cases} a_{k+1} = (75 + 75 \times 0,2^k) \times 0,6 + (75 - 75 \times 0,2^k) \times 0,4 \\ b_{k+1} = (75 + 75 \times 0,2^k) \times 0,4 + (75 - 75 \times 0,2^k) \times 0,6 \end{cases}$$

puis, après simplification,

$$\begin{cases} a_{k+1} = 75 + 75 \times 0,2^{k+1} \\ b_{k+1} = 75 - 75 \times 0,2^{k+1} \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$U_{k+1} = (75 + 75 \times 0,2^{k+1} \quad 75 - 75 \times 0,2^{k+1}).$$

L'hérédité est prouvée.

Conclusion. Le principe de récurrence nous permet de conclure que pour tout entier naturel n , on a

$$U_n = (75 + 75 \times 0,2^n \quad 75 - 75 \times 0,2^n).$$

Solution alternative. Puisque les nouveaux inscrits compensent les départs, les suites (a_n) et (b_n) sont liées par la relation

$$a_n + b_n = 150.$$

À l'aide des relations de récurrence (1), nous obtenons

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 150 - b_{n+1} \\ &= 150 - 0,4a_n - 0,6b_n \\ &= 150 - 0,4a_n - 0,6(a_{n+1} - 0,4a_n)/0,4 \\ &= 150 + 0,5a_n - 1,5a_{n+1} \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$a_{n+1} = 0,2a_n + 60. \quad (2)$$

Nous reconnaissons là une suite arithmético-géométrique. L'équation affine $x = 0,2x + 60$ obtenue en remplaçant a_n et a_{n+1} par x dans (2) a pour solution 75. Nous avons donc

$$75 = 0,2 \times 75 + 60. \quad (3)$$

Soustrayons membre à membre (3) à (2). Nous obtenons ainsi l'égalité

$$a_{n+1} - 75 = 0,2(a_n - 75),$$

qui prouve que la suite $(a_n - 75)_{n \geq 0}$ est géométrique de raison 0,2 dont le premier terme est $a_0 - 75 = 150 - 75 = 75$. Son terme général est donc $a_n - 75 = 75 \times 0,2^n$, d'où

$$\begin{cases} a_n = 75 + 75 \times 0,2^n \\ b_n = 150 - a_n = 75 - 75 \times 0,2^n. \end{cases}$$

En d'autres termes, pour tout entier naturel n , nous avons bien

$$U_n = (75 + 75 \times 0,2^n \quad 75 - 75 \times 0,2^n).$$

3. Comme $0,2 \in]-1; 1[$, la suite géométrique $(75 \times 0,2^n)$ converge vers 0. Par conséquent,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 75 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 75,$$

ce qui signifie que dans quelques années, la répartition des effectifs entre les deux programmes sera uniforme.

PARTIE B

1. a) La somme de contrôle S associée au numéro 111383 est $1 + 1 + 8 + 3 \times (1 + 3) = 22$. Or 22 n'est pas congru modulo 10 à la clé de contrôle 3, donc le numéro 111383 n'est pas celui d'un enfant inscrit à l'association.
- b) La somme de contrôle du numéro valide 08 $c_3c_4c_5k$ est $S_1 = 0 + c_3 + c_5 + 3 \times (8 + c_4) = c_3 + 3c_4 + c_5 + 24$, et celle du numéro obtenu suite à l'échange des années de naissance est $S_2 = 1 + c_3 + c_5 + 3 \times (1 + c_4) = c_3 + 3c_4 + c_5 + 4$. Puisque $S_1 - S_2 = 2 \times 10$, les restes de la division par 10 des sommes S_1 et S_2 sont identiques, ce qui signifie que la clé ne détecte pas l'échange des années de naissance.

2. a) Soit le numéro $c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 k$ d'un enfant. Il vérifie

$$c_1 + c_3 + c_5 + a(c_2 + c_4) \equiv k \pmod{10}. \quad (4)$$

La clé ne détecte pas l'interversion de la clé si et seulement si

$$c_1 + c_4 + c_5 + a(c_2 + c_3) \equiv k \pmod{10}. \quad (5)$$

Ce qui, en faisant la différence de (4) et (5), est équivalent à

$$c_3 - c_4 + a(c_4 - c_3) \equiv 0 \pmod{10},$$

que l'on peut aussi écrire

$$(a - 1)(c_4 - c_3) \equiv 0 \pmod{10}.$$

- b) Soient $n \in \{0, 1, \dots, 9\}$ et $p \in \{1, 2, \dots, 9\}$. Comme 10 est le produit des deux nombres premiers distincts 2 et 5, nous avons les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} 10 \mid np &\iff \begin{cases} 2 \mid np \\ 5 \mid np \end{cases} \iff \begin{cases} 2 \mid n \\ 5 \mid n \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 2 \mid n \\ 5 \mid p \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 5 \mid n \\ 2 \mid p \end{cases} \\ &\iff n = 0 \quad \text{ou} \quad \begin{cases} n \in \{0, 2, 4, 6, 8\} \\ p = 5 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} n \in \{0, 5\} \\ p \in \{2, 4, 6, 8\} \end{cases}. \end{aligned}$$

Nous en déduisons que les entiers $n \in \{0, 1, \dots, 9\}$ pour lesquels il existe au moins un entier $p \in \{1, 2, \dots, 9\}$ tel que $np \equiv 0 \pmod{10}$ sont 0, 2, 4, 5, 6 et 8.

- c) D'après les deux questions précédentes, la clé détecte systématiquement l'interversion des chiffres c_3 et c_4 si et seulement si $a - 1 \in \{0, 1, \dots, 8\} \setminus \{0, 2, 4, 5, 6, 8\}$, c'est-à-dire si et seulement si $a \in \{2, 4, 8\}$.



Sujet 3

Liban

5 juin 2017

Exercice 1 (6 points)

Commun à tous les candidats

On considère un cube ABCDEFGH dont la représentation en perspective cavalière est donnée sur la figure 1. Les arêtes sont de longueur 1. L'espace est rapporté au repère orthonormé $(D; \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH})$.

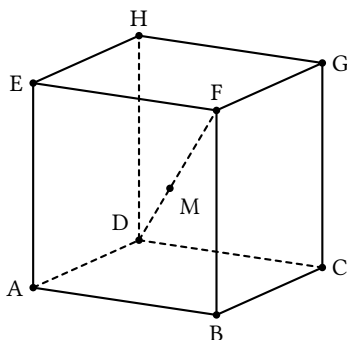


FIGURE 1

PARTIE A

1. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{DF}$ est normal au plan (EBG).
2. Déterminer une équation cartésienne du plan (EBG).
3. En déduire les coordonnées du point I intersection de la droite (DF) et du plan (EBG). On démontrerait de la même manière que le point I intersection de la droite (DF) et du plan (AHC) a pour coordonnées $(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3})$.

x	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1
Variations de f	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0

FIGURE 2

PARTIE B

À tout réel x de l'intervalle $[0; 1]$, on associe le point M du segment $[DF]$ tel que $\overrightarrow{DM} = x\overrightarrow{DF}$. On s'intéresse à l'évolution de la mesure θ en radian de l'angle $\widehat{EMB}$ lorsque le point M parcourt le segment $[DF]$. On a $0 \leq \theta \leq \pi$.

1. Que vaut θ si le point M est confondu avec le point D ? avec le point F ?
2. a) Justifier que les coordonnées du point M sont $(x; x; x)$.
b) Montrer que

$$\cos \theta = \frac{3x^2 - 4x + 1}{3x^2 - 4x + 2}.$$

On pourra pour cela s'intéresser au produit scalaire des vecteur $\overrightarrow{ME}$ et $\overrightarrow{MB}$.

3. On a construit (figure 2) le tableau de variations de la fonction

$$f : x \mapsto \frac{3x^2 - 4x + 1}{3x^2 - 4x + 2}.$$

Pour quelles positions du point M sur le segment $[DF]$:

- a) le triangle MEB est-il rectangle en M ?
- b) l'angle θ est-il maximal ?

Exercice 2 (6 points)

Commun à tous les candidats

Dans cet exercice, on étudie quelques grandeurs caractéristiques du fonctionnement des parkings d'une ville. Dans tout l'exercice, les probabilités seront données avec une précision de 10^{-4} .

Les parties A, B et C sont indépendantes.

PARTIE A. DURÉE D'ATTENTE POUR ENTRER DANS UN PARKING SOUTERRAIN

On appelle durée d'attente le temps qui s'écoule entre le moment où la voiture se présente à l'entrée du parking et le moment où elle franchit la barrière d'entrée du parking. La table 1 suivant présente les observations faites sur une journée.

Durée attente en minute	$[0 ; 2[$	$[2 ; 4[$	$[4 ; 6[$	$[6 ; 8[$
Nombre de voitures	75	19	10	5

TABLE 1

- Proposer une estimation de la durée d'attente moyenne d'une voiture à l'entrée du parking.
- On décide de modéliser cette durée d'attente par une variable aléatoire T suivant une loi exponentielle de paramètre λ (exprimé en minute).
 - Justifier que l'on peut choisir $\lambda = 0,5$ min.
 - Une voiture se présente à l'entrée du parking. Quelle est la probabilité qu'elle mette moins de deux minutes pour franchir la barrière ?
 - Une voiture attend à l'entrée du parking depuis une minute. Quelle est la probabilité qu'elle franchisse la barrière dans la minute suivante ?

PARTIE B. DURÉE ET TARIFS DE STATIONNEMENT DANS CE PARKING SOUTERRAIN

Une fois garée, la durée de stationnement d'une voiture est modélisée par une variable aléatoire D qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 70$ min et d'écart-type $\sigma = 30$ min.

Durée de stationnement	Inférieure à 15 min	Entre 15 min et 1 h	Heure supplémentaire
Tarif en euros	Gratuit	3,5	t

TABLE 2

- Quelle est la durée moyenne de stationnement d'une voiture ?
 - Un automobiliste entre et se gare dans le parking. Quelle est la probabilité que sa durée de stationnement dépasse deux heures ?
 - À la minute près, quel est le temps maximum de stationnement pour au moins 99 % des voitures ?
- La durée de stationnement est limitée à trois heures. La table 2 donne le tarif de la première heure et chaque heure supplémentaire est facturée à un tarif unique. Toute heure commencée est due intégralement.
Déterminer le tarif t de l'heure supplémentaire que doit fixer le gestionnaire du parking pour que le prix moyen de stationnement d'une voiture soit de 5 euros.

PARTIE C. TEMPS D'ATTENTE POUR SE GARER DANS UN PARKING DE CENTRE-VILLE

La durée de stationnement d'une voiture dans un parking de centre-ville est modélisée par une variable aléatoire T' qui suit une loi normale d'espérance μ' et d'écart-type σ' . On sait que la moyenne du temps de stationnement dans ce parking est égale à 30 min et que 75 % des voitures ont un temps de stationnement inférieur à 37 min.

Le gestionnaire du parking vise l'objectif que 95 % des voitures aient un temps de stationnement entre 10 min et 50 min. Cet objectif est-il atteint ?

Exercice 3 (3 points)

Commun à tous les candidats

Soit k un réel strictement positif. On considère les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f_k(x) = x + ke^{-x}.$$

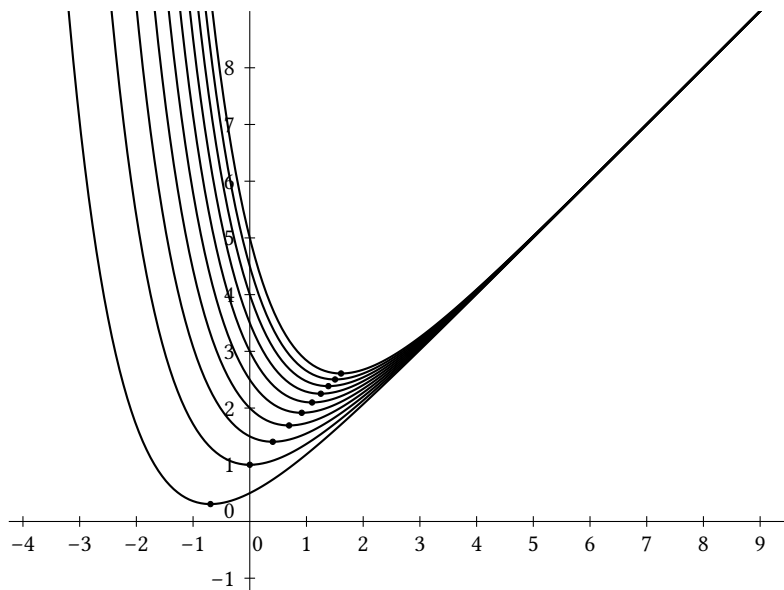


FIGURE 3

On note C_k la courbe représentative de la fonction f_k dans un plan muni d'un repère orthonormé. On a représenté sur la figure 3 quelques courbes C_k pour différentes valeurs de k .

Pour tout réel k strictement positif, la fonction f_k admet un minimum sur $\mathbb{R}$. La valeur en laquelle ce minimum est atteint est l'abscisse du point noté A_k de la courbe C_k . Il semblerait que, pour tout réel k strictement positif, les points A_k soient alignés. Est-ce le cas ?

Exercice 4 (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

L'épicéa commun est une espèce d'arbre résineux qui peut mesurer jusqu'à 40 m de hauteur et vivre plus de 150 ans.

L'objectif de cet exercice est d'estimer l'âge et la hauteur d'un épicéa à partir du diamètre de son tronc mesuré à 1,30 m du sol.

PARTIE A. MODÉLISATION DE L'ÂGE D'UN ÉPICÉA

Pour un épicéa dont l'âge est compris entre 20 et 120 ans, on modélise la relation entre son âge (en années) et le diamètre de son tronc (en mètre) mesuré à 1,30 m du sol par la fonction f définie sur l'intervalle $]0 ; 1[$ par

$$f(x) = 30 \ln \frac{20x}{1 - x}$$

où x désigne le diamètre exprimé en mètre et $f(x)$ l'âge en années.

1. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0 ; 1[$.
2. Déterminer les valeurs du diamètre x du tronc tel que l'âge calculé dans ce modèle reste conforme à ces conditions de validité, c'est-à-dire compris entre 20 et 120 ans.

PARTIE B

On a relevé la hauteur moyenne des épicéas dans des échantillons représentatifs d'arbres âgés de 50 à 150 ans. La table 3, réalisé à l'aide d'un tableur regroupe ces résultats et permet de calculer la vitesse de croissance moyenne d'un épicéa.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	Âges (en années)	50	70	80	85	90	95	100	105	110	120	130	150
2	Hauteurs (en mètres)	11,2	15,6	18,05	19,3	20,55	21,8	23	24,2	25,4	27,6	29,65	33
3	Vitesse de croissance (en mètres par année)		0,22	0,245	0,25								

TABLE 3

1. a) Interpréter le nombre 0,245 dans la cellule D3.
 b) Quelle formule doit-on entrer dans la cellule C3 afin de compléter la ligne 3 en recopiant la cellule C3 vers la droite ?
2. Déterminer la hauteur attendue d'un épicéa dont le diamètre de croissance est maximale.
 a) Déterminer un intervalle d'âges durant lequel la qualité du bois est la meilleure en expliquant la démarche.
 b) Est-il cohérent de demander aux bûcherons de couper les arbres lorsque leur diamètre mesure environ 70 cm ?

Initialisation	I prend la valeur 0 P prend la valeur 0 R prend la valeur 0
Traitement	Pour k variant de 0 à 7 : R prend la valeur du reste de la division euclidienne de $2a_{2k+1}$ par 9 I prend la valeur $I + R$ Fin Pour Pour k allant de 1 à 7 : P prend la valeur de $P + a_{2k}$ Fin Pour S prend la valeur de $I + P + c$
Sortie	Si S est un multiple de 10 alors : Afficher « Le numéro de la carte est correct. » Sinon : Afficher « Le numéro de la carte n'est pas correct. » Fin Si

FIGURE 4

Exercice 4 (5 points)

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Un numéro de carte bancaire est de la forme

$$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9 a_{10} a_{11} a_{12} a_{13} a_{14} a_{15} c$$

où $a_1, a_2, \dots, a_{15}$ et c sont des chiffres compris entre 0 et 9. Les quinze premiers chiffres contiennent des informations sur le type de carte, la banque et le numéro de compte bancaire. c est la clé de validation du numéro. Ce chiffre est calculé à partir des quinze autres. L'algorithme de la figure 4 permet de valider la conformité d'un numéro de carte donné.

- On considère le numéro de carte suivant : 5635 4002 9561 3411.
 - Compléter la table 4 page suivante permettant d'obtenir la valeur finale de la variable I.

k	0	1	2	3	4	5	6	7
a_{2k+1}								
$2a_{2k+1}$								
R								
I								

TABLE 4

- b) Justifier que le numéro de la carte 5635 4002 9561 3411 est correct.
- c) On modifie le numéro de cette carte en changeant les deux premiers chiffres. Le premier chiffre (initialement 5) est changé en 6. Quel doit être le deuxième chiffre a pour que le numéro de la carte obtenu $6a35\ 4002\ 9561\ 3411$ reste correct ?
2. On connaît les quinze premiers chiffres du numéro d'une carte bancaire. Montrer qu'il existe une clé c rendant ce numéro de carte correct et que cette clé est unique.
3. Un numéro de carte dont les chiffres sont tous égaux peut-il être correct ? Si oui, donner tous les numéros de carte possibles de ce type.
4. On effectue le test suivant : on intervertit deux chiffres consécutifs distincts dans un numéro de carte correct et on vérifie si le numéro reste correct. On a trouvé une situation où ce n'est pas le cas, l'un des deux chiffres permutés valant 1. Peut-on déterminer l'autre chiffre permuté ?



Exercice 1*Commun à tous les candidats***PARTIE A**

1. Calculons quelques coordonnées :

$$\overrightarrow{DF}(1, 1, 1), \quad \overrightarrow{EB}(0, 1, -1) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BG}(-1, 0, 1).$$

Comme le repère est orthonormé, $\overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{EB} = 1 \times 0 + 1 \times 1 + 1 \times (-1) = 0$ et $\overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{BG} = 1 \times (-1) + 1 \times 0 + 1 \times 1 = 0$. De plus, les vecteurs $\overrightarrow{EB}$ et $\overrightarrow{BG}$ ne sont pas colinéaires. Nous en déduisons que le vecteur $\overrightarrow{DF}$ est normal au plan (EBG).

2. Une équation cartésienne du plan (EBG) est $1 \times x + 1 \times y + 1 \times z + d = 0$, où d est un réel à déterminer. Les coordonnées du point B doivent vérifier cette équation, c'est-à-dire $1 + 1 + 0 + d = 0$, d'où $d = -2$. Une équation cartésienne du plan (EBG) est donc $x + y + z - 2 = 0$.
3. La droite (DF), passant par le point D et de vecteur directeur $\overrightarrow{DF}$ est l'ensemble des points M_t de coordonnées (t, t, t) où $t \in \mathbb{R}$. Le point M_t appartient au plan (EBG) si et seulement si $t + t + t - 2 = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $t = 2/3$. Nous en déduisons que le point d'intersection I de la droite (DF) et du plan (EBG) est le point $M_{2/3}(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.

PARTIE B

1. Les segments [DE], [BE] et [BD] sont les diagonales de carrés superposables, donc le triangle DBE est équilatéral. Il s'ensuit que $\theta = \widehat{EDB} = \frac{\pi}{3}$ si $M = D$. Si $M = F$, alors $\theta = \widehat{EFB} = \frac{\pi}{2}$.
2. a) Le vecteur $\overrightarrow{DF}$ a pour coordonnées $(1, 1, 1)$, donc la relation $\overrightarrow{DM} = x\overrightarrow{DF}$ implique que les coordonnées du point M sont $(x; x; x)$.
- b) Comme $M \in [DF]$, les vecteurs $\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{ME}$ sont non nuls, donc

$$\cos \theta = \frac{\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{ME}}{\|\overrightarrow{MB}\| \times \|\overrightarrow{ME}\|}.$$

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{ME}$ sont $(1 - x; -x; 1 - x)$ et les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{MB}$ sont $(1 - x; 1 - x; -x)$, donc

$$\cos \theta = \frac{(1-x)^2 - x(1-x) - x(1-x)}{(1-x)^2 + (1-x)^2 + (-x)^2} = \frac{3x^2 - 4x + 1}{3x^2 - 4x + 2}.$$

3. a) Le triangle MEB est rectangle en M si et seulement si $f(x) = 0$. Les solutions de cette équation sont $1/3$ et 1 , donc le triangle MEB est rectangle en M si et seulement si $M \in \{J, F\}$.
- b) La fonction cosinus est strictement décroissante sur l'intervalle $[0; \pi]$, donc θ est maximal lorsque $\cos \theta$ est minimal. D'après le tableau de variations, θ est minimal pour $x = 2/3$, donc θ est minimal pour $M = I$.

Exercice 2

Commun à tous les candidats

PARTIE A. DURÉE D'ATTENTE POUR ENTRER DANS UN PARKING SOUTERRAIN

1. Pour estimer le temps d'attente moyen, remplaçons chaque classe par son centre, ce qui donne un temps moyen d'attente, en minutes, égale à environ

$$\frac{1 \times 75 + 3 \times 19 + 5 \times 10 + 7 \times 5}{75 + 19 + 10 + 5} \approx 2.$$

2. a) L'espérance de la variable aléatoire T est égale à $1/\lambda$ et correspond au temps moyen d'attente exprimé en minutes, donc $\lambda = 0,5$ min.
- b) La probabilité qu'une voiture attende moins de deux minutes pour franchir la barrière est égale à $P(T \leq 2) = 1 - e^{-0,5 \times 2} \approx 0,6321$.
- c) La probabilité demandé est $P_{T \geq 1}(T \leq 2)$. Comme la loi exponentielle est une loi sans vieillissement, on a

$$P_{T \geq 1}(T \leq 2) = 1 - P(T > 1) = P(T \leq 1) = 1 - e^{-0,5} \approx 0,3935.$$

PARTIE B. DURÉE ET TARIFS DE STATIONNEMENT DANS CE PARKING SOUTERRAIN

1. a) La durée moyenne de stationnement d'une voiture est égale à $\mu = 70$ min.
- b) La probabilité que la durée de stationnement d'un automobiliste dépasse deux heures est égale à $P(D > 120) = 1 - P(D \leq 120) \approx 0,0478$.
- c) Le temps maximum de stationnement pour 99 % des voitures est la solution de l'équation $P(D \leq x) = 0,99$. La calculatrice donne $x \approx 139,8$, soit 2 h 20 min.

2. Soit C la variable aléatoire égale au prix du stationnement en euros. Elle est définie en fonction de la variable aléatoire D comme suit :

$$C = \begin{cases} 0 & \text{si } D \leq 15 \\ 3,5 & \text{si } 15 < D \leq 60 \\ 3,5 + t & \text{si } 60 < D \leq 120 \\ 3,5 + 2t & \text{si } 120 < D \leq 180. \end{cases}$$

Le coût moyen du stationnement est donné par la formule

$$E(C) = 3,5P(15 < D \leq 60) + (3,5 + t)P(60 < D \leq 120) + (3,5 + 2t)P(120 < D \leq 180)$$

ou encore,

$$E(C) = 3,5P(15 < D \leq 180) + t(P(60 < D \leq 120) + 2P(120 < D \leq 180)).$$

Par conséquent, l'équation $E(C) = 5$ a pour solution

$$t = \frac{5 - 3,5P(15 < D \leq 180)}{P(60 < D \leq 120) + 2P(120 < D \leq 180)} \approx 2,38.$$

On conclut donc qu'il faut fixer le tarif de l'heure supplémentaire à 2,38 euros pour que le prix moyen du stationnement soit égal à 5 euros.

PARTIE C. TEMPS D'ATTENTE POUR SE GARER DANS UN PARKING DE CENTRE-VILLE

Immédiatement, $\mu' = 30$ min. La variable aléatoire $Z = (T' - 30)/\sigma'$ suit la loi normale centrée réduite. Comme $P(T' \leq 37) = 0,75$ et que $T' \leq 37$ si et seulement si $Z' \leq 7/\sigma'$, on a $P(Z \leq 7/\sigma') = 0,75$, d'où $\sigma' \approx 10,38$ min. Nous en déduisons que

$$P(10 \leq T' \leq 50) \approx 0,9460,$$

c'est-à-dire que 94,6 % des voitures ont un temps de stationnement compris entre 10 et 50 min. Il est fort probable que ce résultat soit suffisamment proche de 95 % pour que le gestionnaire du parking soit satisfait.

Exercice 3*Commun à tous les candidats*

Soit $k > 0$ un réel. Puisque la fonction f_k admet un minimum sur l'intervalle $\mathbb{R}$ et qu'elle est dérivable, l'abscisse du minimum est une solution de l'équation $f'_k(x) = 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f'_k(x) = 1 - ke^{-x}$, donc l'équation $f'_k(x) = 0$ est équivalente à $e^{-x} = 1/k$, d'où $-x = \ln(1/k)$, puis $x = \ln k$. Cette unique solution est l'abscisse de A_k . Son ordonnée est $f(\ln k) = \ln k + ke^{-\ln k} = \ln k + k/e^{\ln k} = \ln k + 1$. Les coordonnées de A_k vérifient l'équation de droite $y = x + 1$, donc les points $\{A_k\}_{k \in]0; +\infty[}$ sont alignés.

Remarque. Comme le logarithme népérien est une fonction continue sur l'intervalle $]0; +\infty[$ telle que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$, le théorème des valeurs intermédiaires permet d'en déduire que l'ensemble $\{A_k\}_{k \in]0; +\infty[}$ est exactement la droite d'équation $y = x + 1$.

Exercice 4*Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité*

PARTIE A. MODÉLISATION DE L'ÂGE D'UN ÉPICÉA

1. Commençons par simplifier l'écriture de f ; pour tout réel $x \in]0; 1[$, on a

$$f(x) = 30 \ln \left(\frac{20(x-1) + 20}{1-x} \right) = 30 \ln \left(\frac{20}{1-x} - 20 \right).$$

Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b < 1$. Appliquons aux membres des inégalités la fonction affine $x \mapsto 1 - x$ strictement décroissante,

$$1 - a > 1 - b > 0,$$

la fonction inverse strictement décroissante sur $]0; +\infty[$,

$$\frac{1}{1-a} < \frac{1}{1-b},$$

la fonction affine strictement croissante $x \mapsto 20x - 20$,

$$\frac{20}{1-a} < \frac{20}{1-b},$$

puis enfin la fonction $x \mapsto 30 \ln x$ strictement croissante sur $]0; +\infty[$,

$$f(a) < f(b).$$

Nous avons montré que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0; 1[$.

Solution alternative. La fonction f est définie comme la composée de la fonction logarithme, dérivable sur $]0; +\infty[$, et de la fonction rationnelle $x \mapsto 20x/(1-x)$, dérivable et à valeurs positives sur $]0; 1[$, donc la fonction f est dérivable sur $]0; 1[$. Pour tout réel $x \in]0; 1[$, on a

$$f'(x) = 30 \frac{20(1-x) - 20x \times (-1)}{(1-x)^2} \bigg/ \frac{20x}{1-x} = \frac{30}{x(1-x)} > 0,$$

donc la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0; 1[$.

2. Soit $y \in \mathbb{R}$. Nous avons les équivalences

$$\begin{aligned} f(x) = y &\iff 30 \ln\left(\frac{20x}{1-x}\right) = y \\ &\iff \ln\left(\frac{20x}{1-x}\right) = \frac{y}{30} \\ &\iff \frac{20x}{1-x} = e^{y/30} \\ &\iff 20x = (1-x)e^{y/30} \\ &\iff x = \frac{e^{y/30}}{20 + e^{y/30}} \\ &\iff x = \frac{1}{20e^{-y/30} + 1}. \end{aligned}$$

Nous en déduisons que l'antécédent de 20 par f est $(20e^{-2/3} + 1)^{-1} \approx 0,09$, et que celui de 120 est $(20e^{-4} + 1)^{-1} \approx 0,73$. Comme la fonction f est strictement croissante, on conclut que le modèle s'applique à des épicéas dont le diamètre du tronc est compris entre 0,09 m et 0,73 m.

PARTIE B

1. a) Entre l'âge de 70 et de 80 ans, l'épicéa grandit à la vitesse moyenne de 0,245 m/an; en effet, $0,245 = (18,05 - 15,6)/(80 - 70)$.
- b) On complète le tableau en entrant la formule $=(C2 - B2)/(C1-B1)$ dans la cellule B3.

Remarque. L'adressage relatif n'est nécessaire que sur les colonnes. On peut donc aussi utiliser la formule $=(C\$2 - B\$2)/(C\$1 - B\$1)$.

2. D'après la question A.2, nous pouvons déterminer l'âge d'un épicéa dont le tronc a un diamètre de 0,27 m à l'aide du modèle décrit à la partie A. Son âge est donc égal à $f(0,27) \approx 60$ ans. Dans la table 3 page 52, nous lisons qu'un épicéa de 50 ans mesure 11,2 m et qu'un épicéa de 70 ans mesure 15,6 m. Étant donné que 60 est le milieu de l'intervalle $[50 ; 70]$ sur lequel la vitesse de croissance est supposée constante, nous en déduisons que la hauteur attendue de l'épicéa est égale à $(11,2 + 15,6)/2 \text{ m} = 13,4 \text{ m}$.
3. a) Complétons la table 3 page 52.

Âge (années)	50	70	80	85	90	95
Hauteur (m)	11,2	15,6	18,05	19,3	20,55	21,8
Vitesse de croissance (m/an)		0,22	0,245	0,25	0,25	0,25
Âge (années)	100	105	110	120	130	150
Hauteur (m)	23	24,2	25,4	27,6	29,65	33
Vitesse de croissance (m/an)	0,24	0,24	0,24	0,22	0,205	0,1675

TABLE 5

La qualité du bois est la meilleure lorsque l'épicéa a entre 80 et 95 ans.

- b) Un épicéa dont le diamètre du tronc est d'environ 70 cm a $f(0,70) \approx 115$ ans. Il est trop tard pour bénéficier d'un bois de la meilleure qualité, il ne faut donc pas demander aux bûcherons d'attendre que les arbres aient un diamètre de 70 cm pour les couper. En revanche, à partir de cet âge, la qualité du bois se dégrade inexorablement, il est donc pertinent de couper des arbres de 70 cm de diamètre qui auraient été oubliés afin de limiter la perte de qualité.

Exercice 4

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. a) Voir la table 6 page suivante.
- b) La valeur finale de P est la somme des 7 premiers chiffres de rang pair, soit $P = 6 + 5 + 0 + 2 + 5 + 1 + 4 = 23$, d'où $S = 26 + 23 + 1 = 50$. Comme S est un multiple de 10, le numéro de carte 5635 4002 9561 3411 est conforme.

k	0	1	2	3	4	5	6	7
a_{2k+1}	5	3	4	0	9	6	3	1
$2a_{2k+1}$	10	6	8	0	18	12	6	2
R	1	6	8	0	0	3	6	2
I	1	7	15	15	15	18	24	26

TABLE 6

- c) La valeur de R associée au premier chiffre du numéro initial est 1, celle associée au chiffre 6 est 3. Par conséquent changer le premier chiffre en 6 a pour effet d'augmenter la valeur finale de I de 2. En donnant à a la valeur $6 - 2 = 4$, on diminue la valeur finale de P de 2, ainsi la somme $I + P + c$ reste égale à 50, donc le numéro de carte 6435 4002 9561 3411 est correct.
2. Notons i et p les valeurs finales de I et P respectivement. Nous devons démontrer qu'il existe un unique entier $c \in \{0, 1, \dots, 9\}$ tel que $S = i + p + c$ soit un multiple de 10. Effectuons la division euclidienne de $i + p$ par 10; il existe un unique couple d'entiers (q, r) tel que

$$i + p = 10q + r \quad (q \geq 0, 0 \leq r \leq 9).$$

Ajoutons la clé aux deux membre de cette égalité. Nous obtenons alors

$$S = 10q + r + c \quad (0 \leq r + c \leq 18)$$

Étudions séparément les deux cas possibles: $r = 0$ et $r \neq 0$.

Si $r = 0$, alors S est un multiple de 10 si et seulement si c est multiple de 10; étant donné que $0 \leq c \leq 9$, une seule clé convient: $c = 0$.

Si $r \neq 0$, alors S est un multiple de 10 si et seulement si $r + c$ est un multiple de 10; comme $1 \leq r + c \leq 18$, une seule clé convient: $c = 10 - r$.

Dans tous les cas, nous avons bien montré l'existence d'une unique clé rendant un numéro de carte bancaire correct.

3. Déterminons $c \in \{0, 1, \dots, 9\}$ pour que $cccc\ cccc\ cccc\ cccc$ soit un numéro de carte bancaire correct. Soient q le quotient de la division euclidienne de $2c$ par 9. Alors $i = 8(2c - 9q)$ et $p = 7c$, donc $S = 8(2c - 9q) + 7c + c = 24(c - 3q)$.

Pour que 10 divise S , il faut et il suffit que 5 divise $12(c - 3q)$. Comme 5 et 12 sont premiers entre eux, le théorème de Gauss montre alors que

$$10 \mid S \iff 5 \mid c - 3q.$$

Si $0 \leq c \leq 4$, alors $0 \leq 2c \leq 8$, d'où $q = 0$. Par conséquent, S divise 10 si et seulement si 5 divise c . On trouve une seule solution : $c = 0$.

Si $5 \leq c \leq 8$, alors $10 \leq 2c \leq 16$, d'où $q = 1$. Par conséquent, 10 divise S si et seulement si 5 divise $c - 3$. On trouve une seule solution : $c = 8$.

Si $c = 9$, alors $2c = 18$, d'où $q = 2$. Par conséquent, 10 divise S si et seulement si 5 divise 3, donc $c = 9$ n'est pas une solution.

Finalement, il n'existe que deux numéros de compte bancaire corrects constitués de chiffres identiques : 0000 0000 0000 0000 et 8888 8888 8888 8888.

4. Les numéros 1000 0000 0000 0008 et 1200 0000 0000 0006 sont corrects. Permutons les deux premiers chiffres de chacun de ses numéros. Les numéros ainsi obtenus, 01000 0000 0000 0008 et 2100 0000 0000 0006, ne sont pas corrects. On ne peut donc pas déterminer l'autre chiffre permuté.



Sujet 4

Centres étrangers

13 juin 2017

Exercice 1 (5 points)*Commun à tous les candidats*

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM). Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse exacte. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte un point, une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapportent aucun point.

On étudie la production d'une usine qui fabrique des bonbons, conditionnés en sachets.

On choisit un sachet au hasard dans la production journalière. La masse de ce sachet, exprimée en gramme, est modélisée par une variable aléatoire X qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 175$. De plus, une observation statistique a montré que 2 % des sachets ont une masse inférieure ou égale à 170 g, ce qui se traduit dans le modèle considéré par $P(X \leq 170) = 0,02$.

Question 1. Quelle est la probabilité, arrondie au centième, de l'événement « la masse du sachet est comprise entre 170 et 180 g » ?

a. 0,04 b. 0,96 c. 0,98 d. On ne peut pas répondre car il manque des données

Les différents bonbons présents dans les sachets sont tous enrobés d'une couche de cire comestible. Ce procédé, qui déforme certains bonbons, est effectué par deux machines A et B. Lorsqu'il est produit par la machine A, la probabilité qu'un bonbon prélevé aléatoirement soit déformé est égale à 0,05.

Question 2. Sur un échantillon aléatoire de 50 bonbons issus de la machine A, quelle est la probabilité, arrondie au centième, qu'au moins 2 bonbons soient déformés ?

a. 0,72 b. 0,28 c. 0,54 d. On ne peut pas répondre car il manque des données

La machine A produit un tiers des bonbons de l'usine. Le reste de la production est assuré par la machine B. Lorsqu'il est produit par la machine B, la probabilité qu'un bonbon prélevé aléatoirement soit déformé est égale à 0,02. Dans un test de contrôle, on prélève au hasard un bonbon dans l'ensemble de la production. Celui-ci est déformé.

Question 3. Quelle est la probabilité, arrondie au centième, qu'il soit produit par la machine B ?

a. 0,02 b. 0,67 c. 0,44 d. 0,01

La durée de vie de fonctionnement, exprimé en jour, d'une machine servant à l'enrobage, est modélisée par une variable aléatoire Y qui suit la loi exponentielle dont l'espérance est égale à 500 jours ?

Question 4. Quelle est la probabilité, arrondie au centième, que la durée de fonctionnement de la machine soit inférieure ou égale à 300 jours ?

a. 0,45 b. 1 c. 0,55 d. On ne peut pas répondre car il manque des données

L'entreprise souhaite estimer la production de personnes de plus de 20 ans parmi ses clients, au niveau de confiance de 95 %, avec un intervalle d'amplitude inférieure à 0,05. Elle interroge pour cela un échantillon aléatoire de clients.

Question 5. Quel est le nombre minimal de clients à interroger ?

a. 40 b. 400 c. 1 600 d. 20

Exercice 2 (4 points)

Commun à tous les candidats

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère deux droites d_1 et d_2 définies par les représentations paramétriques

$$d_1 : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - t \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad d_2 : \begin{cases} x = -5 + 2t' \\ y = -1 + t' \\ z = 5 \end{cases} \quad t' \in \mathbb{R}.$$

On admet que les droites d_1 et d_2 sont non coplanaires.

Le but de cet exercice est de déterminer, si elle existe, une troisième droite Δ qui soit à la fois sécante avec les deux droites d_1 et d_2 et orthogonale à ces deux droites.

1. Vérifier que le point $A(2 ; 3 ; 0)$ appartient à la droite d_1 .
2. Donner un vecteur directeur $\vec{u}_1$ de la droite d_1 et un vecteur directeur $\vec{u}_2$ de la droite d_2 . Les droites d_1 et d_2 sont-elles parallèles ?
3. Vérifier que le vecteur $\vec{v}(1 ; -2 ; -3)$ est orthogonal aux vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$.
4. Soit P le plan passant par le point A , et dirigé par les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{v}$. On étudie dans cette question l'intersection de la droite d_1 et du plan P .
 - a) Montrer qu'une équation cartésienne du plan P est $5x + 4y - z - 22 = 0$.
 - b) Montrer que la droite d_2 coupe le plan P au point $B(3 ; 3 ; 5)$.
5. On considère maintenant la droite Δ dirigée par le vecteur $\vec{v}(1 ; -2 ; -3)$, et passant par le point $B(3 ; 3 ; 5)$.
 - a) Donner une représentation paramétrique de cette droite Δ .
 - b) Les droites d_1 et Δ sont-elles sécantes ? Justifier la réponse.
 - c) Expliquer pourquoi la droite Δ répond au problème posé.

Exercice 3 (6 points)

Commun à tous les candidats

La pharmacocinétique étudie l'évolution d'un médicament après son administration dans l'organisme en mesurant sa concentration plasmatique, c'est-à-dire sa concentration dans le plasma. On étudie dans cet exercice l'évolution de la concentration plasmatique chez un patient d'une même dose de médicament, en envisageant différents modes d'administration.

PARTIE A. ADMINISTRATION PAR VOIE INTRAVEINEUSE

On note $f(t)$ la concentration plasmatique, exprimée en microgramme par litre (μgL^{-1}), du médicament, au bout de t heures après son administration par voie intraveineuse. Le modèle mathématique est

$$f(t) = 20e^{-0,1t}$$

avec $t \in [0 ; +\infty[$. La concentration plasmatique initiale du médicament est donc $f(0) = 20 \mu\text{gL}^{-1}$.

1. La demi-vie du médicament est la durée (en heure) après laquelle la concentration plasmatique du médicament est égale à la moitié de la concentration initiale. Déterminer cette demi-vie, noté $t_{0,5}$.
2. On estime que le médicament est éliminé dès que la concentration plasmatique est inférieure à $0,2 \mu\text{gL}^{-1}$. Déterminer le temps à partir duquel le médicament est éliminé. On donnera le résultat arrondi au dixième.
3. En pharmacocinétique, on appelle ASC (ou « aire sous la courbe »), en $\mu\text{gL}^{-1}\text{h}$, le nombre $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(x) dt$. Vérifier que pour ce modèle, l'ASC est égal à $200 \mu\text{gL}^{-1}\text{h}$.

PARTIE B. ADMINISTRATION PAR VOIE ORALE

On note $g(t)$ la concentration plasmatique du médicament, exprimée en microgramme par litre (μgL^{-1}), au bout de t heures après ingestion par voie orale. Le modèle mathématique est

$$g(t) = 20(e^{-0,1t} - e^{-t})$$

avec $t \in [0; +\infty[$. Dans ce cas, l'effet du médicament est retardé, puisque la concentration plasmatique initiale est égale à $g(0) = 0 \mu\text{gL}^{-1}$.

1. Démontrer que, pour tout t de l'intervalle $[0; +\infty[$, on a

$$g'(t) = 20e^{-t}(1 - 0,1e^{0,9t}).$$

2. Étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $[0; +\infty[$ (on ne demande pas la limite en $+\infty$). En déduire la durée après laquelle la concentration plasmatique du médicament est maximale. On donnera le résultat à la minute près.

PARTIE C. ADMINISTRATION RÉPÉTÉE PAR VOIE INTRAVEINEUSE

On décide d'injecter à intervalles de temps réguliers de la même dose de médicament par voie intraveineuse. L'intervalle de temps (en heure) entre deux injections est choisi égal à la demi-vie du médicament, c'est-à-dire au nombre $t_{0,5}$ qui a été calculé en A-1. Chaque nouvelle injection entraîne une hausse de la concentration plasmatique de $20 \mu\text{gL}^{-1}$. On note u_n la concentration plasmatique

du médicament immédiatement après la n -ième injection. Ainsi, $u_1 = 20$ et, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a

$$u_{n+1} = 0,5u_n + 20.$$

On remarque qu'avec ce modèle, la concentration initiale du médicament après la première injection, soit $20 \mu\text{gL}^{-1}$, est analogue à celle donnée par le modèle de la partie A, soit $f(0)$.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$, $u_n = 40 - 40 \times 0,5^n$.
2. Déterminer la limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.
3. On considère que l'équilibre est atteint dès que la concentration plasmatique dépasse $38 \mu\text{gL}^{-1}$. Déterminer le nombre minimal d'injections nécessaires pour atteindre cet équilibre.

Exercice 4 (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Pour tout entier $n \geq 4$, on considère P_n un polygone régulier à n côtés, de centre O et dont l'aire est égale à 1. On admet qu'un tel polygone est constitué de n triangles superposables à un triangle OA_nB_n donné, isocèle en O . On note $r_n = OA_n$ la distance entre le centre O et le sommet A_n d'un tel polygone.

PARTIE A. ÉTUDE DU CAS PARTICULIER $n = 6$

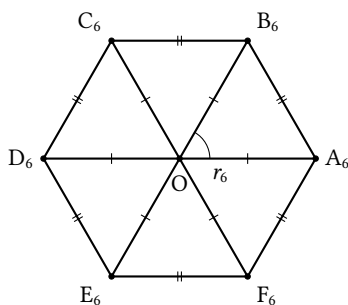
On a représenté un polygone P_6 sur la figure [1a page suivante](#).

1. Justifier le fait que le triangle OA_6B_6 est équilatéral, et que son aire est égale à $\frac{1}{6}$.
2. Exprimer en fonction de r_6 la hauteur du triangle OA_6B_6 issue du sommet B_6 .
3. En déduire que

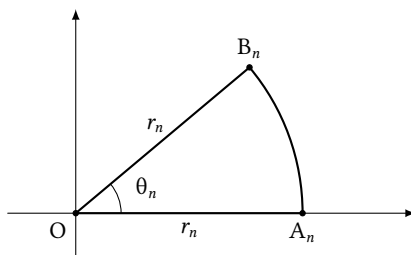
$$r_6 = \sqrt{\frac{2}{3\sqrt{3}}}.$$

PARTIE B. CAS GÉNÉRAL AVEC $n \geq 4$

Dans cette partie, on considère le polygone P_n , avec $n \geq 4$, construit de telle sorte que le point A_n soit situé sur l'axe des réel, et ait pour affixe r_n (voir la



(a)



(b)

figure 1b). On note alors $r_n e^{i\theta_n}$ l'affixe de B_n , où θ_n est un réel de l'intervalle $]0; \frac{\pi}{2}]$.

1. Exprimer en fonction de r_n et θ_n la hauteur issue de B_n dans le triangle $OA_n B_n$, puis établir que l'aire de ce triangle est égale à

$$\frac{r_n^2}{2} \sin \theta_n.$$

2. On rappelle que l'aire du polygone P_n est égale à 1. Donner, en fonction de n , une mesure de l'angle $(\vec{OA_n}, \vec{OB_n})$, puis démontrer que

$$r_n = \sqrt{\frac{2}{n \sin \frac{2\pi}{n}}}.$$

PARTIE C. ÉTUDE DE LA SUITE (r_n)

On considère la fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle $]0; \pi[$ par

$$f(x) = \frac{x}{\sin x}.$$

Ainsi, le nombre r_n , défini dans la partie B pour $n \geq 4$, s'exprime à l'aide de la fonction f par

$$r_n = \sqrt{\frac{1}{\pi} f\left(\frac{2\pi}{n}\right)}.$$

On admet que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0; \pi[$.

1. Montrer que la suite (r_n) est décroissante. On pourra pour cela commencer par démontrer que pour tout $n \geq 4$, on a

$$0 < \frac{2\pi}{n+1} < \frac{2\pi}{n} < \pi.$$

2. En déduire que la suite (r_n) converge. On ne demande pas de déterminer sa limite L , et on admet dans la suite de l'exercice que $L = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$.
3. On considère l'algorithme de la figure 2.

Variables	n est un nombre entier
Traitement	n prend la valeur 4 Tant que $\sqrt{\frac{2}{n \sin \frac{2\pi}{n}}} > 0,58$ faire n prend la valeur $n + 1$ Fin Tant que
Sortie	Afficher n

FIGURE 2

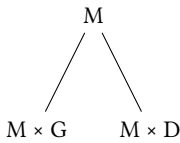
Quelle valeur numérique de n va afficher en sortie cet algorithme ?

Exercice 4 (5 points)

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

L'arbre de Stern-Brocot a été découvert séparément par le mathématicien allemand Moritz Abraham Stern (1858) et par Achille Brocot (1861), horloger français qui l'a utilisé pour concevoir des systèmes d'engrenages avec un rapport entre rouages proche d'une valeur souhaitée. Cet exercice aborde la méthode avec les matrices carrées.

On considère les deux matrices $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On construit un arbre descendant à partir d'une matrice initiale, de la façon suivante : de chaque matrice carrée M de l'arbre partent deux nouvelles branches vers les deux autres matrices $M \times G$ (à gauche) et $M \times D$ (à droite). Ces deux nouvelles matrices sont appelées les matrices filles de M .



Dans la méthode considérée, on prend comme matrice initiale la matrice $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les deux matrices manquantes A et B, dans la troisième ligne de l'arbre de Stern-Brocot de la figure 3.

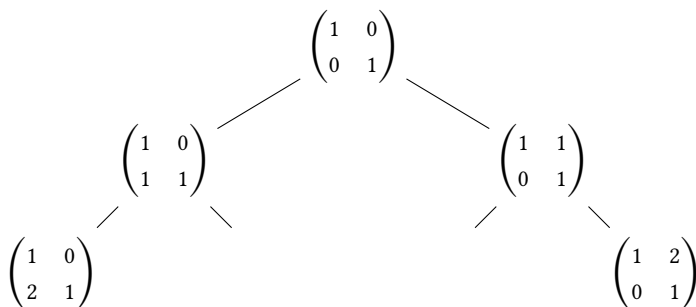


FIGURE 3

Dans la suite de l'exercice, on admet que pour toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ de l'arbre de Stern-Brocot, les nombres a, b, c, d sont des entiers vérifiant $b + d \neq 0$.

2. On associe à une matrice $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ de l'arbre de Stern-Brocot la fraction $\frac{a+c}{b+d}$. Montrer que, dans cette association, le trajet « gauche-droite-gauche » à partir de la matrice initiale dans l'arbre, aboutit à une matrice correspondant à la fraction $\frac{3}{5}$.
3. Soit $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ une matrice de l'arbre. On rappelle que a, b, c, d sont des entiers. On note $\Delta_M = ad - bc$ la différence des produits diagonaux de cette matrice.
 - a) Montrer que si $ad - bc = 1$, alors $d(a + c) - c(b + d) = 1$.
 - b) En déduire que si $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est une matrice de l'arbre de Stern-Brocot telle que $\Delta_M = ad - bc = 1$, alors $\Delta_{M \times G} = 1$, c'est-à-dire que la différence des produits diagonaux de la matrice $M \times G$ est aussi égale à 1. On admet de même que $\Delta_{M \times D} = 1$, et que toutes les autres matrices N de l'arbre de Stern-Brocot vérifient l'égalité $\Delta_N = 1$.

4. Dédurre de la question précédente que toute fraction associée à une matrice de l'arbre de Stern-Brocot est irréductible.
5. Soit m et n deux entiers naturels non nuls premiers entre eux. Ainsi la fraction $\frac{m}{n}$ est irréductible. On considère l'algorithme de la figure 4.

Variables	m et n sont des entiers naturels non nuls premiers entre eux
Traitement	Tant que $m \neq n$ faire Si $m < n$ Afficher « Gauche » n prend la valeur $n - m$ Sinon Afficher « Droite » m prend la valeur $m - n$

FIGURE 4

- a) Recopier et compléter le tableau 2 page 83, indiquer ce qu'affiche l'algorithme lorsqu'on le fait fonctionner avec les valeurs $m = 4$ et $n = 7$.

Affichage		Gauche	...	...	...
m	4	...	...	...	...
n	7	...	...	...	...

TABLE 1

- b) Conjecturer le rôle de cet algorithme. Vérifier par un calcul matriciel le résultat fourni avec les valeurs $m = 4$ et $n = 7$.



Exercice 1*Commun à tous les candidats*

Question 1. Quelle est la probabilité, arrondie au centième, de l'événement « la masse du sachet est comprise entre 170 et 180 g » ?

Réponse b : 0,96.

Explication. On a

$$\begin{aligned} P(170 \leq X \leq 180) &= P(\mu - 5 \leq X \leq \mu + 5) \\ &= 1 - P(X \leq \mu - 5) - P(X \geq \mu + 5). \end{aligned}$$

Or $P(X \leq \mu - 5) = P(X \geq \mu + 5)$, donc

$$P(170 \leq X \leq 180) = 1 - 2P(X \leq \mu - 5) = 1 - 2 \times 0,02 = 0,96.$$

On pouvait aussi s'en sortir en calculant l'écart-type. On a $P(X \leq 170) = P(Z \leq -5/\sigma)$ où Z est la variable aléatoire centrée réduite $(X - 175)/\sigma$. Avec l'aide de la calculatrice, on obtient $\sigma \approx 2,434\,572$. Nous pouvons maintenant calculer $P(170 \leq X \leq 180)$. On trouve 0,96.

Question 2. Sur un échantillon aléatoire de 50 bonbons issus de la machine A, quelle est la probabilité, arrondie au centième, qu'au moins 2 bonbons soient déformés ?

Réponse a : 0,72.

Explication. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de bonbons déformés parmi les 50 bonbons issus de la machine A. Elle suit la loi binomiale $B(50; 0,05)$. On a donc

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X < 2) \\ &= 1 - P(X = 0) - P(X = 1) \\ &= 1 - \binom{50}{0} 0,95^{50} - \binom{50}{1} 0,05 \times 0,95^{49} \\ &\approx 0,72. \end{aligned}$$

Question 3. Quelle est la probabilité, arrondie au centième, qu'il soit produit par la machine B ?

Réponse : 0,44.

Explication. De la formule des probabilités totales, on déduit

$$\mathbb{P}_D(B) = \frac{\mathbb{P}(D)\mathbb{P}_B(D)}{\mathbb{P}(B)\mathbb{P}_B(D) + \mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(D)} = \frac{2/3 \times 0,02}{2/3 \times 0,02 + 1/3 \times 0,05} \approx 0,44.$$

Question 4. Quelle est la probabilité, arrondie au centième, que la durée de fonctionnement de la machine soit inférieure ou égale à 300 jours ?

Réponse : 0,45.

Explication. Soit λ le paramètre de la loi de Y . On a $E(Y) = 500$ et $E(Y) = 1/\lambda$, donc $\lambda = 1/500$. La probabilité demandée est égale à

$$\mathbb{P}(Y \leq 300) = 1 - e^{-300/500} \approx 0,45.$$

Question 5. Quel est le nombre minimal de clients à interroger ?

Réponse : 1 600.

Explication. Soit f la proportion de personnes de plus de 20 ans dans l'échantillon de taille n . Sous réserve que n et f vérifient certaines conditions, l'intervalle de confiance au seuil de confiance de 95 % est $[f - 1/\sqrt{n}; f + 1/\sqrt{n}]$. Son amplitude est égale à $2/\sqrt{n}$. Le nombre minimal de clients à interroger est donc la plus petite solution sur $\mathbb{N}$ de l'inéquation $2/\sqrt{n} \leq 0,05$. On trouve $n \geq (2/0,05)^2 = 1\,600$.

Exercice 2

Commun à tous les candidats

1. Le point A appartient à la droite d_1 si et seulement si il existe un réel t tel que

$$\begin{cases} 2 + t = 2 \\ 3 - t = 3 \\ t = 0. \end{cases}$$

Il est clair que $t = 0$ convient.

2. Les vecteurs $\vec{u}_1(1; -1; 1)$ et $\vec{u}_2(2; 1; 5)$ sont des vecteurs directeurs des droites d_1 et d_2 respectivement. Ils ne sont pas colinéaires ; en effet, leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles, par exemple $1 \times 1 - (-1) \times 2 \neq 0$. Par conséquent, les droites d_1 et d_2 ne sont pas parallèles.

3. Dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on a

$$\vec{v} \cdot \vec{u}_1 = 1 \times 1 + (-2) \times (-1) + (-3) \times 1 = 0,$$

donc le vecteur $\vec{v}$ est orthogonal au vecteur $\vec{v}_1$. De même, on montre que le vecteur $\vec{u}$ est orthogonal au vecteur $\vec{v}_2$.

4. a) Soit P' le plan d'équation cartésienne $5x + 4y - z - 22 = 0$. Le vecteur $\vec{n}(5; 4; -1)$ est un vecteur normal au plan P' . Comme $\vec{n} \cdot \vec{u}_1 = 0$, $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$ et que les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, le vecteur $\vec{n}$ est également un vecteur normal au plan P , ainsi les plans P et P' sont parallèles. Les coordonnées du point A vérifie l'équation du plan P' , donc $A \in P'$. Les deux plans parallèles P et P' ayant un point en commun sont égaux, donc une équation cartésienne du plan P est $5x + 4y - z - 22 = 0$.

Solution alternative. Le vecteur $\vec{n}(5; 4; -1)$ est orthogonal aux deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}_1$ et $\vec{v}$ car $\vec{n} \cdot \vec{u}_1 = 0$ et $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$, donc $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan P . Soit $M(x; y; z)$ un point de l'espace. Alors $M \in P$ si et seulement si les vecteurs $\vec{AM}(x - 2; y - 3; z)$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux. Or $\vec{AM} \cdot \vec{n} = 5(x - 2) + 4(y - 3) - z = 5x + 4y - z - 22$, par conséquent une équation cartésienne du plan P est

$$5x + 4y - z - 22 = 0.$$

- b) Déterminer l'intersection de la droite d_2 et du plan P revient à chercher les points de coordonnées $(-5 + 2t; -1 + t; 5)$, où $t \in \mathbb{R}$, qui appartiennent au plan P . Ce sont ceux dont le paramètre t vérifie l'équation

$$5(-5 + 2t) + 4(-1 + t) - 5 - 22 = 0,$$

ou après simplification, $14t - 56 = 0$, dont l'unique solution est $t = 4$. L'intersection de la droite d_2 et du plan P est donc le point de coordonnées $(-5 + 2 \times 4; -1 + 4; 5) = (3; 3; 5)$. Il s'agit bien du point B .

5. a) Une représentation paramétrique de la droite Δ est

$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 3 - 2t \\ z = 5 - 3t. \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

- b) L'intersection des droites d_1 et Δ est l'ensemble des points de d_1 , donc les points de coordonnées $(2 + t; 3 - t; t)$ où $t \in \mathbb{R}$, qui appartiennent à Δ , c'est-à-dire tel qu'il existe un réel s vérifiant le système

$$\begin{cases} 2 + t = 3 + s \\ 3 - t = 3 - 2s \\ t = 5 - 3s. \end{cases}$$

Substituons $5 - 3s$ à t dans la première équation, nous obtenons ainsi l'équation affine $2 + (5 - 3s) = 3 + s$ dont la solution est $s = 1$. La troisième équation donne $t = 2$. Ces valeurs de s et t satisfont la deuxième équation. Nous en déduisons que les droites d_1 et Δ sont sécantes.

- c) La droite Δ répond au problème posé car :
- les droites Δ et d_1 sont sécantes (question 5-b);
 - le point B appartient à droite Δ (définition de Δ) et à la droite d_2 (question 4-b), donc les droites Δ et d_2 sont sécantes;
 - la droite Δ est orthogonale aux droites d_1 et d_2 (question 3).

Exercice 3

Commun à tous les candidats

PARTIE A. ADMINISTRATION PAR VOIE INTRAVINEUSE

1. *Remarque.* Une fois de plus, la question est mal posée. En effet, on nous demande de déterminer un réel $t_{0,5}$ tel que $f(t) = f(0)/2$ pour tout réel $t \geq t_{0,5}$. L'existence d'un tel réel implique que la fonction f est constante sur l'intervalle $[t_{0,5}; +\infty[$. La fonction f étant strictement décroissante, la demi-vie n'existe donc pas ! La définition correcte de la demi-vie telle que l'on peut la trouver sur Wikipédia¹ est :

Demi-vie En pharmacologie, la demi-vie désigne [...] le temps nécessaire pour que la concentration d'une substance contenue dans un système biologique soit diminuée de la moitié de sa valeur initiale (par exemple la concentration d'un médicament dans le plasma sanguin).

1. fr.wikipedia.org/wiki/Demi-vie

La demi-vie du médicament est la solution sur $[0; +\infty[$ de l'équation $f(t) = f(0)/2$, c'est-à-dire $e^{-0,1t} = 1/2$. Les deux membres de l'équation sont strictement positifs, elle est donc équivalente à l'équation $-0,1t = \ln(1/2)$ obtenue en prenant le logarithme népérien de chacun de ses membres. Comme $\ln(1/2) = -\ln 2$, nous trouvons $t = 10 \ln 2$. La demi-vie du médicament est

$$t_{0,5} = 10 \ln 2 \quad (\text{environ } 6,93 \text{ h}).$$

- Nous devons résoudre l'équation $f(t) \neq 0,2$. Comme la fonction f est décroissante, car composée de la fonction décroissante $t \mapsto -0,1t$ avec la fonction exponentielle, il suffit de résoudre l'équation $f(t) = 0,2$. Sa résolution se fait comme à la question précédente ; on trouve $t = 20 \ln 10$. Le médicament est éliminée au bout de 46,1 h à 0,1 h près.
- La fonction f est de la forme $-200u'e^u$ où u est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $u(t) = -0,1t$, donc une primitive de la fonction f est la fonction F définie sur $[0; +\infty[$ par $F(t) = -200e^{u(t)} = -200e^{-0,1t}$. Soit x un réel positif. Alors

$$\int_0^x f(t) dt = F(x) - F(0) = -200e^{-0,1x} + 200.$$

De $\lim_{x \rightarrow +\infty} -0,1x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = 0$, nous déduisons

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) dt = 200.$$

L'ASC du modèle est bien égal à $200 \mu\text{gL}^{-1}\text{h}$.

PARTIE B. ADMINISTRATION PAR VOIE ORALE

- Pour tout réel $t \in [0; +\infty[$, on a

$$\begin{aligned} g'(t) &= 20(-0,1e^{-0,1t} + e^{-t}) \\ &= 20e^{-t} \left(1 - 0,1 \frac{e^{-0,1t}}{e^{-t}} \right) \\ &= 20e^{-t} (1 - 0,1e^{(-0,1+1)t}) \\ &= 20e^{-t} (1 - 0,1e^{0,9t}). \end{aligned}$$

2. La fonction exponentielle est à valeurs strictement positives, donc le signe de $g'(t)$ est le signe de $1 - 0,1e^{0,9t}$. Or $1 - 0,1e^{0,9t} = 0$ si et seulement si $e^{0,9t} = 10$. En composant avec la fonction logarithme, nous obtenons $t = \frac{10}{9} \ln 10$. De plus, la fonction $t \mapsto 1 - 0,1e^{0,9t}$ est strictement décroissante car sa dérivée, $t \mapsto -0,09e^{0,9t}$, est à valeurs strictement négatives. Nous en déduisons le tableau de variations de la fonction g de la figure 5.

x	0	$-\frac{10}{9} \ln 10$	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	0	$18 \times 10^{-1/9}$	

FIGURE 5 – Tableau de variations de la fonction g .

La fonction g admet un maximum global en $\frac{9}{10} \ln 10$ et dont la valeur est

$$\begin{aligned}
 g\left(\frac{9}{10} \ln 10\right) &= 20(e^{-(\ln 10)/9} - e^{-10(\ln 10)/9}) \\
 &= 20 \times (10^{-1/9} - 10^{-10/9}) \\
 &= 20 \times 10^{-1/9} \times (1 - 10^{-1}) \\
 &= 18 \times 10^{-1/9}.
 \end{aligned}$$

Nous en déduisons que la concentration plasmatique est, à la minute près, maximale au bout de 154 min.

PARTIE C. ADMINISTRATION RÉPÉTÉE PAR VOIE INTRAVEINEUSE

1. Démontrons par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$u_n = 40 - 40 \times 0,5^n. \quad (1)$$

Initialisation. On a $40 - 40 \times 0,5^1 = 20$ et $u_1 = 20$, donc l'égalité (1) est vraie pour $n = 1$.

Hérédité. Supposons (1) vraie pour un entier $n = k \geq 1$, c'est-à-dire

$$u_k = 40 - 40 \times 0,5^k$$

et montrons que (1) est alors vraie pour $n = k + 1$, c'est-à-dire

$$u_{k+1} = 40 - 40 \times 0,5^{k+1}.$$

Partons de la relation de récurrence

$$u_{k+1} = 0,5u_k + 20$$

et appliquons l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= 0,5(40 - 40 \times 0,5^k) + 20 \\ &= 20 - 40 \times 0,5^{k+1} + 20 \\ &= 40 - 40 \times 0,5^{k+1}. \end{aligned}$$

L'hérédité est démontrée.

Conclusion. Le principe de récurrence nous permet de conclure que

$$u_{n+1} = 0,5u_n + 20$$

pour tout entier $n \geq 1$.

Solution alternative. L'équation affine $x = 0,5x + 20$ obtenue en substituant x à u_n et u_{n+1} dans

$$u_{n+1} = 0,5u_n + 20 \tag{2}$$

a pour solution 40. Nous avons donc

$$40 = 0,5 \times 40 + 20. \tag{3}$$

Soustrayons membre à membre (3) à (2). L'égalité ainsi obtenue,

$$u_{n+1} - 40 = 0,5(u_n - 40),$$

montre que la suite $(u_n - 40)_{n \geq 1}$ est géométrique de raison 0,5 et de premier terme $u_1 - 40 = -20$, d'où $u_n - 40 = -20 \times 0,5^{n-1} = -40 \times 0,5^n$, puis

$$u_n = 40 - 40 \times 0,5^n$$

pour tout entier $n \geq 1$.

2. Comme $-1 < 0,5 < 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,5^n = 0$, puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} 40 \times 0,5^n = 0$, donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 40.$$

3. Le nombre minimal d'injections nécessaires pour atteindre l'équilibre est la plus petite solution de l'inéquation $u_n > 48$ sur $\mathbb{N}^*$. D'après la question précédente, il s'agit de résoudre l'inégalité

$$40 - 40 \times 0,5^n > 38$$

qui, en remarquant que $0,5^n = 1/2^n$, devient

$$\frac{1}{2^n} < 1/20,$$

puis

$$2^n > 20.$$

Comme $2^4 = 16$ et $2^5 = 32$, nous pouvons conclure que 5 injections sont nécessaires et suffisantes pour atteindre l'équilibre.

Exercice 4

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

PARTIE A. ÉTUDE DU CAS PARTICULIER $n = 6$

1. Les six triangles OA_6B_6 , OB_6C_6 , $\dots$, OF_6A_6 vérifient l'égalité

$$\widehat{A_6OB_6} + \widehat{B_6OC_6} + \dots + \widehat{F_6OA_6} = 2\pi,$$

et ils sont superposables, donc on a également

$$\widehat{A_6OB_6} = \widehat{B_6OC_6} = \dots = \widehat{F_6OA_6}$$

Nous en déduisons que l'angle au centre est égale à

$$\widehat{A_6OB_6} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}.$$

La somme des angles dans un triangle étant égale à π , nous avons donc

$$\widehat{OA_6B_6} + \widehat{OB_6A_6} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}.$$

Enfin, puisque le triangle OA_6B_6 est isocèle en O, on a $\widehat{OA_6B_6} = \widehat{OB_6A_6} = \frac{\pi}{3}$.
Le triangle OA_6B_6 a trois angles de même mesure, il est donc équilatéral.

L'aire de l'hexagone P_6 est égale à 1, mais aussi à la somme des aires des six triangles superposables OA_6B_6 , OB_6C_6 , $\dots$, OF_6A_6 , par conséquent, l'aire du triangle OA_6B_6 est égale à $1/6$.

2. Pour tout entier $n \geq 4$, notons H_n le pied de la hauteur issue du sommet B_n du triangle OA_nB_n et posons $h_n = H_nB_n$.

Dans le triangle OH_6A_6 , rectangle en H_6 , on a $\sin \hat{O} = h_6/r_6$. Nous savons que $\hat{O} = \pi/3$, donc on a aussi $\sin \hat{O} = \sqrt{3}/2$. La hauteur du triangle OA_6B_6 s'en déduit immédiatement :

$$h_6 = \frac{\sqrt{3}}{2} r_6.$$

Remarque. Nous pouvions également calculer la hauteur en appliquant le théorème de Pythagore au triangle rectangle OB_6H_6 et en remarquant que H_6 est le milieu de segment $[OA_6]$.

3. L'aire du triangle OA_6B_6 est égale à $r_6 h_6 / 2 = \sqrt{3} r_6^2 / 4$. À la question A-1, nous avons montré qu'elle est aussi égale à $1/6$, nous en déduisons donc que $\sqrt{3} r_6^2 / 4 = 1/6$, d'où nous tirons

$$r_6 = \sqrt{\frac{2}{3\sqrt{3}}}.$$

PARTIE B. CAS GÉNÉRAL AVEC $n \geq 4$

1. Dans le triangle rectangle OH_nB_n , on a $\sin \theta_n = h_n/r_n$, donc la hauteur du triangle OA_nB_n issue de B_n est égale à

$$h_n = r_n \sin \theta_n$$

et l'aire du triangle OA_nB_n est égale à

$$\frac{h_n r_n}{2} = \frac{r_n^2}{2} \sin \theta_n.$$

2. Le polygone est constitué de n triangles superposables au triangle OA_nB_n dont la somme des angles en O est égale à 2π , si bien que l'angle au centre du polygone P_n est égale à

$$(\overrightarrow{OA_n}, \overrightarrow{OB_n}) = \frac{2\pi}{n},$$

L'aire des n triangles qui constituent le polygone sont superposables, ils ont donc la même aire, égale à $1/n$. En l'égalant à la formule établie à la question précédente, nous obtenons

$$r_n = \sqrt{\frac{2}{n \sin \theta_n}} = \sqrt{\frac{2}{n \sin \frac{2\pi}{n}}}.$$

PARTIE C. ÉTUDE DE LA SUITE (r_n)

1. Soit $n \geq 4$ un entier. Partons de l'inégalité

$$4 \leq n < n+1.$$

Comme $2\pi > 0$, la fonction $x \mapsto \frac{2\pi}{x}$ est, comme la fonction inverse, strictement décroissante sur $]0; +\infty[$, donc

$$0 < \frac{2\pi}{n+1} < \frac{2\pi}{n} < \frac{\pi}{2}.$$

Comme $\frac{1}{\pi} > 0$, la fonction $\frac{1}{\pi}f$ est strictement croissante sur $]0; \pi[$, donc

$$\frac{1}{\pi}f\left(\frac{2\pi}{n+1}\right) < \frac{1}{\pi}f\left(\frac{2\pi}{n}\right).$$

Enfin, il ne nous reste plus qu'à composer avec la fonction racine carrée. Elle est strictement croissante, nous obtenons donc l'inégalité

$$r_{n+1} < r_n$$

qui montre que la suite $(r_n)_{n \geq 4}$ est strictement décroissante.

Remarque. Il n'est pas nécessaire d'expliquer que la fonction f prend des valeurs positives avant d'appliquer la racine carrée ; si cela n'était pas le cas, la formule donnant r_n serait fautive.

2. La suite $(r_n)_{n \geq 4}$ est strictement décroissante et minorée (par 0), donc elle converge.
3. L'algorithme calcule le plus petit entier $n \geq 4$ tel que $r_n \leq 0,58$. Comme la suite (r_n) converge vers $1/\sqrt{\pi} = 0,564\dots < 0,58$, l'existence de cet entier est assurée, donc l'algorithme s'exécutera en un temps fini et affichera sa valeur. Avec la calculatrice, on trouve $r_{10} = 0,583\dots$ et $r_{11} = 0,579\dots$. Comme la suite (r_n) est décroissante, l'algorithme affiche 11.

Exercice 4*Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité*

1. Les deux matrices manquantes sont $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times G = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

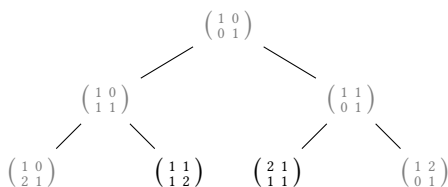


FIGURE 6

2. En partant de la matrice initiale, la destination du trajet « gauche - droite - gauche » est la matrice $A \times G = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, dont la fraction associée est bien $\frac{3}{5}$.
3. a) Si $ad - bc = 1$, alors $d(a + c) - c(b + d) = ad + cd - bc - cd = ad - bc = 1$.
- b) On a $M \times G = \begin{pmatrix} a+c & c \\ b+d & d \end{pmatrix}$, d'où $\Delta_{M \times G} = d(a + c) - c(b + d)$. Comme $\Delta_M = 1$, la question précédente permet de conclure que $\Delta_{M \times G} = 1$.
- c) Soit $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ une matrice de l'arbre de Stern-Brocot et $k > 0$ un entier tel que $k \mid a + c$ et $k \mid b + d$. Alors $k \mid d(a + c)$ et $k \mid c(b + d)$, d'où $k \mid d(a + c) - c(b + d) = \Delta_{M \times G}$. Or $\Delta_N = 1$ pour toutes les matrices de l'arbre de Stern-Brocot, donc $k = 1$, ce qui prouve que le numérateur $a + c$ et le dénominateur $b + d$ de la fraction associée à la matrice M sont premiers entre eux ; en d'autres termes, la fraction associée est irréductible.
- d) *Remarque.* L'algorithme comporte une erreur. Pour le corriger, il faut indenter la dernière ligne afin de l'inclure dans le bloc « Sinon » comme indiqué sur la figure 7 page suivante.
- Voir la table 2 page ci-contre pour l'exécution pas à pas de l'algorithme avec $m = 4$ et $n = 7$.
- e) La sortie de l'algorithme est une suite finie sur l'ensemble des mots {gauche, droite}. Il s'agit manifestement d'un chemin dans l'arbre de Stern-Brocot. Suivons le chemin résultant de l'exécution de l'algorithme

Variables	m et n sont des entiers naturels non nuls premiers entre eux
Traitement	Tant que $m \neq n$ faire Si $m < n$ Afficher « Gauche » n prend la valeur $n - m$ Sinon Afficher « Droite » m prend la valeur $m - n$

FIGURE 7

Affichage		Gauche	Droite	Gauche	Gauche
m	4	4	1	1	1
n	7	3	3	2	1

TABLE 2

avec $m = 4$ et $n = 7$, et partant du nœud racine. Nous obtenons, comme l'indique la table 2, le chemin

gauche - droite - gauche - gauche - gauche

passé par les nœuds dont les matrices sont, dans cet ordre,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Remarquons que la matrice de destination a pour fraction associée $\frac{4}{7}$, ce qui nous invite à formuler la conjecture suivante :

Conjecture. Soient m et n deux entiers naturels non nuls et premiers entre eux. L'algorithme détermine le chemin, dans l'arbre de Stern-Brocot, d'une matrice dont la fraction associée est $\frac{m}{n}$.



Sujet 5

Polynésie

14 juin 2017

Exercice 1 (6 points)*Commun à tous les candidats*

La société Fibration fournit des abonnements Internet et des abonnements de téléphone mobile. Un client de la société Fibration souscrit soit un abonnement Internet, soit un abonnement de téléphone mobile. Il ne cumule pas les deux. En cas de difficulté, la société Fibration propose à ses clients une ligne d'assistance téléphonique : le client doit d'abord signaler s'il est client Internet ou s'il est client mobile puis son appel est mis en attente de réponse par un opérateur.

Les parties A, B et C sont indépendantes. Si nécessaire, les résultats seront arrondis à 10^{-3} .

PARTIE A. DURÉE D'ATTENTE

1. Dans cette question, on s'intéresse à la durée d'attente d'un client Internet lorsqu'il contacte l'assistance téléphonique avant de joindre un opérateur. Une étude permet de modéliser cette durée d'attente en minutes par la variable aléatoire D_1 qui suit la loi exponentielle de paramètre 0,6.
 - a) Quelle est la durée d'attente moyenne que peut espérer un client Internet qui appelle cette ligne d'assistance ?
 - b) Calculer la probabilité que la durée d'attente d'un client Internet choisi au hasard soit inférieure à 5 minutes.
2. Dans cette question, on s'intéresse à la durée d'attente d'un client mobile lorsqu'il contacte l'assistance téléphonique avant de joindre un opérateur. On modélise cette durée d'attente en minutes par la variable aléatoire D_2 qui suit une loi exponentielle de paramètre λ , λ étant un réel strictement positif.
 - a) Sachant que $\mathbb{P}(D_2 \leq 4) = 0,798$, déterminer la valeur de λ .

- b) En prenant $\lambda = 0,4$, peut-on considérer que moins de 10 % des clients mobile choisis au hasard attendent plus de 5 minutes avant de joindre un opérateur ?

PARTIE B. OBTENTION D'UN OPÉRATEUR

Si la durée d'attente avant l'obtention d'un opérateur dépasse 5 minutes, l'appel prend automatiquement fin. Sinon, l'appelant obtient un opérateur.

On choisit un client au hasard qui appelle la ligne d'assistance. On admet que la probabilité que l'appel émane d'un client Internet est 0,7. De plus, d'après la partie A, on prend les données suivantes :

- si l'appel provient d'un client Internet alors la probabilité d'obtenir un opérateur est égale à 0,95 ;
- si l'appel provient d'un client mobile alors la probabilité d'obtenir un opérateur est égale à 0,87.

1. Déterminer la probabilité que le client joigne un opérateur.
2. Un client se plaint que son appel a pris fin après 5 minutes d'attente sans avoir obtenu d'opérateur. Est-il plus probable que ce soit un client Internet ou mobile ?

PARTIE C. ENQUÊTE DE SATISFACTION

La société annonce un taux de satisfaction de 85 % pour ses clients ayant appelé et obtenu un opérateur. Une association de consommateurs souhaite vérifier ce taux et interroge 1 303 personnes. Parmi celles-ci, 1 150 se disent satisfaites. Que pensez-vous du taux de satisfaction annoncé par la société ?

Exercice 2 (5 points)

Commun à tous les candidats

Dans un disque en carton de rayon R , on découpe un secteur angulaire correspondant à un angle de mesure α radians. On superpose les bords afin de créer un cône de révolution. On souhaite choisir l'angle α pour obtenir un cône de volume maximal.

On appelle ℓ le rayon de la base circulaire de ce cône et h sa hauteur. On rappelle que :

- le volume d'un cône de révolution de base un disque d'aire $\mathcal{A}$ et de hauteur h est $\frac{1}{3}\mathcal{A}h$;

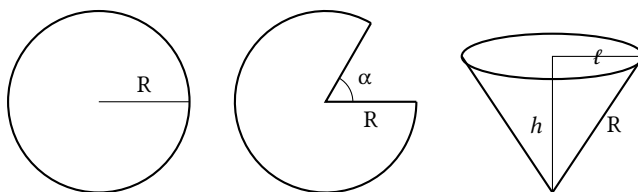


FIGURE 1

— la longueur d'un arc de cercle de rayon r et d'angle θ , exprimé en radians, est $r\theta$.

1. On choisit $R = 20$ cm.

a) Montrer que le volume du cône, en fonction de sa hauteur h , est

$$V(h) = \frac{1}{3}\pi(400 - h^2)h.$$

b) Justifier qu'il existe une valeur de h qui rend le volume du cône maximum. Donner cette valeur.

c) Comment découper le disque en carton pour avoir un volume maximum ? Donner un arrondi de α au degré près.

2. L'angle α dépend-t-il du rayon R du disque en carton ?

Exercice 3 (4 points)

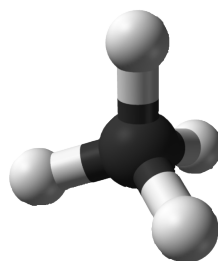
Commun à tous les candidats

Les interactions électriques conduisent à modéliser la molécule de méthane CH_4 de la façon suivante :

- les noyaux d'atomes d'hydrogène occupent les positions des quatre sommets d'un tétraèdre régulier ;
- le noyau de carbone au centre de la molécule est à égale distance des quatre atomes d'hydrogène.

L'objectif est de déterminer une mesure de l'angle entre deux liaisons carbone-hydrogène.

Un tétraèdre régulier est un polyèdre dont les quatres faces sont des triangles équilatéraux.



- Justifier qu'on peut inscrire ce tétraèdre dans un cube ABCDEFGH en positionnant deux atomes d'hydrogène sur les sommets A et C du cube et les deux autres atomes d'hydrogène sur deux autres sommets du cube. Représenter la molécule dans le cube de la figure 2.

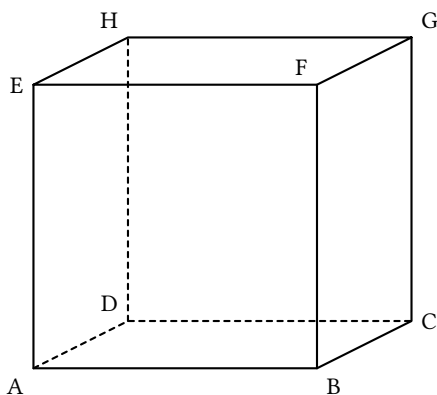


FIGURE 2

- Dans la suite de l'exercice, on pourra travailler dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.
- Démontrer que l'atome de carbone est au centre Ω du cube.
 - Déterminer l'arrondi au dixième de degré de la mesure de l'angle que forment entre elles les liaisons carbone-hydrogène c'est-à-dire l'angle $\widehat{A\Omega C}$.

Exercice 4 (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On s'intéresse à la chute d'une goutte d'eau qui se détache d'un nuage sans vitesse initiale. Un modèle très simplifié permet d'établir que la vitesse instantanée verticale, exprimée en ms^{-1} , de chute de la goutte d'eau en fonction de la durée de chute t est donnée par la fonction v définie ainsi : pour tout réel positif ou nul t ,

$$v(t) = 9,81 \frac{m}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right);$$

la constante m est la masse de la goutte en milligramme et la constante k est un coefficient strictement positif lié au frottement de l'air.

On rappelle que la vitesse instantanée est la dérivée de la position.

Les parties A et B sont indépendantes.

PARTIE A. CAS GÉNÉRALE

1. Déterminer les variations de la vitesse de la goutte d'eau.
2. La goutte ralentit-elle au cours de sa chute ?
3. Montrer que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = 9,81 \frac{m}{k}.$$

Cette limite s'appelle vitesse limite de la goutte.

4. Un scientifique affirme qu'au bout d'une durée de chute égale à $\frac{5m}{k}$, la vitesse de la goutte dépasse 99 % de sa vitesse limite. Cette affirmation est-elle correcte ?

PARTIE B

Dans cette partie, on prend $m = 6$ et $k = 3,9$.

À un instant donné, la vitesse instantanée de cette goutte est de 15 ms^{-1} .

1. Depuis combien de temps la goutte s'est-elle détachée de son nuage ? Arrondir la réponse au dixième de seconde.
2. En déduire la vitesse moyenne de cette goutte entre le moment où elle s'est détachée du nuage et l'instant où on a mesuré sa vitesse. Arrondir la réponse au dixième de ms^{-1} .

Exercice 4 (5 points)

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les parties A et B sont indépendantes.

Une personne a mis au point un procédé de cryptage suivant :

- À chaque lettre de l'alphabet, on associe un entier n comme indiqué table 1 [page suivante](#).
- On choisit deux entiers a et b compris entre 0 et 25.
- Tout nombre entier n compris entre 0 et 25 est codé par le reste de la division euclidienne de $an + b$ par 26.

La table 2 [page suivante](#) donne les fréquences f en pourcentage des lettres utilisées dans un texte écrit en français.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

TABLE 1

Lettre	A	B	C	D	E	F	G	H	I
f	9,42	1,02	2,64	3,38	15,87	0,94	1,04	0,77	8,41
Lettre	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
f	0,89	0,00	5,33	3,23	7,14	5,13	2,86	1,06	6,46
Lettre	S	T	U	V	W	X	Y	Z	
f	7,90	7,26	6,24	2,15	0,00	0,30	0,24	0,32	

TABLE 2

PARTIE A

Un texte écrit en français et suffisamment long a été codé selon ce procédé. L'analyse fréquentielle du texte codé a montré qu'il contient 15,9 % de O et 9,4 % de E. On souhaite déterminer les nombres a et b qui ont permis le codage.

1. Quelles lettres ont été codées par les lettres O et E ?
2. Montrer que les entiers a et b sont solutions du système

$$\begin{cases} 4a + b \equiv 14 & (26) \\ b \equiv 4 & (26). \end{cases}$$

3. Déterminer tous les couples d'entiers (a, b) ayant pu permettre le codage de ce texte.

PARTIE B

1. On choisit $a = 22$ et $b = 4$.

- a)* Coder les lettres K et X.
 - b)* Ce codage est-il envisageable ?
2. On choisit $a = 9$ et $b = 4$.
- a)* Montrer que pour tous entiers naturels n et m , on a

$$m \equiv 9n + 4 \pmod{26} \iff n \equiv 3m + 14 \pmod{26}.$$

- b)* Décoder le mot AQ.



Exercice 1*Commun à tous les candidats***PARTIE A. DURÉE D'ATTENTE**

1. a) La durée d'attente moyenne est l'espérance de la variable aléatoire D_1 , soit $1/0,6 \text{ min} = 100 \text{ s}$.
- b) La probabilité que la durée d'attente d'un client Internet soit inférieure à 5 min est, à 10^{-3} près, égale à

$$P(D_1 < 5) = 1 - e^{-5/0,6} \approx 0,950.$$

2. De $P(D_2 \leq 4) = 0,798$ et $P(D_2 \leq 4) = 1 - e^{-4\lambda}$, on tire $e^{-4\lambda} = 0,202$ puis, en prenant le logarithme des deux membres, nous obtenons $-4\lambda = \ln 0,202$ qui donne immédiatement

$$\lambda = -\frac{1}{4} \ln 0,202 \approx 0,4.$$

3. La probabilité qu'un client mobile attendent plus de 5 min est

$$P(D_2 > 5) = 1 - P(D_2 \leq 5) = e^{-5 \times 0,4} = e^{-2} \approx 0,135,$$

ce qui signifie que 13,5 % des clients mobiles attendent plus de 5 min.

PARTIE B

1. Notons I l'événement : « l'appel provient d'un client internet » et O l'événement : « le client joint un opérateur ». On obtient $P(O)$ à l'aide de la formule des probabilités totales :

$$P(O) = P(I)P_I(O) + P(\bar{I})P_{\bar{I}}(O) = 0,7 \times 0,95 + 0,3 \times 0,87 = 0,926.$$

2. On a

$$P_{\bar{O}}(I) = \frac{P(\bar{O} \cap I)}{P(\bar{O})} = \frac{P_I(I)P(I)}{1 - P(O)} = \frac{(1 - P_I(O))P(I)}{1 - P(O)} = \frac{(1 - 0,95) \times 0,7}{1 - 0,926} \approx 0,473.$$

Comme $P_{\bar{O}}(I) < 1/2$, il est plus probable que le client mécontent soit un client mobile.

PARTIE C. ENQUÊTE DE SATISFACTION

Testons l'hypothèse suivante : « La proportion de clients satisfaits parmi ceux qui ont appelé et obtenu un opérateur est $p = 0,85$ ». Soit $n = 1303$ le nombre de clients interrogés. Comme $n \geq 30$, $np = 1303 \times 0,85 \geq 5$ et $n(1 - p) = 1303 \times 0,15 \geq 5$, l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % est

$$\begin{aligned} & \left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} ; p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right] \\ &= \left[0,85 - 1,96\sqrt{\frac{0,85 \times (1 - 0,85)}{1303}} ; 0,85 + 1,96\sqrt{\frac{0,85 \times (1 - 0,85)}{1303}} \right] \\ &\approx [0,830 ; 0,870], \end{aligned}$$

où nous avons arrondi par défaut la borne inférieure et arrondi par excès la borne supérieure. Dans l'échantillon, on a observé un taux de satisfaction égale à $1303/1150 \approx 0,88$ qui n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation asymptotique, nous devons donc rejeter l'hypothèse avec un risque d'erreur de 5 % ; le taux de satisfaction réelle est probablement meilleur que celui annoncé par la société.

Exercice 2

Commun à tous les candidats

1. a) D'après le théorème de Pythagore, le rayon ℓ de la base du cône vérifie la relation $\ell^2 = R^2 - h^2$, donc l'aire de la base du cône est égale à $\pi\ell^2 = \pi(R^2 - h^2)$. Il s'ensuit que le volume du cône en fonction de h est égal à

$$V(h) = \frac{1}{3}\pi(R^2 - h^2)h.$$

où $0 \leq h \leq R$. Étant donné que $R = 20$ cm, nous obtenons bien

$$V(h) = \frac{1}{3}\pi(400 - h^2)h.$$

- b) La fonction V , définie sur l'intervalle $I = [0 ; R]$, est un polynôme, elle est donc dérivable. Sa dérivée,

$$V'(x) = \frac{1}{3}\pi(-2h \times h + (R^2 - h^2)) = \frac{1}{3}\pi(-3h^2 + R^2),$$

est un polynôme du second degré. Vu comme une fonction sur $\mathbb{R}$, ce polynôme admet deux racines réelles : $-\sqrt{R^2/3} = -R/\sqrt{3}$ et $R/\sqrt{3}$. Étant

h	0	$\frac{20}{\sqrt{3}}$	20
Signe de $V'(h)$	+	0	-
Variations de V	$ \begin{array}{ccc} & \frac{16000\sqrt{3}\pi}{27} & \\ 0 \nearrow & & \searrow 0 \end{array} $		

FIGURE 3 – Tableau de variation de la fonction V .

donné que le coefficient de h^2 est négatif, la dérivée est strictement positive entre les racines, d'où le tableau de variation de la fonction V de la figure 3. Nous en déduisons que le volume du cône est maximum pour, et seulement pour, $h = R/\sqrt{3} \approx 11,55$ cm.

- c) Dans cette question, on considère le cône de volume maximum, donc $h = R/\sqrt{3}$. La circonférence de la base du cône est à la fois égale à

$$2\pi l = 2\pi\sqrt{R^2 - h^2} = 2\pi\sqrt{R^2 - R^2/3} = 2\pi R \sqrt{2/3}$$

et

$$R(2\pi - \alpha),$$

d'où nous déduisons l'angle du secteur angulaire en radians,

$$\alpha = 2\pi \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}} \right).$$

En multipliant par $360/(2\pi)$, nous obtenons l'angle en degré, $360(1 - \sqrt{2/3})$, dont une approximation à l'unité près est 66° .

2. Le rayon R n'apparaît pas dans la formule précédente, par conséquent l'angle du secteur angulaire permettant d'obtenir un cône de volume maximum ne dépend pas du rayon du disque en carton.

Exercice 3*Commun à tous les candidats*

1. Le quadrilatère ACFH est un tétraèdre régulier ; en effet, ses six côtés [AC], [AF], [AH], [CF], [CH] et [FH] sont les diagonales d'une face du cube, et ont donc la même longueur. Par conséquent, il suffit de positionner les atomes d'hydrogène au sommet du tétraèdre ACFH, comme sur la figure 4, pour répondre à la question.

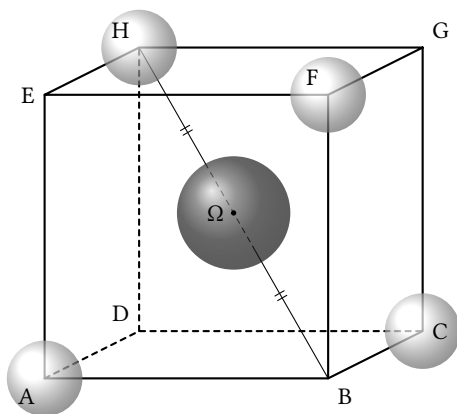


FIGURE 4 – Molécule de méthane inscrite dans un cube

2. L'atome de carbone doit être positionner en un point équidistant des sommets A, C, F et H. Notons Γ ce point et montrons que $\Gamma = \Omega$. Le point Γ appartient à l'intersection des plans médiateurs des côtés du tétraèdre ACFH. Les points B, F et H sont non alignés et équidistants des points A et C, donc le plan (BFH) est le plan médiateur du segment [AC]. De même, (BCH) est le plan médiateur du segment [AF]. Or, la diagonale du cube (BH) appartient aux plans distincts (BFH) et (BCH), donc la diagonale (BH) est l'intersection des plans médiateurs (BFH) et (BCH) ; il s'ensuit que le point Γ appartient à la diagonale (BH) du cube. De même, on démontre que Γ appartient à la diagonale (AG) du cube. Ainsi Γ est l'intersection Ω des deux diagonales (BH) et (AG) ; nous avons démontré que l'atome de carbone doit être positionné au centre Ω du cube.

Remarque. Démontrer que Ω est équidistant des points A, C, F et H serait suffisant s'il s'agissait de : « Démontrer que l'atome de carbone peut être positionné au centre Ω du cube. » Ici, il faut en plus démontrer que l'on n'a pas le choix, c'est-à-dire que Ω est l'unique point équidistant des sommets du tétraèdre ACFH.

3. Le vecteur $\overrightarrow{\Omega A}$ a pour coordonnées $(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2})$ et vecteur $\overrightarrow{\Omega C}$ a pour coordonnées $(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2})$. Calculons

$$\cos \widehat{A\Omega C} = \frac{\overrightarrow{\Omega A} \cdot \overrightarrow{\Omega C}}{\|\overrightarrow{\Omega A}\| \times \|\overrightarrow{\Omega C}\|}.$$

Dans le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, on a

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\Omega A} \cdot \overrightarrow{\Omega C} &= -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}, \\ \|\overrightarrow{\Omega A}\|^2 &= 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4},\end{aligned}$$

et puisque Ω est le milieu du cube,

$$\|\overrightarrow{\Omega C}\| = \|\overrightarrow{\Omega A}\| = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

donc

$$\cos \widehat{A\Omega C} = \frac{-\frac{1}{4}}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = -\frac{1}{3}.$$

À l'aide de la calculatrice, nous obtenons $\widehat{A\Omega C} \approx 109,5^\circ$ à $0,1^\circ$ près.

Exercice 4

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

PARTIE A. CAS GÉNÉRAL

1. La fonction v est dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$, et pour tout réel $t \geq 0$, on a $v'(t) = 9,81e^{-kt/m}$. La fonction dérivée v' est à valeurs strictement positives comme la fonction exponentielle, donc la fonction v est strictement croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

Solution alternative. Soient a et b deux réels tels que $0 \leq a < b$. Comme $-k/m < 0$, on a $0 \geq -ka/m > -kb/m$. Appliquons la fonction exponentielle qui est strictement croissante, $1 \geq e^{-ka/m} > e^{-kb/m}$, puis la fonction affine $x \mapsto 9,81 \frac{m}{k}(1-x)$, strictement décroissante, obtenant ainsi $v(a) < v(b)$, ce qui nous permet de conclure que la fonction v est strictement croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

- Le fait que la fonction v soit strictement croissante signifie que la goutte d'eau accélère au cours de sa chute.
- On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} -kt/m = -\infty$ car $-k/m < 0$, et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-kt/m} = 0$ d'après le théorème de composition des limites. Par suite, $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - e^{-kt/m} = 1$, puis

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} v(t) = 9,81 \frac{m}{k}.$$

- Au bout d'une durée égale à $5m/k$, la vitesse de la goutte d'eau est, en fraction de sa vitesse limite, égale à

$$\frac{v(5m/k)}{9,81m/k} = 1 - e^{-5} = 0,993 \dots,$$

soit plus de 99 % de la vitesse limite ; l'affirmation du scientifique est correcte.

PARTIE B

- Il nous faut résoudre l'équation $v(t) = 15$, c'est-à-dire

$$9,81 \frac{m}{k}(1 - e^{-kt/m}) = 15.$$

Isolons l'exponentielle, nous obtenons ainsi

$$e^{-kt/m} = 1 - \frac{15k}{9,81m}.$$

Supposons que $1 - \frac{15k}{9,81m} > 0$ et prenons le logarithme. Nous obtenons ainsi l'équation

$$-\frac{kt}{m} = \ln\left(1 - \frac{15k}{9,81m}\right),$$

dont la solution est

$$t_1 = -\frac{m}{k} \ln\left(1 - \frac{15k}{9,81m}\right).$$

L'application numérique avec $m = 6$ et $k = 3,9$ donne

$$t_1 = -\frac{6}{3,9} \ln\left(1 - \frac{15 \times 3,9}{9,81 \times 6}\right) = 7,84 \dots$$

La goutte d'eau s'est détachée de son petit nuage il y a 7,8 s.

2. La vitesse moyenne v_m de la goutte, entre le moment où elle s'est détachée de son nuage et l'instant t_1 que nous venons de calculer, est égale à

$$v_m = \frac{1}{t_1} \int_0^{t_1} v(\tau) d\tau.$$

La fonction V définie pour tout réel $t \geq 0$, par $V(t) = 9,81 \frac{m}{k} \left(t + \frac{m}{k} e^{-kt/m}\right)$ est une primitive de la fonction v sur l'intervalle $[0; +\infty[$. On a donc

$$v_m = \frac{1}{t_1} (V(t_1) - V(0)).$$

Calculons un peu :

$$\begin{aligned} V(0) &= 9,81 \left(\frac{m}{k}\right), \\ V(t_1) &= 9,81 \frac{m}{k} \left(t_1 + \frac{m}{k} e^{-kt_1/m}\right) \\ &= 9,81 \frac{m}{k} \left(-\frac{m}{k} \ln\left(1 - \frac{15k}{9,81m}\right) + \frac{m}{k} \left(1 - \frac{15k}{9,81m}\right)\right) \\ &= 9,81 \left(\frac{m}{k}\right)^2 \left(1 - \frac{15k}{9,81m} - \ln\left(1 - \frac{15k}{9,81m}\right)\right) \\ V(t_1) - V(0) &= -9,81 \left(\frac{m}{k}\right)^2 \left(\frac{15k}{9,81m} + \ln\left(1 - \frac{15k}{9,81m}\right)\right) \\ v_m &= 9,81 \frac{m}{k} \left(\frac{15k}{9,81m \ln\left(1 - \frac{15k}{9,81m}\right)} + 1\right) \end{aligned}$$

Passons à l'application numérique avec $m = 6$ et $k = 3,9$:

$$v_m = 9,81 \times \frac{6}{3,9} \left(\frac{15 \times 3,9}{9,81 \times 6 \ln\left(1 - \frac{15 \times 3,9}{9,81 \times 6}\right)} + 1\right) = 12,149 \dots$$

La vitesse moyenne de la goutte d'eau est de $12,1 \text{ ms}^{-1}$ à $0,1 \text{ ms}^{-1}$ près.

Remarque. Il est bien sûr possible d'accélérer les calculs en exploitant un peu mieux les possibilités de la calculatrice, mais pour une fois qu'il y a des calculs pas complètement triviaux...

Exercice 4

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

PARTIE A

1. La table des fréquences indique que la lettre O code la lettre E, et que la lettre E code la lettre A.
2. L'entier r est le reste de la division euclidienne de $an + b$ par 26 si et seulement si $an + b \equiv r \pmod{26}$ et $0 \leq r \leq 25$. De plus, les lettres A, E et O sont représentées par les entiers 0, 4 et 14 respectivement, donc d'après la question A.1, le couple d'entiers (a, b) utilisé par le chiffrement est solution du système

$$\begin{cases} 4a + b \equiv 14 & (26) \\ b \equiv 4 & (26). \end{cases}$$

3. Déterminons tous les couples d'entiers (a, b) compris entre 0 et 25 et solution du système de la question précédente. Le système est équivalent à

$$\begin{cases} 4a \equiv 10 & (26) \\ b \equiv 4 & (26) \end{cases}$$

que nous simplifions en divisant par 2 la première équation, ce qui nous donne

$$\begin{cases} 2a \equiv 5 & (13) \\ b \equiv 4 & (26). \end{cases}$$

L'entier $2a$ est un entier compris entre 0 et 50 de la forme $5 + 13k$ où $k \in \mathbb{Z}$. Bien entendu, pour que $5 + 13k$ soit pair il faut que k soit impair. Ainsi $2a = 18$ ou $2a = 44$. L'équation $b \equiv 4 \pmod{26}$ n'a qu'une solution $b = 4$. Finalement, nous avons trouvé deux couples (a, b) ayant pu servir au codage du texte: $(9, 4)$ et $(22, 4)$.

PARTIE B

1. a) La lettre K est représentée par l'entier $n = 10$. Le reste de la division euclidienne de $an + b = 22 \times 10 + 4 = 224$ par 26 est 16. L'entier 16 code la lettre Q. Donc la lettre K est codée Q.
De même, la lettre X est également codée Q.
- b) Deux lettres étant codées par la même lettre, le codage n'est pas réversible, il n'est donc pas envsageable.
2. a) Pour tous entiers naturels m et n , nous avons les équivalences suivantes :

$$m \equiv 9n + 4 \pmod{26}$$

$$\iff 3m \equiv 27n + 12 \pmod{26} \quad (3 \text{ et } 26 \text{ sont premiers entre eux})$$

$$\iff 3m \equiv n + 12 \pmod{26} \quad (27 \equiv 1 \pmod{26})$$

$$\iff n \equiv 3m - 12 \pmod{26}$$

$$\iff n \equiv 3m + 14 \pmod{26} \quad (14 \equiv -12 \pmod{26}).$$

- b) La lettre A est représentée par l'entier 0. Nous devons donc trouver un entier n tel que $9n + 4 \equiv 0 \pmod{26}$. D'après la question précédente, $n \equiv 14 \pmod{26}$, d'où $n = 14$ qui correspond à la lettre O.

La lettre K est représentée par l'entier 16. L'équation $9n + 4 \equiv 16 \pmod{26}$ donne $n \equiv 3 \times 16 + 14 \equiv 62 \pmod{26}$, d'où $n = 10$ qui correspond à la lettre K.

Le mot AQ est décodée OK.



Sujet 6

Antilles-Guyanne

16 juin 2017

Exercice 1 (3 points)*Commun à tous les candidats*

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct. On considère l'équation

$$z^4 + 2z^3 - z - 2 = 0 \quad (\text{E})$$

ayant pour inconnue le nombre complexe z .

1. Donner une solution entière de (E).
2. Démontrer que, pour tout nombre complexe z ,

$$z^4 + 2z^3 - z - 2 = (z^2 + z - 2)(z^2 + z + 1).$$

3. Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes.
4. Les solutions de l'équation (E) sont les affixes de quatre points A, B, C, D du plan complexe tel que ABCD est un quadrilatère non croisé. Le quadrilatère ABCD est-il un losange ? Justifier.

Exercice 2 (4 points)*Commun à tous les candidats*

Dans une usine automobile, certaines pièces métalliques sont recouvertes d'une fine couche de nickel qui les protège contre la corrosion et l'usure. Le procédé utilisé est un nickelage par électrolyse.

On admet que la variable aléatoire X , qui à chaque pièce traitée associe l'épaisseur de nickel déposé, suit la loi normale d'espérance $\mu_1 = 25$ micromètres (μm) et d'écart-type σ_1 .

Une pièce est conforme si l'épaisseur de nickel déposé est comprise entre $22,8 \mu\text{m}$ et $27,2 \mu\text{m}$.

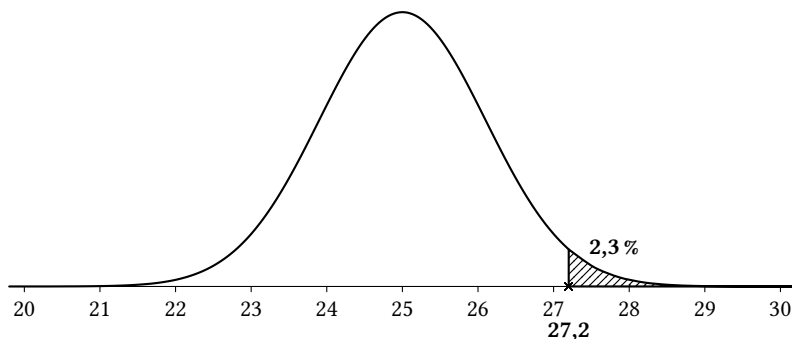


FIGURE 1

La fonction de densité de probabilité X est représentée sur la figure 1. On a pu déterminer que $P(X > 27,2) = 0,023$.

1.
 - a) Déterminer la probabilité qu'une pièce soit conforme.
 - b) Justifier que 1,1 est une valeur approchée de σ_1 à 10^{-1} près.
 - c) Sachant qu'une pièce est conforme, calculer la probabilité que l'épaisseur de nickel déposé sur celle-ci soit inférieure à $24 \mu\text{m}$. Arrondir à 10^{-3} .
2. Une équipe d'ingénieur propose un autre procédé de nickelage, obtenu par réaction chimique sans aucune source de courant. L'équipe affirme que ce nouveau procédé permet théoriquement d'obtenir 98 % de pièce conformes. La variable aléatoire Y qui, à chaque pièce traitée avec ce nouveau procédé, associe l'épaisseur de nickel déposé suit la loi normal d'espérance $\mu_2 = 25 \mu\text{m}$ et d'écart-type σ_2 .
 - a) En admettant l'affirmation ci-dessus, comparer σ_1 et σ_2 .
 - b) Un contrôle qualité évalue le nouveau procédé ; il révèle que sur 500 pièces testées, 15 ne sont pas conformes. Au seuil de 95 %, peut-on rejeter l'affirmation de l'équipe d'ingénieurs ?

Exercice 3 (3 points)

Commun à tous les candidats

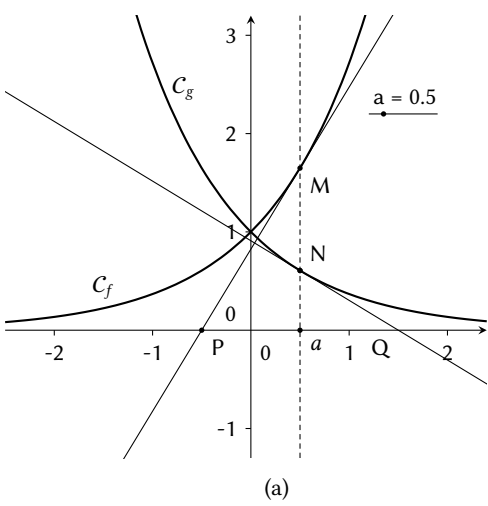
Soient f et g les fonctions définies sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

$$f(x) = e^x \quad \text{et} \quad g(x) = e^{-x}.$$

On note C_f la courbe représentative de la fonction f et C_g celle de la fonction g dans un repère orthonormé du plan.

Pour tout réel a , on note M le point de C_f d'abscisse a et N le point de C_g d'abscisse a . La tangente en M à C_f coupe l'axe des abscisses en P , la tangente en N à C_g coupe l'axe des abscisses en Q .

À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, on a représenté (figure 2) la situation pour différentes valeurs de a et on a relevé dans un tableau la longueur du segment $[PQ]$ pour chacune de ces valeurs de a .



	A	B
1	Abcisse a	Longueur PQ
2	-3	2
3	-2.5	2
4	-2	2
5	-1.5	2
6	-1	2
7	-0.5	2
8	0	2
9	0.5	2
10	1	2
11	1.5	2
12	2	2
13	2.5	2
14		

(b)

FIGURE 2

Les questions 1 et 2 peuvent être traitées de manière indépendante.

1. Démontrer que la tangente en M à C_f est perpendiculaire à la tangente en N à C_g .

2. a) Que peut-on conjecturer pour la longueur PQ?
 b) Démontrer cette conjecture.

Exercice 4 (5 points)

Commun à tous les candidats

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel strictement positif. Le but de l'exercice est d'étudier l'équation

$$\frac{\ln x}{x} = \frac{1}{n}. \quad (E_n)$$

ayant pour inconnue le nombre réel strictement positif x .

PARTIE A

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$. On a donné la courbe représentative C de la fonction f dans un repère orthogonal.

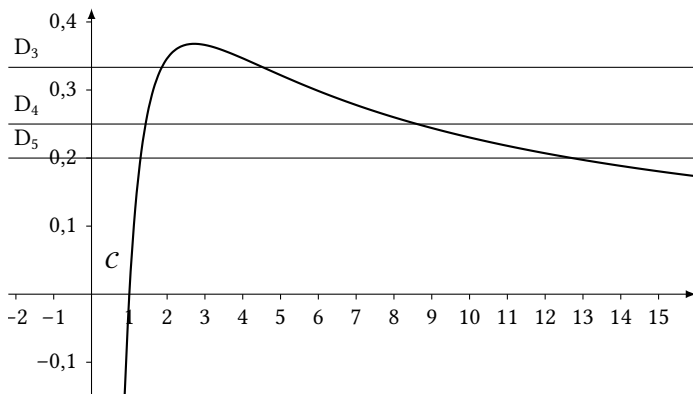


FIGURE 3

1. Étudier les variations de la fonction f .
2. Déterminer son maximum.

PARTIE B

- Montrer que, pour $n \geq 3$, l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ possède une unique solution sur $[1; e]$ notée α_n .
- D'après ce qui précède, pour tout entier $n \geq 3$, le nombre réel α_n est solution de l'équation (E_n) .
 - Sur le graphique sont tracées les droites D_3 , D_4 et D_5 d'équations respectives $y = \frac{1}{3}$, $y = \frac{1}{4}$ et $y = \frac{1}{5}$. Conjecturer le sens de variation de la suite (α_n) .
 - Comparer, pour tout entier $n \geq 3$, $f(\alpha_n)$ et $f(\alpha_{n+1})$. Déterminer le sens de variation de la suite (α_n) .
 - En déduire que la suite (α_n) converge. *Il n'est pas demandé de calculer sa limite.*
- On admet que, pour tout entier $n \geq 3$, l'équation (E_n) possède une autre solution β_n telle que

$$1 \leq \alpha_n \leq e \leq \beta_n.$$

- On admet que la suite (β_n) est croissante. Établir que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3,

$$\beta_n \geq n \frac{\beta_3}{3}.$$

- En déduire la limite de la suite (β_n) .

Exercice 5 (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points $A(-1; 2; 0)$, $B(1; 2; 4)$ et $C(-1; 1; 1)$.

- Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
 - Calculer le produit scalaire $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.
 - En déduire la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$, arrondie au degré.
- Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

- a) Démontrer que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).
 b) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).
3. Soient $\mathcal{P}_1$ le plan d'équation $3x + y - 2z + 3 = 0$ et $\mathcal{P}_2$ le plan passant par O et parallèle au plan d'équation $x - 2z + 6 = 0$.
- a) Démontrer que le plan $\mathcal{P}_2$ a pour équation $x = 2z$.
 b) Démontrer que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants.
 c) Soit la droite D dont un système d'équations paramétriques est

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = -4t - 3 \\ z = t. \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Démontrer que D est l'intersection des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

4. Démontrer que la droite D coupe le plan (ABC) en un point I dont on déterminera les coordonnées.

Exercice 5 (5 points)

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On considère la suite définie par son premier terme $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n , par

$$u_{n+1} = 2u_n + 6.$$

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n ,

$$u_n = 9 \times 2^n - 6.$$

2. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$, u_n est divisible par 6.

On définit la suite d'entiers (v_n) par, pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$v_n = \frac{u_n}{6}.$$

3. On considère l'affirmation : « Pour tout entier naturel n non nul, v_n est un nombre premier. » Indiquer si cette affirmation est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

4. *a)* Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $v_{n+1} - 2v_n = 1$.
b) En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$, v_n et v_{n+1} sont premiers entre eux.
c) En déduire, pour tout entier $n \geq 1$, le PGCD de u_n et u_{n+1} .
5. *a)* Vérifier que $2^4 \equiv 1 \pmod{5}$.
b) En déduire que si n est de la forme $4k + 2$ avec k entier naturel, alors u_n est divisible par 5.
c) Le nombre u_n est-il divisible par 5 pour les autres valeurs de l'entier naturel n ? Justifier.



Exercice 1*Commun à tous les candidats*

1. Une solution entière est -2 .
2. Pour tout nombre complexe z , on a

$$\begin{aligned}(z^2 + z - 2)(z^2 + z + 1) &= z^4 + z^3 + z^2 + z^3 + z^2 + z - 2z^2 - 2z - 2 \\ &= z^4 + 2z^3 - z - 2.\end{aligned}$$

3. Le polynôme $z^2 + z - 2$ a deux racines, qui sont 1 et -2 . Le polynôme $z^2 + z + 1$ a un discriminant, $1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3$, strictement négatif, il a donc deux racines complexes conjuguées, qui sont $(-1 - i\sqrt{3})/2$ et $(-1 + i\sqrt{3})/2$. En définitive, l'équation (E) a exactement 4 racines complexes :

$$-2, 1, \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \text{ et } \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}.$$

4. Soient $A(-2)$, $B\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)$, $C(1)$ et $D\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)$. Le quadrilatère ABCD est non croisé. Ses diagonales [AC] et [BD] se coupent en leur milieu, le point d'affixe $-1/2$. Et enfin, les diagonales sont perpendiculaires; en effet, (AC) est l'axe des abscisses, et (BD) est parallèle à l'axe des ordonnées puisque les points B et C ont la même partie réelle. Nous avons montré que le quadrilatère ABCD est un losange.

Exercice 2*Commun à tous les candidats*

1. a) La probabilité pour qu'une pièce soit conforme est égale à

$$\begin{aligned}P(22,8 \leq X \leq 27,2) &= P(\mu_1 - 2,2 \leq X \leq \mu_1 + 2,2) \\ &= 1 - P(X < \mu_1 - 2,2) - P(X > \mu_1 + 2,2)\end{aligned}$$

$$\text{or, } P(X < \mu_1 - 2,2) = P(X > \mu_1 + 2,2) = 0,023, \text{ donc}$$

$$P(22,8 \leq X \leq 27,2) = 1 - 2 \times 0,023 = 0,954.$$

- b) Soit Z la variable aléatoire $(X - \mu_1)/\sigma_1 = (X - 25)/\sigma_1$ de loi normale centrée réduite. Alors $X \leq 27,2$ si, et seulement si, $Z < 2,2/\sigma_1$, donc $P(Z < 2,2/\sigma_1) = 1 - 0,023 = 0,977$. À l'aide de la calculatrice, nous trouvons $\sigma_1 \approx 1,1 \mu\text{m}$ à $0,1 \mu\text{m}$ près.
- c) La probabilité pour qu'une pièce conforme ait une épaisseur de nickel inférieure à $24 \mu\text{m}$ est égale à

$$\begin{aligned} P_{\{22,8 \leq X \leq 27,2\}}(X \leq 24) &= \frac{P(\{X \leq 24\} \cap \{22,8 \leq X \leq 27,2\})}{P(22,8 \leq X \leq 27,2)} \\ &= \frac{P(22,8 \leq X \leq 24)}{P(22,8 \leq X \leq 27,2)} \\ &= 0,1668 \dots, \end{aligned}$$

soit $0,167$ à 10^{-3} près.

2. Étant donné que $P(\mu_1 - 2,2 \leq Y \leq \mu_1 + 2,2) > P(\mu_1 - 2,2 \leq X \leq \mu_1 + 2,2)$, la « cloche de Y » est plus étroite que celle de X ; nous en déduisons que $\sigma_2 < \sigma_1$.
3. Testons l'hypothèse : « Le procédé de nickelage, obtenu par réaction chimique, permet d'obtenir une proportion p de pièces conformes égale à 98% . » Soit $n = 500$ la taille de l'échantillon. Étant donné que $n \geq 30$, $np = 500 \times 0,98 \geq 5$ et $n(1 - p) > 5$, les bornes de l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% I de la fréquence de pièces conformes sont

$$p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 0,98 - 1,96\sqrt{\frac{0,98 \times (1 - 0,98)}{500}} \approx 0,967$$

et

$$p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 0,98 + 1,96\sqrt{\frac{0,98 \times (1 - 0,98)}{500}} \approx 0,993$$

La fréquence de pièces conformes dans l'échantillon, égale à $(500 - 15)/500 = 0,97$, appartient à l'intervalle de fluctuation asymptotique; nous acceptons donc l'hypothèse avec un risque d'erreur de 5% .

Exercice 3*Commun à tous les candidats*

1. Les fonctions f et g sont dérivables; pour tout réel x , on a $f'(x) = e^x$ et $g'(x) = -e^{-x}$. Par conséquent, les vecteurs $\vec{u}(1; e^a)$ et $\vec{v}(1; -e^{-a})$ sont des vecteurs directeurs des tangentes en M à C_f et en N à C_g respectivement. Le repère étant orthonormé, nous avons

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \times 1 + e^a \times (-e^{-a}) = 1 - e^0 = 0;$$

les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, donc la tangente en M à C_f est perpendiculaire à la tangente en N à C_g .

2. a) Les données de la feuille de calcul invitent à proposer la conjecture suivante :

Conjecture. Pour tout réel a , la longueur PQ est égale à 2.

- b) Une équation cartésienne de la tangente en M à C_f est

$$y = f(a) + (x - a)f'(a) = e^a + (x - a)e^a = e^a x + (1 - a)e^a,$$

donc les coordonnées du point P sont $(a - 1; 0)$. De même, une équation cartésienne de la tangente en N à C_g est

$$y = g(a) + (x - a)g'(a) = e^{-a} - (x - a)e^{-a} = -e^{-a}x + (1 + a)e^{-a},$$

donc les coordonnées du point Q sont $(a + 1; 0)$. Nous en déduisons que $PQ = |(a + 1) - (a - 1)| = 2$, prouvant ainsi la conjecture.

Exercice 4*Commun à tous les candidats*

PARTIE A

1. Pour tout réel $x > 0$, on a

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x \times 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

Pour tout réel $x > 0$, on a $x^2 > 0$, donc le signe de f' est celui de $1 - \ln x$. Or $x \mapsto 1 - \ln x$ est une fonction strictement décroissante sur $]0; +\infty[$ qui s'annule en e , d'où le tableau de variations figure 4 page suivante.

2. Des variations de la fonction f , nous déduisons que la fonction f admet un maximum global en $x = e$ égal à $f(e) = \ln(e)/e = 1/e$.

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$		+	0 -
$f(x)$		$\frac{1}{e}$	

FIGURE 4 – Tableau de variations de la fonction f .

PARTIE B

1. Soit $n \geq 3$ un entier. La fonction f est continue (car dérivable) sur l'intervalle $[1; e]$ et

$$f(1) = 0 \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{3} \leq \frac{1}{e} = f(e),$$

donc le théorème des valeurs intermédiaires nous assure que l'équation (E_n) possède une (au moins) solution sur l'intervalle $[1; e]$. Comme la fonction f est strictement monotone sur l'intervalle $[1; e]$, l'équation (E_n) a au plus une solution sur l'intervalle $[1; e]$. Finalement, l'équation (E_n) possède une unique solution sur l'intervalle $[1; e]$.

2. a) Sur le graphique 3 page 104, nous lisons $\alpha_5 < \alpha_4 < \alpha_3$, d'où la conjecture suivante :

Conjecture. La suite $(\alpha_n)_{n \geq 3}$ est strictement croissante.

- b) Pour tout entier $n \geq 3$, on a

$$f(\alpha_{n+1}) = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = f(\alpha_n). \quad (1)$$

Démontrons la conjecture par contradiction. Soit un entier $m \geq 3$ tel que $\alpha_m \leq \alpha_{m+1}$. Étant donné que α_m et α_{m+1} appartiennent à l'intervalle $[1; e]$ sur lequel la fonction f est croissante, on a alors $f(\alpha_m) \leq f(\alpha_{m+1})$, ce qui contredit l'inégalité (1). Par conséquent, $\alpha_n > \alpha_{n+1}$ pour tout entier $n \geq 3$, donc la suite $(\alpha_n)_{n \geq 3}$ est strictement décroissante.

- c) La suite $(\alpha_n)_{n \geq 3}$ est à la fois décroissante et minorée (par 1), donc elle converge.
3. a) Soit un entier $n \geq 3$. Comme $\beta_n \geq \beta_3$ et que la fonction logarithme est croissante, on a $\ln \beta_n \geq \ln \beta_3$, d'où $\beta_n/n \geq \beta_3/3$, si bien que

$$\beta_n \geq n \frac{\beta_3}{3}.$$

- b) Faisons tendre n vers $+\infty$ dans l'inégalité précédente. Puisque $\beta_3 > 0$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} n\beta_3/3 = +\infty$, donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n = +\infty.$$

Exercice 5

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. a) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}(2; 0; 4)$ et $\overrightarrow{AC}(0; -1; 1)$ ne sont pas colinéaires (par exemple $2 \times (-1) - 0 \times 0 \neq 0$), donc les points A, B et C ne sont pas alignés.

- b) Dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on a

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times 0 + 0 \times (-1) + 4 \times 1 = 4.$$

- c) Dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on a

$$AB^2 = 2^2 + 0^2 + 4^2 = 20 \quad \text{et} \quad AC^2 = 0^2 + (-1)^2 + 1^2 = 2,$$

donc

$$\cos \widehat{BAC} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\|} = \frac{4}{\sqrt{20} \times \sqrt{2}} = \sqrt{\frac{2}{5}}.$$

À l'aide de la fonction arccos, nous trouvons $\widehat{BAC} \approx 51^\circ$ au degré près.

2. a) Nous avons déjà démontré que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires. De plus, le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$; en effet,

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 2 \times 2 + (-1) \times 0 + (-1) \times 4 = 0$$

et

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times 0 + (-1) \times (-1) + (-1) \times 1 = 0,$$

il s'ensuit que le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (ABC).

- b) De ce qui précède, nous déduisons qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est $2x + (-1)y + (-1)z + d = 0$ où d est un réel que nous déterminons en écrivant que les coordonnées du point A vérifie l'équation du plan, ce qui donne $2 \times (-1) - 2 - 0 + d = 0$, d'où $d = 4$. Une équation cartésienne du plan (ABC) est donc

$$2x - y - z + 4 = 0.$$

3. a) Les plans d'équations $x - 2z + 6 = 0$ et $x - 2z = 0$ admettent comme vecteur normal le même vecteur, de coordonnées $(1; 0; -2)$, donc le plan d'équation $x = 2z$ est parallèle au plan d'équation $x - 2z + 6 = 0$. De plus, les coordonnées de l'origine du repère vérifie l'équation $x = 2z$. Il s'ensuit que $x = 2z$ est une équation du plan $\mathcal{P}_2$.
- b) Les vecteurs $\vec{n}_1(3; 1; -2)$ et $\vec{n}_2(1; 0; -2)$ sont des vecteurs normaux aux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ respectivement. Comme $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ ne sont pas colinéaires (par exemple, $3 \times 0 \neq 1 \times 1$), les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants.
- c) Les points de la droite $\mathcal{D}$ sont les points M_t de coordonnées $(2t; -4t - 3; t)$ où $t \in \mathbb{R}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, les coordonnées de M_t vérifient l'équation du plan $\mathcal{P}_1$; en effet,

$$3 \times (2t) + (-4t - 3) - 2(t) + 3 = 0$$

donc la droite $\mathcal{D}$ appartient au plan $\mathcal{P}_1$. De même, on montre que la droite $\mathcal{D}$ appartient au plan $\mathcal{P}_2$. Comme l'intersection de deux plans non parallèle est une droite, nous concluons que la droite $\mathcal{D}$ est l'intersection des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

4. Déterminons l'ensemble de réels t tels que le point M_t de la droite $\mathcal{D}$ appartienne au plan (ABC). Comme une équation du plan (ABC) est $2x - y - z + 4 = 0$, ces réels t sont les solutions de l'équation $2(2t) - (-4t - 3) - t + 4 = 0$, soit $7t + 7 = 0$. On trouve $t = -1$, et nous concluons donc que la droite $\mathcal{D}$ coupe le plan (ABC) en un unique point, noté I, de coordonnées

$$(2 \times (-1); -4 \times (-1) - 3; -1) = (-2; 1; -1).$$

Exercice 5

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. Démontrons par récurrence que pour tout entier $n \geq 0$, on a

$$u_n = 9 \times 2^n - 6. \quad (1)$$

Initialisation. On a $9 \times 2^0 - 6 = 3$, donc l'égalité (1) est vraie pour $n = 0$.

Hérédité. Soit k un entier naturel. Supposons l'égalité (1) vraie pour $n = k$, c'est-à-dire

$$u_k = 9 \times 2^k - 6.$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= 2 \times u_k + 6 \\ &= 2 \times (9 \times 2^k - 6) + 6 \\ &= 9 \times 2^{k+1} - 6, \end{aligned}$$

ce qui prouve que l'égalité (1) est vraie pour $n = k + 1$.

Conclusion. D'après le principe de récurrence, l'égalité (1) est vraie pour tout entier $n \geq 0$.

Solution alternative. La suite (u_n) est une suite arithmético-géométrique. L'équation affine obtenue en remplaçant en remplaçant u_n et u_{n+1} par x dans

$$u_{n+1} = 2u_n + 6 \quad (2)$$

a pour solution -6 , c'est-à-dire

$$-6 = 2 \times (-6) + 6. \quad (3)$$

La différence membre à membre entre (2) et (3),

$$u_{n+1} + 6 = 2(u_n + 6),$$

montre que la suite $(u_n + 6)_{n \geq 0}$ est géométrique de raison 2. Son premier terme étant $u_0 + 6 = 9$, nous en déduisons donc que $u_n + 6 = 9 \times 2^n$, puis

$$u_n = 9 \times 2^n - 6$$

pour tout entier naturel n .

2. Soit $n \geq 1$ un entier. La question précédente nous permet d'écrire

$$u_n = 6 \times (3 \times 2^{n-1} + 1)$$

où $3 \times 2^{n-1} + 1$ est un entier car $n - 1 \geq 0$, prouvant ainsi que u_n est un multiple de 6.

Remarque. S'il n'y avait pas eu la question 1, nous aurions procédé à une démonstration par récurrence.

3. L'affirmation est vraie puisque 6 divise u_n pour tout entier $n \geq 1$.

4. a) Pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$v_{n+1} - 2v_n = \frac{1}{6}(u_{n+1} - 2u_n) = \frac{1}{6} \times 6 = 1.$$

- b) Soient $n \geq 1$ un entier et d le PGCD de v_n et v_{n+1} . Alors d divise $2v_n$ et v_{n+1} , donc d divise $v_{n+1} - 2v_n = 1$. Par conséquent, $d = 1$; les entiers v_n et v_{n+1} sont premiers entre eux.

- c) Soit $n \geq 1$ un entier. On a

$$\text{pgcd}(u_n, u_{n+1}) = \text{pgcd}(6v_n, 6v_{n+1}) = 6 \text{pgcd}(v_n, v_{n+1}) = 6.$$

5. a) Comme $2^4 - 1 = 15 = 3 \times 5$, on a $2^4 \equiv 1 \pmod{5}$.

- b) Soit $n = 4k + 2$ avec k entier naturel. Alors, à l'aide de la question 1,

$$u_n = 9 \times 2^{4k+2} - 6 = 36 \times (2^4)^k - 6 = 6 \times (6 \times (2^4)^k - 1).$$

Partons de $2^4 \equiv 1 \pmod{5}$ et élevons à la puissance k ,

$$(2^4)^k \equiv 1 \pmod{5},$$

puis, multiplions par $36 \equiv 1 \pmod{5}$,

$$36 \times (2^4)^k \equiv 1 \pmod{5},$$

et pour finir soustrayons $6 \equiv 1 \pmod{5}$,

$$u_n \equiv 0 \pmod{5}.$$

En d'autres termes, u_n est divisible par 5.

- c) Non, il existe au moins une valeur de n pour laquelle u_n est pas divisible par 5; par exemple $n = 0$.

Remarque. Il n'est pas difficile de trouver toutes les entiers naturels n tels que u_n soit divisible par 5. Soit n un entier naturel. Il existe deux entiers naturels k et l tels que $n = 4k + l$ et $0 \leq l < 4$. De $u_n = 9 \times (2^4)^k \times 2^{l+2} - 6$, $9 \equiv 4 \pmod{5}$, $6 \equiv 1 \pmod{5}$ et $2^4 \equiv 1 \pmod{5}$, nous déduisons que u_n est un multiple de 5 si et seulement si $2^{l+2} \equiv 1 \pmod{5}$. Or, $2^{0+2} \equiv 4 \pmod{5}$, $2^{1+2} \equiv 2 \times 8 \equiv 3 \pmod{5}$, $2^{2+2} \equiv 1 \pmod{5}$ et $2^{3+2} \equiv 2 \pmod{5}$, donc u_n est divisible par 5 si et seulement si $l = 2$; les entiers naturels n de la forme $4k + 2$ sont les seuls pour lesquels u_n est un multiple de 5.



Sujet 7

Métropole

21 juin 2017

Exercice 1 (7 points)

Commun à tous les candidats

PARTIE A

On considère la fonction h définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par

$$h(x) = xe^{-x}.$$

1. Déterminer la limite de la fonction h en $+\infty$.
2. Étudier les variations de la fonction h sur l'intervalle $[0; +\infty[$ et dresser son tableau de variations.
3. L'objectif de cette question est de déterminer une primitive de la fonction h .
 - a) Vérifier que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$, on a

$$h(x) = e^{-x} - h'(x).$$

où h' désigne la dérivée de h .

- b) Déterminer une primitive sur l'intervalle $[0; +\infty[$ de la fonction $x \mapsto e^{-x}$.
- c) Dédire des deux questions précédentes une primitive de la fonction h sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

PARTIE B

On définit les fonctions f et g sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par

$$f(x) = xe^{-x} + \ln(x+1) \quad \text{et} \quad g(x) = \ln(x+1).$$

On note C_f et C_g les représentations graphiques respectives des fonctions f et g dans un repère orthonormé.

Ces deux courbes sont tracées sur la figure 1 page suivante.

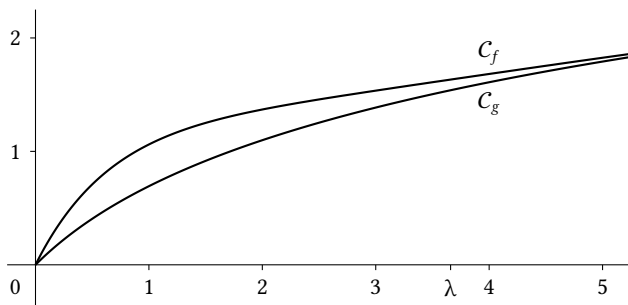


FIGURE 1

1. Pour un nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$, on appelle M le point de coordonnées $(x; f(x))$ et N le point de coordonnées $(x; g(x))$: M et N sont donc les points d'abscisses x appartenant respectivement aux courbes C_f et C_g .
 - a) Déterminer la valeur de x pour laquelle la distance MN est maximale et donner cette distance maximale.
 - b) Placer sur le graphique de la figure 1 les points M et N correspondant à la valeur maximale de MN .
2. Soit λ un réel appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$. On note D_λ le domaine du plan délimité par les courbes C_f et C_g et par les droites d'équations $x = 0$ et $x = \lambda$.
 - a) Hachurer le domaine D_λ correspondant à la valeur λ proposée sur le graphique de la figure 1.
 - b) On note A_λ l'aire du domaine D_λ exprimée en unités d'aire. Démontrer que

$$A_\lambda = 1 - \frac{\lambda + 1}{e^\lambda}.$$
 - c) Calculer la limite de A_λ lorsque λ tend vers $+\infty$ et interpréter le résultat.
3. On considère l'algorithme de la figure 2 [page ci-contre](#).
 - a) Quelle valeur affiche cet algorithme si on saisit la valeur $S = 0,8$?
 - b) Quel est le rôle de cet algorithme?

Variables	λ est un réel positif S est un réel strictement compris entre 0 et 1
Initialisation	Saisir S λ prend la valeur 0
Traitement	Tant Que $1 - \frac{\lambda+1}{e^\lambda} < S$ faire λ prend la valeur $\lambda + 1$ Fin Tant Que
Sortie	Afficher λ

FIGURE 2

Exercice 2 (3 points)

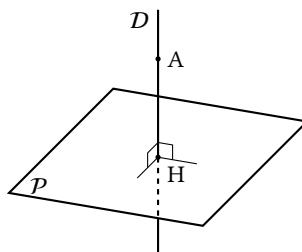
Commun à tous les candidats

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation cartésienne $2x - z - 3 = 0$. On note A le point de coordonnées $(1; a; a^2)$, où a est un nombre réel.

- Justifier que, quelle que soit la valeur du réel a , le point A n'appartient pas au plan $\mathcal{P}$.
- Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$ (de paramètre noté t) passant par le point A et orthogonale au plan $\mathcal{P}$.
 - Soit M un point appartenant à la droite $\mathcal{D}$, associé à la valeur t du paramètre dans la représentation paramétrique précédente. Exprimer la distance AM en fonction du réel t .

On note H le point d'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la droite $\mathcal{D}$ orthogonale à $\mathcal{P}$ et passant par le point A . Le point H est appelé le projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathcal{P}$, et la distance AH est appelée distance du point A au plan $\mathcal{P}$.

- Existe-t-il une valeur de a pour laquelle la distance AH du point A de coordonnées $(1; a; a^2)$ au plan $\mathcal{P}$ est minimale? Justifier la réponse.



Exercice 3 (5 points)*Commun à tous les candidats*

Dans une vaste plaine, un réseau de capteurs permet de détecter la foudre et de produire une image des phénomènes orageux. Ces données servent en particulier aux services météorologiques pour améliorer leurs prévisions et pour permettre des interventions plus rapides sur les lieux, notamment en cas d'incendie.

Le but de l'exercice est d'étudier les impacts de foudre détectés par un capteur. La figure 3 montre l'allure de l'écran radar, sur lequel les points d'impact de foudre sont observés.

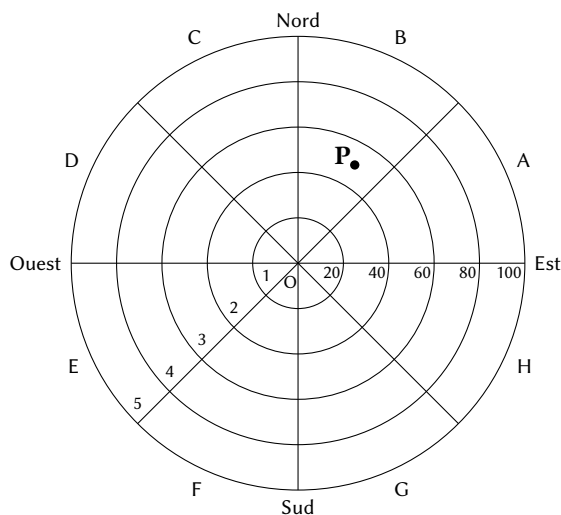


FIGURE 3

Le capteur de foudre étant représenté par le centre de l'écran, cinq cercles concentriques correspondant aux rayons respectifs 20, 40, 60, 80 et 100 kilomètres délimitent dans l'ordre cinq zones, numérotées de 1 à 5, définies par leur distance au capteur. De plus, huit segments partant du capteur délimitent huit portions, de même ouverture angulaire, nommées dans le sens trigonométrique de A à H.

L'écran est ainsi partagé en quarante secteurs dénommés par une lettre et un nombre entre 1 et 5. Par exemple, le point P positionné sur la figure 3 page ci-contre est situé dans le secteur B3.

On assimile l'écran radar à une partie du plan complexe en définissant un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$ de la manière suivante :

- l'origine O marque la position du capteur ;
- l'axe des abscisses est orienté d'Ouest en Est ;
- l'axe des ordonnées est orienté du Sud au Nord ;
- l'unité choisie est le kilomètre.

Dans la suite, un point de l'écran radar est associé à un point d'affixe z.

PARTIE A

1. On note z_P l'affixe du point P situé dans le secteur B3 sur la figure 3 page précédente. On appelle r le module de z_P et θ son argument dans l'intervalle $]-\pi; \pi]$. Parmi les quatre propositions suivantes, déterminer la seule qui propose un encadrement correct pour r et pour θ (aucune justification n'est demandée) :

Proposition A	Proposition B	Proposition C	Proposition D
$40 < r < 60$	$20 < r < 40$	$40 < r < 60$	$0 < r < 60$
et	et	et	et
$0 < \theta < \frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2} < \theta < -\frac{\pi}{4}$

FIGURE 4

2. Un impact de foudre est matérialisé sur l'écran en un point d'affixe z. Dans chacun des deux cas suivants, déterminer le secteur auquel ce point appartient :
- a) $z = 70e^{-i\pi/3}$;
- b) $z = -45\sqrt{3} + 45i$.

PARTIE B

On suppose dans cette partie que le capteur affiche un impact au point P d'affixe $50e^{i\pi/3}$.

En raison d'imprécisions de mesures, le point d'impact affiché ne donne qu'une indication approximative du point d'impact réel de la foudre. Ainsi, lorsque le capteur affiche le point d'impact P d'affixe $50e^{-i\pi/3}$, l'affixe z du point d'impact réel de la foudre admet :

- un module qui peut être modélisé par une variable aléatoire M suivant une loi normale d'espérance $\mu = 50$ et d'écart-type $\sigma = 5$;
- un argument qui peut-être modélisé par une variable aléatoire T suivant une loi normale d'espérance $\frac{\pi}{3}$ et d'écart-type $\frac{\pi}{12}$.

On suppose que les variables aléatoires M et T sont indépendantes, c'est-à-dire quels que soient les intervalles I et J , les événements $(M \in I)$ et $(T \in J)$ sont indépendants.

Dans la suite les probabilités seront arrondies à 10^{-3} près.

1. Calculer la probabilité $\mathbb{P}(M < 0)$ et interpréter le résultat obtenu.
2. Calculer la probabilité $\mathbb{P}(M \in]40 ; 60])$.
3. On admet que $\mathbb{P}\left(T \in \left[\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{2}\right]\right) = 0,819$. En déduire la probabilité que la foudre ait effectivement frappé le secteur B3 selon cette modélisation.

Exercice 4 (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On étudie un modèle de propagation d'un virus dans une population, semaine après semaine. Chaque individu de la population peut être, à l'exclusion de toute autre possibilité :

- soit susceptible d'être atteint par le virus, on dira qu'il est de « type S » ;
- soit malade (atteint par le virus) ;
- soit immunisé (ne peut plus être atteint par le virus).

Un individu est immunisé lorsqu'il a été vacciné, ou lorsqu'il a guéri après avoir été atteint par le virus. Pour tout entier naturel n , le modèle de propagation du virus est défini par les règles suivantes :

- parmi les individus de type S en semaine n , on observe qu'en semaine $n + 1$: 85 % restent de type S, 5 % deviennent malades et 10 % deviennent immunisés ;
- parmi les individus malades en semaine n , on observe qu'en semaine $n + 1$: 65 % restent malades, et 35 % sont guéris et deviennent immunisés ;
- tout individu immunisé en semaine n reste immunisé en semaine $n + 1$.

On choisit au hasard un individu dans la population. On considère les événements suivants :

- S_n : « l'individu est de type S en semaine n » ;
- M_n : « l'individu est malade en semaine n » ;
- I_n : « l'individu est immunisé en semaine n ».

En semaine 0, tous les individus sont considérés « de type S », on a donc les probabilités suivantes :

$$\mathbb{P}(S_0) = 1, \quad \mathbb{P}(M_0) = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(I_0) = 0.$$

PARTIE A

On étudie l'évolution de l'épidémie au cours des semaines 1 et 2.

1. Reproduire sur la copie et compléter l'arbre de probabilités de la figure 5.

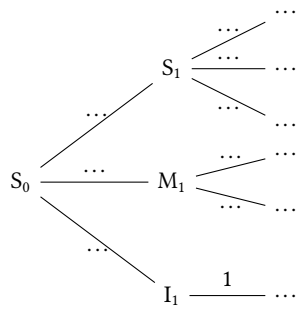


FIGURE 5

2. Montrer que $\mathbb{P}(I_2) = 0,2025$.
3. Sachant qu'un individu est immunisé en semaine 2, quelle est la probabilité, arrondie au millième, qu'il ait été malade en semaine 1 ?

PARTIE B

On étudie dans cette partie l'évolution à long terme de l'épidémie. Pour tout entier naturel n , on note $u_n = P(S_n)$, $v_n = P(M_n)$ et $w_n = P(I_n)$ les probabilités respectives des événements S_n , M_n et I_n .

1. Justifier que, pour tout entier naturel n , on a $u_n + v_n + w_n = 1$.

On admet que la suite (v_n) est définie par $v_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n ,

$$v_{n+1} = 0,65v_n + 0,05u_n.$$

2. À l'aide d'un tableur, on a calculé les premiers termes des suites (u_n) , (v_n) et (w_n) .

	A	B	C	D
1	n	u_n	v_n	w_n
2	0	1	0	0
3	1	0,8500	0,0500	0,1000
4	2	0,7225	0,0750	0,2025
5	3	0,6141	0,0849	0,3010
6	4	0,5220	0,0859	0,3921
7	5	0,4437	0,0819	0,4744
8	6	0,3771	0,0754	0,5474
...	...	...	...	...
20	18	0,0536	0,0133	0,9330
21	19	0,0456	0,0113	0,9431
22	20	0,0388	0,0096	0,9516

TABLE 1

Pour répondre aux questions 2-a et 2-b suivantes, on utilisera la feuille de calcul reproduite table 1.

- a) Quelle formule, saisie dans la cellule C3, permet, par recopie vers le bas, de calculer les termes de la suite (v_n) ?
- b) On admet que les termes de (v_n) augmentent, puis diminuent à partir d'un certain rang N , appelé le « pic épidémique » : c'est l'indice de la semaine

pendant laquelle la probabilité d'être malade pour un individu choisi au hasard est la plus grande. Déterminer la valeur du pic épidémique prévu par le modèle.

3. a) Justifier que, pour tout entier naturel n , on a $u_{n+1} = 0,85u_n$. En déduire l'expression de u_n en fonction de n .
- b) Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n , on a

$$v_n = \frac{1}{4}(0,85^n - 0,65^n).$$

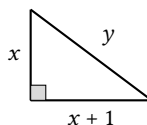
4. Calculer les limites de chacune des trois suites (u_n) , (v_n) et (w_n) . Que peut-on en déduire quant à l'évolution de l'épidémie prévue à long terme par ce modèle ?

Exercice 4 (5 points)

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On appelle *triangle rectangle presque isocèle*, en abrégé TRPI, un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit ont pour longueurs x et $x + 1$, et dont l'hypothénuse a pour longueur y , où x et y sont des entiers naturels. Ainsi, un TRPI est un triangle rectangle dont les longueurs des côtés de l'angle droit sont deux nombres entiers consécutifs et dont la longueur de l'hypothénuse est un nombre entier.

Si le triangle de côtés x , $x + 1$ et y , où y est la longueur de l'hypothénuse, est un TRPI, on dira que le couple $(x ; y)$ définit un TRPI.



PARTIE A

1. Démontrer que le couple d'entiers naturels $(x ; y)$ définit un TRPI si et seulement si on a

$$y^2 = 2x^2 + 2x + 1.$$

2. Montrer que le TRPI ayant les plus petits côtés non nuls est défini par le couple $(3 ; 5)$.
3. a) Soit n un entier naturel. Montrer que si n^2 est impair alors n est impair.
- b) Montrer que dans un couple d'entiers $(x ; y)$ définissant un TRPI, le nombre y est nécessairement impair.

4. Montrer que si le couple d'entiers naturels $(x; y)$ définit un TRPI, alors x et y sont premiers entre eux.

PARTIE B

On note A la matrice carrée $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, et B la matrice colonne $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Soient x et y deux entiers naturels; on définit les entiers naturels x' et y' par la relation

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B.$$

1. Exprimer x' et y' en fonction de x et y .
2. a) Montrer que $y'^2 - 2x'(x' + 1) = y^2 - 2x(x + 1)$.
 b) En déduire que si le couple $(x; y)$ définit un TRPI, alors le couple $(x'; y')$ définit également un TRPI.
3. On considère les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'entiers naturels, définies par $x_0 = 3$, $y_0 = 5$ et pour tout entier naturel n ,

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + B.$$

Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , le couple $(x_n; y_n)$ définit un TRPI.

4. Déterminer, par la méthode de votre choix que vous préciserez, un TRPI dont les longueurs des côtés sont supérieures à 2017.



Exercice 1

Commun à tous les candidats

PARTIE A

1. Nous savons que $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x/x = +\infty$, donc en prenant l'inverse, on trouve

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty.$$

2. La fonction f , définie comme un produit de fonctions dérivables est dérivable ; pour tout réel $x \geq 0$, on a

$$h'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}.$$

Comme l'exponentielle est à valeurs strictement positives, le signe de $h'(x)$ est celui de $1-x$. Nous en déduisons immédiatement le tableau de variations de la fonction h de la figure 6.

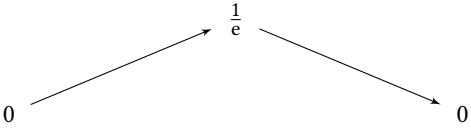
x	0	1	$+\infty$
Signe de $h'(x)$	+	0	-
Variations de h			

FIGURE 6 – Tableau de variations de la fonction h .

3. a) Pour tout réel $x \geq 0$, on a

$$h(x) = xe^{-x} = e^{-x} - (e^{-x} - xe^{-x}) = e^{-x} - h'(x).$$

- b) La fonction $x \mapsto -e^{-x}$ est une primitive sur l'intervalle $[0; +\infty[$ de la fonction $x \mapsto e^{-x}$.

- c) De la question 3-a, nous déduisons qu'une primitive de h est la somme d'une primitive de $x \mapsto e^{-x}$ et d'une primitive de $-h'$. Par conséquent, une primitive de h sur l'intervalle $[0; +\infty[$ est la fonction H définie pour tout réel $x \geq 0$ par

$$H(x) = -e^{-x} - h(x) = -e^{-x} - xe^{-x} = -(x+1)e^{-x}.$$

PARTIE B

1. a) Le repère est orthonormé, donc $MN = |f(x) - g(x)|$. Or, pour tout réel $x \geq 0$, on a $f(x) = h(x) + g(x)$ avec $h(x) \geq 0$, donc $f(x) \geq g(x)$. Par conséquent,

$$MN = f(x) - g(x) = h(x).$$

Nous en déduisons que la distance MN est maximale si et seulement si $h(x)$ est maximale. L'étude des variations de la fonction h , effectuée dans la partie A, permet alors de conclure que MN est maximale si et seulement si $x = 1$ et que cette distance maximale est $1/e$.

- b) Voir la figure 7.

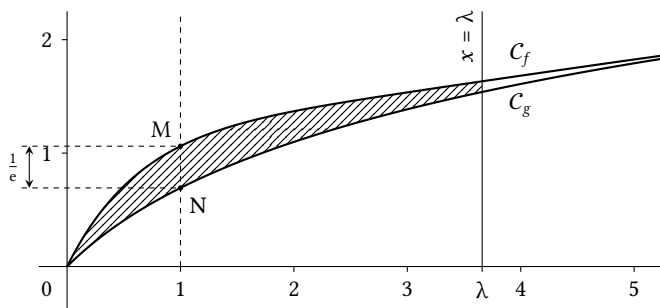


FIGURE 7

2. a) Voir la figure 7.
- b) Soit $A_{f,\lambda}$ (resp. $A_{g,\lambda}$) l'aire, exprimée en unités d'aire, de la région délimitée par la courbe C_f (resp. C_g), l'axe des abscisses et les droites d'équations

$x = 0$ et $x = \lambda$. Comme f et g sont des fonctions continues à valeurs positives, on a

$$A_{f,\lambda} = \int_0^\lambda f(x) dx \quad \text{et} \quad A_{g,\lambda} = \int_0^\lambda g(x) dx.$$

Puisque $f \geq g$, on a $A_\lambda = A_{f,\lambda} - A_{g,\lambda}$. Grâce à la linéarité de l'intégrale, nous pouvons écrire

$$A_\lambda = \int_0^\lambda f(x) - g(x) dx = \int_0^\lambda h(x) dx.$$

En utilisant la primitive H de la fonction h obtenue à la question A-3-c, il vient

$$A_\lambda = H(\lambda) - H(0) = -(\lambda + 1)e^{-\lambda} - (-1),$$

ou encore,

$$A_\lambda = 1 - \frac{\lambda + 1}{e^\lambda}.$$

- c) Pour tout réel $\lambda \geq 0$, on a $A_\lambda = 1 - \lambda/e^\lambda - 1/e^\lambda$. Nous savons que $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} e^\lambda = +\infty$ et $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} e^\lambda/\lambda = +\infty$. Par passage à l'inverse, nous en déduisons que $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} 1/e^\lambda = 0$ et $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda/e^\lambda = 0$, si bien que

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A_\lambda = 1.$$

Cette limite signifie que la région délimitée par les courbes C_f et C_g a une aire égale à 1 unité d'aire.

3. a) Pour $S = 0,8$, l'algorithme affiche 3.
- b) L'algorithme recherche le plus petit entier naturel λ tel que $A_\lambda \geq S$. Comme $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A_\lambda = 1$ et que $S < 1$, alors par définition de la limite, nous sommes assurés que l'algorithme s'arrêtera en un temps fini et affichera l'entier cherché.

Exercice 2*Commun à tous les candidats*

1. Le point A appartient au plan $\mathcal{P}$ si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation de $\mathcal{P}$, c'est-à-dire si et seulement si $2 - a^2 - 3 = 0$, ce qui donne l'égalité $a^2 = -1$ qui n'aura lieu pour aucune valeur du réel a . En conséquence, quelle que soit le réel a , le point A n'appartient pas au plan $\mathcal{P}$.
2. a) Le vecteur $\vec{n}(2; 0; -1)$ normal au plan $\mathcal{P}$ est un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$. Une représentation paramétrique de cette droite est donc

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = a \\ z = a^2 - t. \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

- b) Soit t un réel. Le vecteur $\overrightarrow{AM}$ a pour coordonnées $(2t; 0; -t)$. Le repère étant orthonormé, on a $AM^2 = (2t)^2 + 0^2 + (-t)^2 = 5t^2$, d'où

$$AM = \sqrt{5} |t|.$$

3. Le point M appartient au plan $\mathcal{P}$ si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation de $\mathcal{P}$, c'est-à-dire si et seulement si $2(1 + 2t) - (a^2 - t) - 3 = 0$. Ainsi $t = (a^2 + 1)/5$ est le paramètre du point H par rapport à la représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$ établie à la question 2-a. Nous avons donc, d'après la question précédente, $AH = (a^2 + 1)/\sqrt{5}$. Pour $a = 0$, on a $AH = 1/\sqrt{5}$, et pour tout réel $a \neq 0$, on a $a^2 > 0$, donc $AH > 1/\sqrt{5}$. Il s'ensuit que la distance AH est minimale si et seulement si $a = 0$.

Exercice 3*Commun à tous les candidats*

PARTIE A

1. Proposition C.
2. a) Le module de z est 70 et son argument principal est $-\frac{\pi}{3}$, donc l'image de z appartient au secteur G4.
- b) On a $z = 90\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 90e^{5i\pi/6}$, donc l'image de z appartient au secteur D5.

PARTIE B

1. La calculatrice donne $P(M < 0) \approx 7,6 \times 10^{-24}$. Même si cette événement a une probabilité extrêmement faible, celle-ci n'est pas nulle, ce qui contredit la définition du module.
2. On trouve $P(M \in]40 ; 60]) \approx 0,954$ avec la calculatrice bien entendu.
3. Notons A l'événement : « La foudre a frappé le secteur B3. » Il est l'intersection des événements $T \in \left] \frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{2} \right[$ et $M \in [40 ; 60]$. Ceux-ci sont indépendants, donc

$$P(A) = P\left(T \in \left] \frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{2} \right[\right) \times P(M \in [40 ; 60]) = 0,7813 \dots$$

La probabilité que la foudre ait effectivement frappé le secteur B3 est, à 10^{-3} près, égale à 0,781.

Remarque. Il ne faut surtout pas, comme le suggère l'énoncé, multiplier les arrondis à 10^{-3} près des probabilités des événements $M \in]40 ; 60[$ et $T \in \left] \frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{2} \right[$. Nous ne sommes en effet pas certains d'obtenir ainsi une approximation à 10^{-3} de la probabilité que la foudre ait frappé le secteur B3. En effet, soient $x = 0,95350019$ et $y = 0,81850173$ deux réels. L'arrondi à 10^{-3} près de leur produit, $xy = 0,7804 \dots$, est 0,780. Si nous multiplions les arrondis à 10^{-3} près de x et y , nous trouvons 0,781326. Or son arrondi à 10^{-3} près, 0,781, n'est pas l'arrondi à 10^{-3} près de xy .

Exercice 4

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

PARTIE A

1. Voir la figure 8 page suivante.
2. La formule des probabilités totales donne

$$\begin{aligned} P(I_2) &= P(S_1)P_{S_1}(I_2) + P(M_1)P_{M_1}(I_2) + P(I_1)P_{I_1}(I_2) \\ &= 0,85 \times 0,10 + 0,05 \times 0,35 + 0,10 \times 1 \\ &= 0,2025. \end{aligned}$$

3. La probabilité pour qu'un individu immunisé en semaine 2 ait été malade en semaine 1 est égale à

$$P_{I_2}(M_1) = \frac{P(I_2 \cap M_1)}{P(I_2)} = \frac{P(M_1)P_{M_1}(I_2)}{P(I_2)} = \frac{0,05 \times 0,35}{0,2025} \approx 0,086.$$

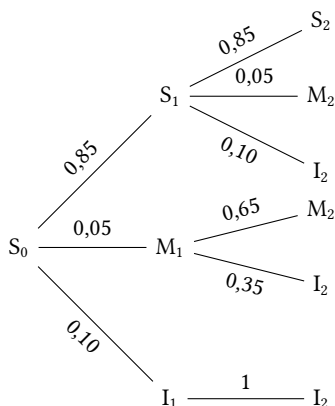


FIGURE 8

PARTIE B

1. Soit n un entier naturel. D'après l'énoncé l'événement $S_n \cup M_n \cup I_n$ est l'univers, donc

$$P(S_n \cup M_n \cup I_n) = 1.$$

De plus, les événements S_n , M_n et I_n sont deux à deux incompatibles, donc

$$P(S_n \cup M_n \cup I_n) = P(S_n) + P(M_n) + P(I_n).$$

Nous en déduisons que $P(S_n) + P(M_n) + P(I_n) = 1$, c'est-à-dire

$$u_n + v_n + w_n = 1.$$

2. a) D'après la relation de récurrence $v_{n+1} = 0,65v_n + 0,05u_n$, il suffit de saisir la formule `=0.65*C2+0.05*B2` dans la cellule C3.

Remarque. La formule `=0.65*$C2+0.05*$B2` convient également.

- b) Dans la table 1 page 124, on peut lire que $v_5 < v_6$ et $v_6 > v_7$, donc le pic épidémique est égale à 6.

3. a) Soit n un entier naturel. La formule des probabilités totales donne

$$P(S_{n+1}) = P(S_n)P_{S_n}(S_{n+1}) + P(M_n)P_{M_n}(S_{n+1}) + P(I_n)P_{I_n}(S_{n+1}),$$

mais $P_{M_n}(S_{n+1}) = P_{I_n}(S_{n+1}) = 0$ et $P_{S_n}(S_{n+1}) = 0,85$ si bien que $P(S_{n+1}) = 0,85P(S_n)$, c'est-à-dire

$$u_{n+1} = 0,85u_n.$$

La suite (u_n) est géométrique de raison 0,85 et de premier terme $u_0 = P(S_0) = 1$, donc son terme général est

$$u_n = 0,85^n.$$

- b) Montrons par récurrence que pour tout entier $n \geq 0$, on a

$$v_n = \frac{1}{4}(0,85^n - 0,65^n). \quad (1)$$

Initialisation. On a $v_0 = 0$ et $\frac{1}{4}(0,85^0 - 0,65^0) = 0$, donc l'égalité (1) est vraie pour $n = 0$.

Hérédité. Supposons que (1) soit vraie pour $n = k \geq 0$. Partons de

$$v_{k+1} = 0,65v_k + 0,05u_k,$$

et utilisons l'hypothèse de récurrence ainsi que le résultat de la question B-3-a. Il vient

$$\begin{aligned} v_{k+1} &= 0,65 \times \frac{1}{4}(0,85^k - 0,65^k) + 0,05 \times 0,85^k \\ &= \frac{1}{4}(0,65 \times 0,85^k - 0,65^{k+1} + 4 \times 0,05 \times 0,85^k) \\ &= \frac{1}{4}((0,65 + 4 \times 0,05) \times 0,85^k - 0,65^{k+1}) \\ &= \frac{1}{4}(0,85^{k+1} - 0,65^{k+1}), \end{aligned}$$

ce qui montre que (1) est alors vraie pour $n = k + 1$.

Conclusion. Le principe de récurrence nous permet de conclure que l'égalité (1) est vraie pour tout entier naturel n .

Exercice 4*Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité*

PARTIE A

1. D'après le théorème de Pythagore et sa réciproque, le couple d'entiers naturels $(x; y)$ définit un TRPI si et seulement si $y^2 = x^2 + (x+1)^2$, ou encore

$$y^2 = 2x^2 + 2x + 1.$$

2. D'après la question précédente, il faut et il suffit de trouver le plus petit entier naturel non nul x tel que $2x^2 + 2x + 1$ soit un carré parfait.

x	$2x^2 + 2x + 1$
1	5
2	13
3	25

TABLE 2

La table 2 montre que le plus petit entier est 3, donc le TRPI ayant les plus petits cotés non nuls est défini par le couple $(3; 5)$.

3. *a)* Soit n un entier naturel tel que n^2 est impair. Supposons que n est un entier pair. Il existe alors un entier k tel que $n = 2k$. Par conséquent, $n^2 = 4k^2 = 2 \times 2k^2$ est pair. Nous venons d'obtenir une contradiction. Nous venons de montrer que si n^2 est impair alors n est impair.
- b)* Soit $(x; y)$ un couple définissant un TRPI. L'entier $2x^2 + 2x + 1 = 2(x^2 + 1) + 1$ est impair, donc d'après la question A-1, l'entier y^2 est impair. La question précédente nous permet alors de conclure que y est impair.
4. Soient $(x; y)$ un couple définissant un TRPI et d un diviseur positif de x et y . Alors d divise y^2 et $2x^2 + 2x$, donc d divise leur différence $y^2 - 2x^2 - 2x$, égale à 1 d'après la question A-1. Il s'ensuit que $d = 1$, c'est-à-dire que les entiers x et y sont premiers entre eux.

PARTIE B

1. On a

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + 2y + 1 \\ 4x + 3y + 2 \end{pmatrix},$$

donc

$$\begin{cases} x' = 3x + 2y + 1 \\ y' = 4x + 3y + 2. \end{cases}$$

2. a) On a

$$\begin{aligned} y'^2 - 2x'(x' + 1) &= (4x + 3y + 2)^2 - 2(3x + 2y + 1)(3x + 2y + 2) \\ &= (16x^2 + 9y^2 + 4 + 24xy + 16x + 12y) \\ &\quad - (18x^2 + 8y^2 + 24xy + 18x + 12y + 4) \\ &= -2x^2 + y^2 - 2x \\ &= y^2 - 2x(x + 1). \end{aligned}$$

Remarque. L'identité remarquable $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$ est à connaître.

b) Dans l'égalité établie à la question précédente, ajoutons 1 aux deux membres et développons. Nous obtenons ainsi

$$y'^2 - 2x'^2 - 2x - 1 = y^2 - 2x^2 - 2x - 1.$$

Ainsi, d'après la question A-1, si le couple d'entiers naturels $(x; y)$ définit un TRPI, alors le couple d'entiers $(x'; y')$ définit un TRPI.

3. Montrons par récurrence sur l'entier n que le couple $(x_n; y_n)$ est un TRPI pour tout entier naturel n .

Initialisation. Le couple $(x_0; y_0) = (3; 5)$ est un TRPI (question A-2).

Hérédité. Soit un entier naturel k tel que $(x_k; y_k)$ est un TRPI. D'après la question B-2-b, $(x_{k+1}; y_{k+1})$ est un TRPI.

Conclusion. Le principe de récurrence nous permet de conclure que $(x_n; y_n)$ est un TRPI pour tout entier naturel n .

4. Les formules de la question B-1 montrent que les suites $(x_n)_{n \geq 0}$ et $(y_n)_{n \geq 0}$ sont croissantes et que leurs croissances sont « rapides ». Les premiers couples sont, successivement, $(3; 5)$, $(20; 29)$, $(119; 169)$, $(696; 985)$, $(4059; 5741)$, ... Le couple $(4059; 5741)$ définit un TRPI qui répond à la question.



Sujet 8

Asie

22 juin 2017

Exercice 1 (5 points)

Commun à tous les candidats

Un protocole de traitement d'une maladie, chez l'enfant, comporte une perfusion longue durée d'un médicament adapté. La concentration dans le sang du médicament au cours du temps est modélisée par la fonction C définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par

$$C(t) = \frac{d}{a} \left(1 - e^{-\frac{a}{80}t} \right)$$

où :

- C désigne la concentration du médicament dans le sang, exprimée en micromole par litre ;
- t est le temps écoulé depuis le début de la perfusion, exprimé en heure ;
- d est le débit de la perfusion, exprimé en micromole par heure ;
- a un paramètre réel strictement positif, appelé clairance, exprimé en litre par heure. Le paramètre a est spécifique à chaque patient.

En médecine, on appelle *plateau* la limite en $+\infty$ de la fonction C .

PARTIE A. ÉTUDE D'UN CAS PARTICULIER

La clairance a d'un certain patient vaut 7, et on choisit un débit d égal à 84. Dans cette partie, la fonction C est donc définie sur $[0; +\infty[$ par

$$C(t) = 12 \left(1 - e^{-\frac{7}{80}t} \right).$$

1. Étudier le sens de variation de la fonction C sur $[0; +\infty[$.
2. Pour être efficace, le plateau doit être égal à 15. Le traitement de ce patient est-il efficace ?

PARTIE B. ÉTUDE DE FONCTIONS

1. Soit f la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{105}{x} \left(1 - e^{-\frac{3}{40}x} \right).$$

Démontrer que, pour tout réel x de $[0 ; +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{105g(x)}{x^2},$$

où g est la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par

$$g(x) = \frac{3x}{40} e^{-\frac{3}{40}x} + e^{-\frac{3}{40}x} - 1.$$

2. On donne figure 1 le tableau de variation de la fonction g .

x	0	$+\infty$
g	0	-1

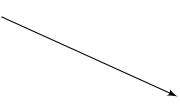


FIGURE 1

En déduire le sens de variation de la fonction f . *On ne demande pas les limites de la fonction f .*

3. Montrer que la fonction $f(x) = 5,9$ admet une unique solution sur l'intervalle $[1 ; 80]$. En déduire que cette équation admet une unique solution sur l'intervalle $[0 ; +\infty]$. Donner une valeur approchée de cette solution au dixième près.

PARTIE C. DÉTERMINATION D'UN TRAITEMENT ADÉQUAT

Le but de cette partie est de déterminer, pour un patient donné, la valeur du débit de la perfusion qui permette au traitement d'être efficace, c'est-à-dire au plateau d'être égal à 15.

Au préalable, il faut pouvoir déterminer la clairance a de ce patient. À cette fin, on règle provisoirement le débit d à 105, avant de calculer le débit qui rend le traitement efficace.

On rappelle que la fonction C est définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par

$$C(t) = \frac{d}{a} \left(1 - e^{-\frac{a}{80}t} \right).$$

- On cherche à déterminer la clairance a d'un patient. Le débit est provisoirement réglé à 105.
 - Exprimer en fonction de a la concentration du médicament 6 heures après le début de la perfusion.
 - Au bout de 6 heures, des analyses permettent de connaître la concentration du médicament dans le sang; elle est égale à 5,9 micromole par litre. Déterminer une valeur approchée, au dixième de litre par heure, de la clairance de ce patient.
- Déterminer la valeur du débit d de la perfusion garantissant l'efficacité du traitement.

Exercice 2 (3 points)

Commun à tous les candidats

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{n+1}{2n+4} u_n.$$

On définit la suite (v_n) par $v_n = (n+1)u_n$ pour tout entier naturel n .

- La feuille de calcul ci-contre présente les valeurs des premiers termes de la suite (u_n) et (v_n) , arrondies au cent-millème. Quelle formule, étirée ensuite vers le bas, peut-on écrire dans la cellule B3 de la feuille de calcul pour obtenir les termes successifs (u_n) ?
- Conjecturer l'expression de v_n en fonction de n .

	A	B	C
1	n	u_n	v_n
2	0	1,00000	1,00000
3	1	0,25000	0,50000
4	2	0,08333	0,25000
5	3	0,03125	0,12500
6	4	0,01250	0,06250
7	5	0,00521	0,03125
8	6	0,00223	0,01563
9	7	0,00098	0,00781
10	8	0,00043	0,00391
11	9	0,00020	0,00195

- b) Démontrer cette conjecture.
3. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

Exercice 3 (4 points)

Commun à tous les candidats

Pour chacune des quatre affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. Il est attribué un point par réponse correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. On dispose de deux dés, identiques d'aspect, dont l'un est truqué de sorte que le 6 apparait avec la probabilité $\frac{1}{2}$. On prend un des deux dés au hasard, on le lance, et on obtient 6.

Affirmation 1. La probabilité que le dé lancé soit le dé truqué est égale à $\frac{2}{3}$.

2. Dans le plan complexe, on considère les points M et N d'affixes respectives

$$z_M = 2e^{-i\pi/3} \quad \text{et} \quad z_N = \frac{3-i}{2+i}.$$

Affirmation 2. La droite (MN) est parallèle à l'axe des ordonnées.

Dans les questions 3 et 4, on se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace et l'on considère la droite d dont une représentation paramétrique est

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = 3 + 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

3. On considère les points A, B et C avec $A(-2; 2; 3)$, $B(0; 1; 2)$ et $C(4; 2; 0)$. On admet que les points A, B et C ne sont pas alignés.

Affirmation 3. La droite d est orthogonale au plan (ABC).

4. On considère la droite Δ passant par le point $D(1; 4; 1)$ et de vecteur directeur $\vec{v}(2; 1; 3)$.

Affirmation 4. La droite d et la droite Δ ne sont pas coplanaires.

Exercice 4 (3 points)*Commun à tous les candidats*

L'objet du problème est l'étude des intégrales I et J définies par

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx.$$

PARTIE A. VALEUR EXACTE DE L'INTÉGRALE I

1. Donner une interprétation géométrique de l'intégrale I .
2. Calculer la valeur exacte de I .

PARTIE B. ESTIMATION DE LA VALEUR DE J

Soit g de la fonction définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par

$$g(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

On note C_g sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan. On a donc $J = \int_0^1 g(x) dx$.

Le but de cette partie est d'évaluer l'intégrale J à l'aide de la méthode probabiliste décrite ci-après. On choisit au hasard un point $M(x; y)$ en tirant de façon indépendante ses coordonnées x et y au hasard selon la loi uniforme sur $[0; 1]$. On admet que la probabilité p qu'un point tiré de cette manière soit situé sous la courbe C_g est égale à l'intégrale J . En pratique, on initialise un compteur c à 0, on fixe un entier naturel n et on répète n fois le processus suivant :

- on choisit au hasard et indépendamment deux nombres x et y , selon la loi uniforme sur $[0; 1]$;
- si $M(x; y)$ est au-dessous de la courbe C_g , on incrémente le compte c de 1.

On admet que $f = \frac{c}{n}$ est une valeur approchée de J . C'est le principe de la méthode dite *de Monte-Carlo*.

La figure 2 page suivante illustre la méthode présentée pour $n = 100$. Cent points ont été placés aléatoirement dans le carré. Les disques noirs correspondent aux points sous la courbe, les disques blancs aux points au-dessus de la courbe. Le rapport du nombre de disques noirs par le nombre total de disques donne une estimation de l'aire sous la courbe.

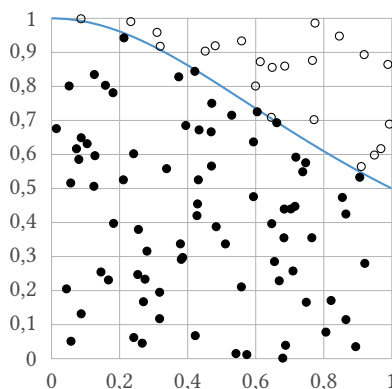


FIGURE 2 – Illustration de la méthode avec $n = 100$

1. Recopier et compléter l'algorithme de la figure 3 page ci-contre pour qu'il affiche une valeur approchée de J .
2. Pour $n = 100$, l'algorithme ci-dessus a donné pour résultat $f = 0,781$. Donner un intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 % de la valeur exacte de J .
3. Quelle doit-être, au minimum, la valeur de n pour que l'intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 %, ait une amplitude inférieure ou égale à 0,02 ?

Exercice 5 (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

PARTIE A. QUESTION PRÉLIMINAIRE

Soit T une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ , où λ désigne un réel strictement positif. On rappelle que, pour tout réel a positif, on a

$$\mathbb{P}(T \leq a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda t} dt.$$

Démontrer que, pour tout réel a positif,

$$\mathbb{P}(T > a) = e^{-\lambda a}.$$

Variables	n, c, f, i, x, y sont des nombres
Traitement	Lire la valeur de n c prend la valeur Pour i allant de 1 à faire x prend une valeur aléatoire entre 0 et 1 y prend Si alors prend la valeur Fin si Fin pour f prend la valeur
Sortie	Afficher f

FIGURE 3

Dans la suite de l'exercice, on considère des lampes à led dont la durée de vie, exprimée en jour, est modélisée par une variable aléatoire T suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{2800}$.

Les durées seront données au jour près, et les probabilités au millième près.

PARTIE B. ÉTUDE D'UN EXEMPLE

1. Calculer la probabilité qu'une lampe fonctionne au moins 180 jours ?
2. Sachant qu'une telle lampe a déjà fonctionné 180 jours, quelle est la probabilité qu'elle fonctionne encore au moins 180 jours ?

PARTIE C. CONTRÔLE DE LA DURÉE DE VIE MOYENNE

Le fabricant de ces lampes affirme que, dans sa production, la proportion de lampes qui ont une durée de vie supérieure à 180 heures est de 94 %. Un laboratoire indépendant qui doit vérifier cette affirmation fait fonctionner un échantillon aléatoire de 400 lampes pendant 180 jours. On suppose que les lampes tombent en panne indépendamment les unes des autres. Au bout de ces 180 jours, 32 de ces lampes sont en panne. AU vu des résultats des tests, peut-on remettre en cause, au seuil de 95 %, la proportion annoncée par le fabricant ?

PARTIE D. DANS UNE SALLE DE SPECTACLE

Pour éclairer une salle de spectacle, on installe dans le plafond 500 lampes à led. On modélise le nombre de lampes fonctionnelles après 1 an par une variable aléatoire X qui suit la loi normale de moyenne $\mu = 440$ et d'écart-type $\sigma = 7,3$.

1. Calculer $P(X > 445)$, la probabilité que plus de 445 lampes soient encore fonctionnelles après un an.
2. Lors de l'installation des lampes dans le plafond, la direction de la salle veut constituer un stock de lampes. Quelle doit-être la taille minimale de ce stock pour que la probabilité de pouvoir changer toutes les lampes défectueuses, après un an, soit supérieure à 95 % ?

Exercice 5 (5 points)

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Patience...



Exercice 1*Commun à tous les candidats***PARTIE A. ÉTUDE D'UN CAS PARTICULIER**

1. La fonction C est dérivable et pour tout réel $x \geq 0$, on a

$$C'(t) = 12 \times \frac{7}{80} e^{-7t/80}.$$

La fonction exponentielle étant à valeurs strictement positives, la fonction dérivée C' est strictement positive, donc la fonction C est strictement croissante.

2. On a $\lim_{t \rightarrow +\infty} -7t/80 = -\infty$ et $\lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0$, donc par composition, $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-7t/80} = 0$, si bien que $\lim_{t \rightarrow +\infty} C(t) = 12$. Le traitement n'est donc pas efficace.

PARTIE B. ÉTUDE DE FONCTIONS

1. Pour tout réel $x > 0$, on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{105}{x^2} (1 - e^{-3x/40}) + \frac{105}{x} \left(\frac{3}{40} e^{-3x/40} \right) \\ &= \frac{105}{x^2} \left(\frac{3x}{40} e^{-3x/40} + e^{-3x/50} - 1 \right) \\ &= \frac{105g(x)}{x^2}. \end{aligned}$$

2. Pour tout réel $x > 0$, on a $105/x^2 > 0$ et, d'après le tableau de variation de g , $g(x) < 0$, donc $f'(x) < 0$. Nous en déduisons que la fonction f est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.
3. Nous savons que la fonction f est strictement monotone, par conséquent l'équation $f(x) = 5,9$ admet au plus une solution sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

La fonction f est continue sur l'intervalle $[1; 80]$, $f(1) = 7,58 \dots \geq 5,9$ et $f(80) = 1,30 \dots \leq 5,9$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 5,9$ admet au moins une solution sur l'intervalle $[1; 80]$.

Ce qui précède montre que l'équation $f(x) = 5,9$ admet une unique solution sur l'intervalle $]0; +\infty[$ et que cette solution appartient à l'intervalle $[1; 80]$.

La calculatrice donne $f(8) = 5,92 \dots > 5,9$ et $f(8,2) = 5,88 \dots < 5,9$, donc 8,1 est une valeur approchée, au dixième près, de la solution de l'équation $f(x) = 5,9$.

PARTIE C. DÉTERMINATION D'UN TRAITEMENT ADÉQUAT

1. a) La concentration du médicament 6 heures après le début de la perfusion est égale à

$$C(6) = \frac{105}{a} \left(1 - e^{-3a/40} \right) = f(a).$$

- b) D'après la question précédente, la clairance a est la solution de l'équation $f(x) = 5,9$. La question B-3 permet de conclure que $a = 8,1 \pm 0,1$ L/h.
2. En procédant comme à la question A-2, on montre que le plateau est égal à

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} C(t) = \frac{d}{a}.$$

Ainsi, pour que le traitement soit efficace il faut et il suffit que $d/a = 15$, d'où $d = 15a$. De l'encadrement $5,80 \leq a \leq 5,82$, nous déduisons donc l'encadrement $120,00 \leq d \leq 123,00$, si bien que $d = 121,5$ $\mu\text{mol/h}$ est une valeur approchée du débit, à 1,5 $\mu\text{mol/h}$ près, garantissant l'efficacité du traitement.

Exercice 2

Commun à tous les candidats

1. On peut entrer dans la cellule B3 la formule $= (A2+1)/(2*A2+4)*B2$.

Remarque. On pouvait également entrer la formule $=A3/(2*A2+4)*B2$, ou encore utiliser un adressage absolu sur les colonnes, par exemple $=($A2+1)/(2*$A2+4)*$B2$, l'adressage relatif n'étant nécessaire que sur les lignes.

2. a) La feuille de calcul suggère que $v_{n+1} = v_n/2$, d'où la conjecture suivante :

Conjecture. Pour tout entier naturel n , on a

$$v_n = \frac{1}{2^n}.$$

b) Pour tout entier naturel n , on a

$$v_{n+1} = (n+2)u_{n+1} = \frac{(n+2)(n+1)}{2n+4}u_n = \frac{(n+2)(n+1)}{2(n+2)}u_n = \frac{(n+1)u_n}{2} = \frac{v_n}{2},$$

ce qui prouve que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$. Son premier terme est $v_0 = u_0 = 1$. Nous en déduisons que son terme général est

$$v_n = \frac{1}{2^n}$$

pour tout entier naturel n .

3. Pour tout entier naturel n , on a

$$u_n = \frac{v_n}{n+1} = \frac{1}{2^n(n+1)}.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n+1 = +\infty$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n(n+1) = +\infty$, puis par passage à l'inverse

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

Exercice 3

Commun à tous les candidats

1. **L'affirmation 1 est fausse.** Soient T l'événement « Le dé est truqué » et S l'événement « Obtenir un six ». La probabilité pour que le dé truqué sachant que l'on a obtenu un six est

$$P_S(T) = \frac{P(S \cap T)}{P(S)} = \frac{P(T)P_T(S)}{P(S)}.$$

La formule des probabilités totales donne

$$P(S) = P(T)P_T(S) + P(\bar{T})P_{\bar{T}}(S)$$

d'où

$$P_S(T) = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{6}} = \frac{3}{4}.$$

La probabilité que le dé utilisé soit truqué est égale à $\frac{3}{4}$.

2. **L'affirmation 2 est vraie.** La droite (MN) est parallèle à l'axe des ordonnées si et seulement si $\operatorname{Re} z_M = \operatorname{Re} z_N$. Or, $\operatorname{Re} z_M = 2 \cos(-\pi/3) = 2 \times 1/2 = 1$ et

$$z_N = \frac{(3-i)(2-i)}{|2+i|^2} = \frac{5-5i}{5} = 1-i,$$

donc la droite (MN) est parallèle à l'axe des ordonnées.

3. **L'affirmation 3 est vraie.** Le vecteur $\vec{n}(1; 0; 2)$ est un vecteur directeur de la droite d . Les points A, B et C n'étant pas alignés, les vecteurs $\vec{AB}(2; -1; -1)$ et $\vec{AC}(6; 0; -3)$ sont non colinéaires. De plus, le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$; en effet, dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, nous avons

$$\vec{n} \cdot \vec{AB} = 1 \times 2 + 0 \times (-1) + 2 \times (-1) = 0$$

et

$$\vec{n} \cdot \vec{AC} = 1 \times 6 + 0 \times 0 + 2 \times (-3) = 0.$$

Nous avons prouvé que la droite d est orthogonal au plan (ABC).

4. **L'affirmation 4 est fausse.** Les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires (par exemple, $2 \times 0 \neq 1 \times 1$), par conséquent les droites d et Δ sont coplanaires si et seulement si elles sont sécantes. Une représentation paramétrique de la droite Δ est

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 4 + t \\ z = 1 + 3t. \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Les droites d et Δ sont sécantes si et seulement si le système

$$\begin{cases} 1 + 2t = 1 + s & L_1 \\ 4 + t = 2 & L_2 \\ 1 + 3t = 3 + 2s & L_3 \end{cases}$$

a une solution. L'équation L_1 donne $t = -2$. À partir de L_2 nous obtenons alors $s = -4$. On vérifie que $(s; t) = (-4; -2)$ vérifient l'équation L_3 . Nous en déduisons que la droite d et la droite Δ sont coplanaires.

Exercice 4*Commun à tous les candidats***PARTIE A. VALEUR EXACTE DE L'INTÉGRALE I**

1. La fonction $x \mapsto 1/(1+x)$ est continue et positive sur l'intervalle $[0; 1]$, donc l'intégrale I représente l'aire de la région délimitée par la courbe représentative de la fonction $x \mapsto 1/(1+x)$, l'axe des abscisse et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.
2. La fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est une primitive de l'intégrande sur $[0; 1]$, donc

$$I = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$$

PARTIE B. ESTIMATION DE LA VALEUR DE J

1. Voir la figure 4.

Variables	n, c, f, i, x, y sont des nombres
Traitement	Lire la valeur de n c prend la valeur 0 Pour i allant de 1 à n faire x prend une valeur aléatoire entre 0 et 1 y prend une valeur aléatoire entre 0 et 1 Si $y \leq \frac{1}{1+x^2}$ alors c prend la valeur $c+1$ Fin si Fin pour f prend la valeur $\frac{c}{n}$
Sortie	Afficher f

FIGURE 4

2. Comme $n \geq 30$, $nf = 781 \geq 5$ et $n(1-f) = 219 \geq 5$, les bornes de l'intervalle de confiance de J au niveau de confiance de 95 % sont

$$f - \frac{1}{\sqrt{n}} = 0,781 - \frac{1}{\sqrt{1000}} = 0,7493 \dots \quad \text{et} \quad f + \frac{1}{\sqrt{n}} = 0,781 + \frac{1}{\sqrt{1000}} = 0,8126 \dots$$

Par conséquent, au seuil de confiance de 95 %, la valeur exacte de J est dans l'intervalle $[0,749; 0,813]$.

3. L'amplitude de l'intervalle de confiance, au seuil de confiance de 95 %, est égale à $2/\sqrt{n}$. Pour avoir une amplitude inférieure ou égale à 0,02, il faut et il suffit de choisir n pour que $2/\sqrt{n} \leq 0,02$, d'où $n \geq 10\,000$.

Exercice 5

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

PARTIE A. QUESTION PRÉLIMINAIRE

La fonction $t \mapsto -e^{-\lambda t}$ est une primitive de la fonction $t \mapsto \lambda e^{-\lambda t}$ sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel $a \geq 0$, nous avons donc

$$\mathbb{P}(T \leq a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda t} dt = [-e^{-\lambda t}]_0^a = -e^{-\lambda a} - (-e^0) = 1 - e^{-\lambda a}.$$

Nous en déduisons que

$$\mathbb{P}(T > a) = 1 - \mathbb{P}(T \leq a) = e^{-\lambda a}.$$

PARTIE B. ÉTUDE D'UN EXEMPLE

1. La probabilité pour qu'une lampe fonctionne au moins 180 jours est égale à

$$\mathbb{P}(T \geq 180) = \mathbb{P}(T > 180) = e^{-180/2800} \approx 0,938.$$

2. La loi exponentielle étant une loi sans vieillissement, la probabilité pour qu'une lampe fonctionne encore au moins 180 jours sachant qu'elle a déjà fonctionné 180 jours est égale à la probabilité pour qu'une lampe fonctionne au moins 180 jours, soit 0,938, au millième près.

PARTIE C. CONTRÔLE DE LA DURÉE DE VIE MOYENNE

Testons l'hypothèse : « La proportion de lampes qui ont une durée vie supérieure à 180 heures est $p = 94\%$. » La taille de l'échantillon $n = 400$ et p vérifient les inégalités $n \geq 30$, $np = 400 \times 0,94 = 376$ et $n(1 - p) \geq 400 \times 0,06 = 24$, donc l'intervalle de fluctuation asymptotique de la fréquence de lampes ayant une durée de vie supérieure à 180 heures, au seuil de 95% , est égale à

$$\begin{aligned} & \left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} ; p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right] \\ &= \left[0,94 - 1,96\sqrt{\frac{0,94 \times (1 - 0,94)}{400}} ; 0,94 + 1,96\sqrt{\frac{0,94 \times (1 - 0,94)}{400}} \right] \\ &\approx [0,916 ; 0,964]. \end{aligned}$$

La proportion de lampes de l'échantillon qui ont une durée de vie supérieure à 180 jours, égale à $(400 - 32)/400 = 0,92$, appartient à l'intervalle de fluctuation asymptotique, nous devons donc accepter l'hypothèse ; le test confirme les affirmations du fabricant.

PARTIE D. DANS UNE SALLE DE SPECTACLE

1. La probabilité que plus de 445 lampes soient fonctionnelles après un an est égale à $P(X > 445) = 1 - P(X \leq 445) \approx 0,247$.
2. Notons n le nombre de lampes du stock et A_n l'événement : « On peut changer toutes les lampes défectueuses au bout d'un an. » La variable aléatoire $500 - X$ modélise le nombre de lampes à remplacer sur une période d'un an, nous avons donc $A_n = \{500 - X \leq n\}$. Il s'ensuit que $P(A_n) \geq 0,95$ et seulement si $P(X \leq 500 - n) \leq 0,05$. L'équation $P(X \leq 500 - x) = 0,05$ d'inconnue x a pour solution $72,007\dots$ et puisque la fonction $x \mapsto P(X \leq 500 - x)$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, le plus petit entier n tel que $P(A_n) \geq 0,95$ est donc 73. En conclusion, un stock de 73 lampes est nécessaire pour pouvoir remplacer toutes les lampes défectueuses au bout d'un an avec une probabilité supérieure à $0,95$.

Exercice 5

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Patience...

