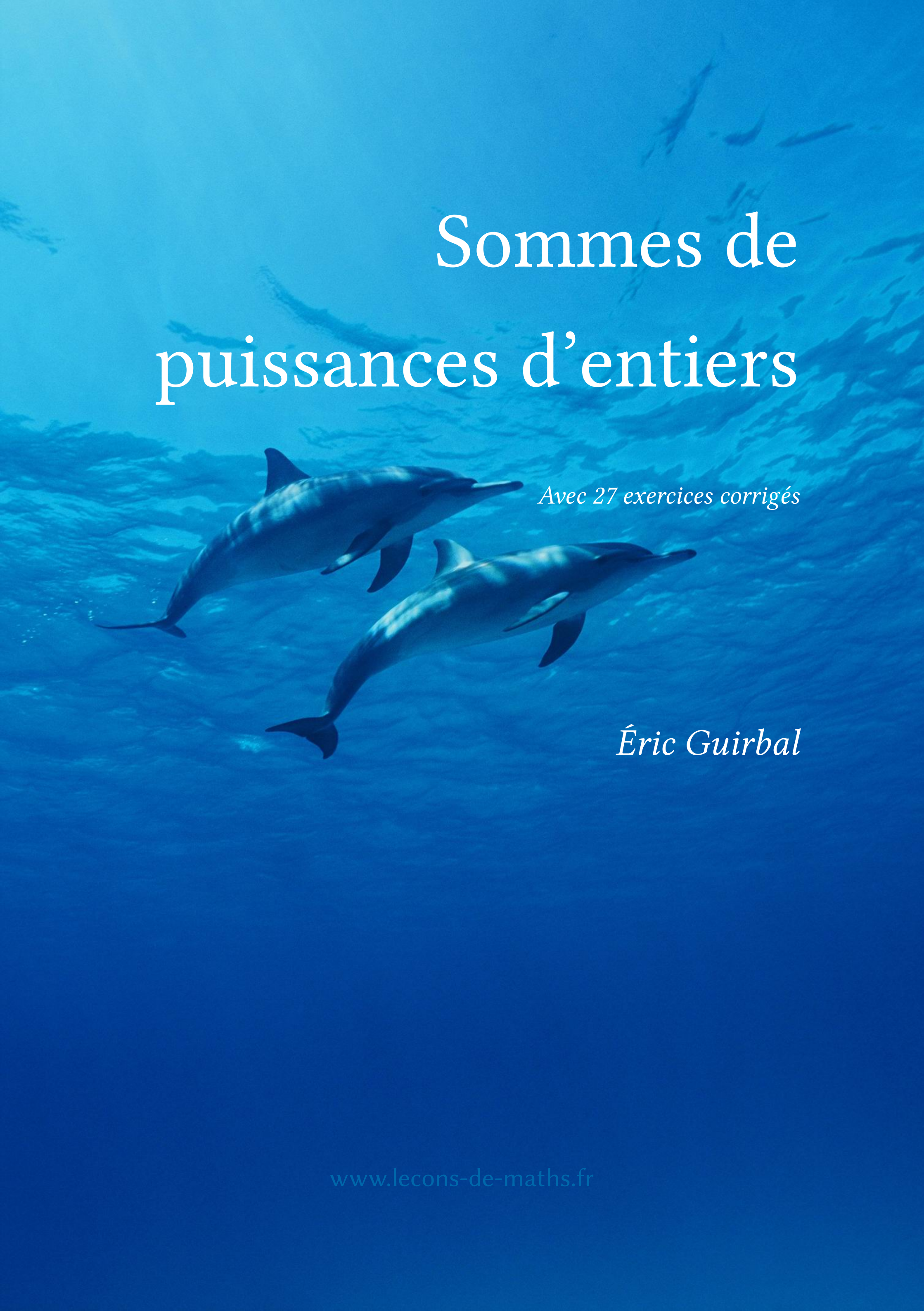

Sommes de puissances d’entiers

Avec 27 exercices corrigés

Éric Guirbal

www.lecons-de-maths.fr

Éric Guirbal
Professeur privé de mathématiques
Toulouse
eric.guirbal@lecons-de-maths.fr
www.lecons-de-maths.fr

Version du 25 août 2017

Sommes de puissances d'entiers

Sommes de puissances d'entiers

Éric Guirbal *

Sommaire

Introduction

L'objectif de ce petit texte est d'établir des expressions simples de la somme des n premiers entiers strictement positifs

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n,$$

de la somme de leurs carrés

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2,$$

et plus généralement de la somme des puissances k-ième des n premiers entiers strictement positifs

$$\mathrm{S}_k(n) = 1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Depuis l'Antiquité, de nombreux mathématiciens ont étudié ce problème. Les résultats les plus importants ont été obtenus par l'allemand

*N'hésitez pas à m'envoyer vos remarques et suggestions. Je les lirai avec un grand intérêt.

Johann Faulhaber (1580–1635), le français Blaise Pascal (1623–1662) et le suisse Jakob Bernoulli (1654–1705). Nous explorerons plusieurs méthodes et démontrerons une jolie formule due à Pascal.

Cas particuliers simples

Commençons par examiner le cas trivial où $p = 0$, soit

$$S_0(n) = 1^0 + 2^0 + \cdots + n^0.$$

Exercice 1. Donnez une expression simple de $S_0(n)$. Je vous rappelle que $x^0 = 1$ pour tout réel $x \neq 0$.

Compliquons un peu avec $p = 1$:

$$S_1(n) = 1 + 2 + \cdots + n.$$

Carl Friedrich Gauss (1777–1855)

À ce sujet, il existe une anecdote célèbre. On raconte qu'un jour un instituteur demanda à ses élèves d'additionner les entiers de 1 à 100 et que l'un des ses jeunes élèves, un certain Carl Gauss, donna alors la réponse immédiatement. Quelques décennies plus tard, le jeune Carl sera surnommé le *prince des mathématiciens*. Avant de vous révéler sa méthode, je vous propose de réfléchir à la question une dizaine de minutes.

Exercice 2. Calculez astucieucement la somme

$$S_1(100) = 1 + 2 + 3 + \cdots + 100.$$

Gauss aurait eu l'idée ingénieuse de regrouper les termes deux par deux ; le premier terme avec le dernier, le second terme avec l'avant-dernier et ainsi de suite, ce qui donne

$$S_1(100) = (1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + \cdots + (49 + 52) + (50 + 51).$$

Les 50 paires d'entiers ont toutes une somme égale à 101, si bien que

$$S_1(100) = 50 \times 101 = 5050.$$

Une variante de cette méthode consiste à écrire une première fois la somme en rangeant les termes dans l'ordre croissant,

$$S_1(100) = 1 + 2 + 3 + \cdots + 99 + 100,$$

et une deuxième fois en rangeant les termes dans l'ordre décroissant,

$$S_1(100) = 100 + 99 + 98 + \cdots + 2 + 1,$$

puis à ajouter les deux égalités membre à membre, en regroupant le n-ième terme de la première égalité avec le n-ième terme de la deuxième égalité. Nous obtenons ainsi

$$\begin{aligned} 2S_1(100) &= (1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + \cdots + (99 + 2) + (100 + 1) \\ &= \underbrace{101 + 101 + 101 + \cdots + 101 + 101}_{100 \text{ termes}} \end{aligned}$$

et nous retrouvons

$$S_1(100) = 100 \times 101/2 = 5050.$$

Exercice 3. Donnez une expression simple de la somme

$$S_1(n) = 1 + 2 + \cdots + n.$$

Exercice 4. Combien de bougies d'anniversaire Jeanne Calment (21 février 1875–4 août 1997) a t-elle soufflées au cours de sa vie ?

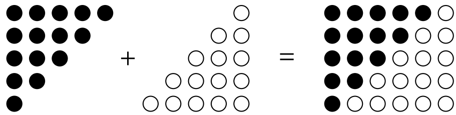

Figure 1 – Une preuve sans mots de l'identité $2 \times (1 + 2 + \cdots + n) = n(n + 1)$.

Exercice 5. À l'aide de la formule obenue à l'exercice 3, donnez des expressions simples de la somme des n premiers nombres pairs,

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 2n$$

et de la somme des n premiers nombres impairs,

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1).$$

Une troisième méthode consiste en ce que l'on appelle une *preuve sans mots* ou encore une *démonstration visuelle* ; il s'agit d'un dessin ou d'un diagramme rendant évidente l'assertion à démontrer sans qu'il ne soit nécessaire de l'accompagner d'un texte explicatif (figure 1 de la présente page).

Exercice 6. Proposez une preuve sans mots de l'identité

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2.$$

Le lecteur trouvera des centaines de preuves sans mots dans [4], [5] et [6].

Sommes télescopiques

Après S_0 et S_1, cherchons une expression simple de S_2 définie par

$$S_2(n) = \sum_{m=1}^{n} m^2.$$

Supposons qu'il existe un polynôme P tel que pour tout réel x, on ait

$$x^2 = \mathrm{P}(x) - \mathrm{P}(x-1).$$

Nous pouvons alors écrire la somme sous la forme

$$\mathrm{S}_2(n) = \sum_{m=1}^{n} \big(\mathrm{P}(m) - \mathrm{P}(m-1)\big),$$

ou encore, pour les lecteurs peux habitués à l'usage du symbole Σ,

$$\mathrm{S}_2(n) = \big(\mathrm{P}(1) - \mathrm{P}(0)\big) + \big(\mathrm{P}(2) - \mathrm{P}(1)\big) + \cdots + \big(\mathrm{P}(n) - \mathrm{P}(n-1)\big).$$

Nous constatons que tous les termes s'annulent deux à deux sauf le premier P(0) et le dernier P(n). C'est ce que l'on appelle une *somme (ou série) télescopique.* Au final, il ne reste plus que

$$\mathrm{S}_2(n) = \mathrm{P}(n) - \mathrm{P}(0).$$

Exercice 7. *a*) Justifiez que le polynôme P est de degré 3.

b) Montrez que si le polynôme P convient, alors pour tout réel α, le polynôme $\mathrm{P} + \alpha$ convient également. Déduisez-en que l'on peut choisir un polynôme dont le coefficient constant [a] est nul.

c) Déterminez le polynôme P.

d) En déduisez-en que pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\mathrm{S}_2(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Exercice 8. En utilisant la méthode de l'exercice 7, donnez une expression simple de

$$\mathrm{S}_3(n) = \sum_{m=1}^{n} m^3$$

et exprimez $\mathrm{S}_3(n)$ en fonction de $\mathrm{S}_1(n)$.

Exercice 9. Montrez que pour tout entier naturel m, on a

$$m^3 = \frac{1}{4}\left(m^2(m+1)^2 - m^2(m-1)^2\right)$$

et retrouvez la formule obtenue à l'exercice 8.

---

a. Soit $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ un polynôme. Le coefficient a_0 s'appelle le *coefficient constant* de P.

Je vous propose dans les exercices suivants d'autres applications des sommes télescopiques pour évaluer des sommes.

Exercice 10. Trouvez deux nombres a et b tel que pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}.$$

Déduisez-en une expression simple de la somme

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j(j+1)}.$$

Exercice 11. Donnez une expression simple de la somme

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}}$$

pour tout entier naturel n.

Exercice 12. *a*) Soient x un réel et n un entier naturel. Développez

$$(1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^n)$$

et déduisez-en une expression simple de la somme

$$1+x+x^2+\cdots+x^n.$$

b) *Application.* D'après la légende qui attribue l'invention du jeu des Échecs au brahmine Sissa, on raconte que son prince, émerveillé, lui laissa le choix de la récompense. Sissa demanda qu'on lui donne le nombre de grains de blé qui se trouveraient sur l'échiquier, en mettant 1 grain sur la première case, 2 sur la seconde, 4 sur la troisième et ainsi de suite en doublant jusqu'à la 64^{e}. Le Roi, étonné de la modicité apparente de la demande, l'accorda. On demande d'évaluer la quantité de blé demandée par Sissa.

Données : production mondiale en 2014 : 729 millions de tonnes, poids d'un grain de blé : 30 à 50 mg.

Formule du binôme de Newton

Avant d'aborder le calcul de $\mathrm{S}_k(n)$ dans le cas général, nous avons besoin d'introduire un nouvel outil qui n'est malheureusement plus enseigné au lycée. En classe de troisième, vous avez appris l'identité remarquable

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Certains d'entre vous ce sont sûrement demandé ce qu'il advient lorsque l'on remplace l'exposant 2 par 3, 4, 5, etc. Pour les autres, il n'est jamais trop tard pour bien faire.

Exercice 13. Développez $(a+b)^n$ pour $n \in \{3, 4, 5\}$.

Je pense que nous ne serez pas surpris d'apprendre qu'il existe une formule permettant de développer $(a+b)^n$ pour tout entier naturel n. Je vous propose de l'établir.

La distributivité de la multiplication par rapport à l'addition est une propriété fondamentale qui se définit par l'identité

$$k(a+b) = ka + kb. \tag{1}$$

Bien entendu, puisque le produit de deux nombres est commutatif ($ab = ba$), on a aussi $(a + b)k = ak + bk$.

Cette propriété nous permet, par exemple, de développer le produit

$$(a + b)(c + d).$$

Pour cela, appliquons une première fois (1) avec $k = c + d$, ce qui donne

$$(a + b)(c + d) = a(c + d) + b(c + d).$$

Toujours à l'aide de (1), développons $a(c + d)$ et $b(c + d)$. Nous obtenons ainsi

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd. \tag{2}$$

Cette formule vous a été enseignée au collège sous le nom de *double distributivité*.

À présent, observons attentivement cette formule. Nous voyons que le membre de droite s'obtient en multipliant chaque terme de la première somme par chaque terme de la deuxième somme et en ajoutant les produits partiels ainsi obtenus.

Exercice 14. Développez $(a + b)(c + d + e)$ et $(a + b)(c + d)(e + f + g)$ à l'aide de (1) en vous inspirant de la démonstration de (2).

À nouveau, vous constatez que chacun de ses produits peut se développer en choisissant un terme de chaque somme, en multipliant les termes ainsi choisis puis en additionnant les produits partiels. Vous pouvez à présent utiliser cette règle à chaque fois que vous aurez à développer un produit.

Faisons-le pour développer $(a + b)^n$. Rappelons que

$$(a + b)^n = \underbrace{(a + b)(a + b) \ldots (a + b)}_{n \text{ facteurs}}. \tag{3}$$

La forme développée consiste en une somme dont chaque terme est un produit. Chacun de ces produits a n facteurs égaux à a ou b, donc chaque terme est de la forme $a^j b^{n-j}$ avec $0 \leqslant j \leqslant n$. Pour un j fixé, le terme $a^j b^{n-j}$ apparaît autant de fois qu'il y a de façons de choisir j termes a parmi les n facteurs de (3) ; désignons ce nombre par le symbole $\binom{n}{j}$. Comme j peut prendre toutes les valeurs entières entre 0 et n, nous en déduisons la *formule du binôme de Newton*,

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j b^{n-j}. \tag{4}$$

Pour $n = 3$, elle s'écrit

$$(a+b)^3 = \binom{3}{0} b^3 + \binom{3}{1} ab^2 + \binom{3}{2} a^2 b + \binom{3}{3} a^3. \tag{5}$$

Les nombres entiers $\binom{n}{j}$ sont les *coefficients binomiaux*. C'est le nombre de parties à j éléments d'un ensemble à n éléments, ou encore le nombre de façons de choisir j éléments dans un ensemble à n éléments sans tenir compte de l'ordre. Ainsi $\binom{14}{3}$ est le nombre de tiercés dans le désordre avec 14 partants et $\binom{49}{6}$ est le nombre de grilles possibles de la Loterie Nationale.

Pour des petites valeurs de n, les coefficients binomiaux peuvent se calculer à la main. Faisons-le pour $n = 3$. Nous avons quatre coefficients à déterminer :

$$\binom{3}{0}, \quad \binom{3}{1}, \quad \binom{3}{2} \quad \text{et} \quad \binom{3}{3}.$$

Soit $\Omega = \{A, B, C\}$ un ensemble de 3 éléments. Réalisons l'inventaire de ses parties. Nous dénombrons :

- 1 partie à 0 élément : l'ensemble vide $\emptyset$;
- 3 parties à 1 élément : $\{A\}$, $\{B\}$ et $\{C\}$;
- 3 parties à 2 éléments : $\{A, B\}$, $\{A, C\}$ et $\{B, C\}$;
- et 1 partie à 3 éléments : $\{A, B, C\}$.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5}
\end{array}
$$

Figure 2 – Triangle de Pascal

Par conséquent,

$$\binom{3}{0} = 1, \quad \binom{3}{1} = 3, \quad \binom{3}{2} = 3 \quad \text{et} \quad \binom{3}{3} = 1,$$

et l'égalité (5) devient

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Exercice 15. Faîtes l'inventaire de toutes les parties de $\Omega = \{A, B, C, D\}$, déduisez-en les valeurs des coefficients binomiaux $\binom{4}{j}$ $(0 \leqslant j \leqslant 4)$ et développez $(a+b)^4$ à l'aide de la formule du binôme de Newton.

Exercice 16. Développez $(a+b)^5$.

La figure 2 montre comment les coefficients binomiaux peuvent être disposés selon un triangle, appelé *triangle de Pascal*, où la $(n+1)$-ième ligne contient les coefficients $\binom{n}{j}$ avec $0 \leqslant j \leqslant n$.[1]

1. Une convention courante consiste à poser $\binom{n}{j} = 0$ si $j < 0$ ou $j > n$.

Exercice 17. Sur la figure 2 page ci-contre, remplacez les symboles $\binom{n}{j}$ par leurs valeurs.

En observant attentivement le triangle de Pascal, on peut assez facilement noter plusieurs propriétés. Les plus importantes sont :

— *la propriété de symétrie :* chaque ligne forme un palindrome ; que l'on parcourt la ligne de la gauche vers la droite ou de la droite vers la gauche ne change rien :

$$\binom{n}{j} = \binom{n}{n-j} \qquad (0 \leqslant j \leqslant n); \tag{6}$$

— *la propriété de récurrence :* chaque coefficient est la somme des deux coefficients qui le surmontent dans le triangle de Pascal :

$$\binom{n}{j} = \binom{n-1}{j} + \binom{n-1}{j-1} \qquad (1 \leqslant j \leqslant n-1). \tag{7}$$

Par exemple,

$$\binom{4}{2} = \binom{3}{1} + \binom{3}{2}.$$

Démontrons la propriété de symétrie. Imaginons que nous partions en vacances pour une durée de j jours. Nous devons emporter j chemises. Supposons que nous ayons n chemises dans notre armoire. Il revient au même de choisir les j chemises à emporter, soit $\binom{n}{j}$ choix, que de choisir les $n-j$ chemises qui resteront dans l'armoire, soit $\binom{n}{n-j}$ choix. Nous en déduisons que

$$\binom{n}{j} = \binom{n}{n-j}.$$

Exercice 18. Proposez une preuve de la propriété de récurrence. Le lecteur pourra imaginer qu'il possède une superbe chemise hawaïenne. Il peut soit emporter cette chemise (combien de choix ?), soit la laisser dans l'armoire (combien de choix ?).

Les propriétés de symétrie et de récurrence permettent de calculer très rapidement la n-ième ligne du triangle de Pascal pour des petites valeurs de n.

Exercice 19. Poursuivez la construction du triangle de Pascal jusqu'à $n = 10$ et développez $(a + b)^{10}$.

Exercice 20. En observant le triangle de Pascal, essayez de découvrir d'autres propriétés.

Exercice 21. Montrez que pour tout entier n,

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} = 2^n.$$

Donnez une interprétation combinatoire de cette identité.

Le lecteur se doute certainement qu'il existe une formule donnant $\binom{n}{j}$ en fonction de n et j. Pour l'établir, nous utiliserons une autre propriété, que voici :

$$\binom{n}{j} = \frac{n}{j}\binom{n-1}{j-1} \qquad (n \geqslant 1,\ 1 \leqslant j \leqslant n) \tag{8}$$

Pour la démontrer, nous allons, comme nous l'avons déjà fait précédemment, résoudre un problème de combinatoire de deux manières différentes. Nous disposons de n personnes et nous souhaitons former une équipe de j personnes avec un chef. Combien y-a-t-il de possibilités ? La première manière consiste à choisir j personnes, ce qui peut-être fait de $\binom{n}{j}$ façons possibles, puis à désigner le chef, de j façons possibles, ce qui donne $j\binom{n}{j}$ équipes. L'autre manière consiste à d'abord choisir le chef, de n façons possibles, puis à compléter l'équipe de $\binom{n-1}{j-1}$ façons possibles, soit $n\binom{n-1}{j-1}$ équipes. Il s'ensuit que

$$j\binom{n}{j} = n\binom{n-1}{j-1},$$

d'où l'identité (8).

Cette identité peut être utilisée pour calculer un coefficient binomial. Il suffit de l'appliquer un nombre suffisant de fois pour nous ramener à un coefficient connu. Illustrons ceci en calculant $\binom{13}{8}$. À l'aide de la formule (8), nous écrivons

$$\binom{13}{8} = \frac{13}{8} \times \binom{12}{7}.$$

Ne connaissant pas plus $\binom{12}{7}$, appliquons une nouvelle fois (8),

$$\binom{13}{8} = \frac{13}{8} \times \frac{12}{7} \times \binom{11}{6}$$

et une fois de plus,

$$\binom{13}{8} = \frac{13}{8} \times \frac{12}{7} \times \frac{11}{6} \times \binom{10}{5}.$$

Si vous avez fait l'exercice 19, vous savez que $\binom{10}{5} = 252$, d'où

$$\binom{13}{8} = 1287.$$

Plus généralement,

$$\begin{aligned}\binom{n}{j} &= \frac{n}{j}\binom{n-1}{j-1} \\ &= \frac{n(n-1)}{j(j-1)}\binom{n-2}{j-2} \\ &= \dots \\ &= \frac{n(n-1)\dots(n-j+1)}{j(j-1)\times\cdots\times 3\times 2\times 1}\binom{n-j}{0}.\end{aligned} \tag{9}$$

Définissons la *factorielle* d'un entier naturel n par

$$n! = \begin{cases} 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n & \text{si } n \geqslant 1, \\ 1 & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

Par exemple, $6! = 1 \times 2 \times \cdots \times 6 = 720$. La formule (9) peut alors s'écrire plus simplement

$$\binom{n}{j} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-j+1)}{j!}, \tag{10}$$

ou encore, étant donné que $n!/(n-j)! = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-j+1)$,

$$\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!\,(n-j)!} \tag{11}$$

Par exemple,

$$\binom{22}{4} = \frac{22 \times 21 \times 20 \times 19}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 7315.$$

Exercice 22. À l'aide de la formule (10) (et sans calculatrice), calculez les coefficients binomiaux $\binom{8}{3}$, $\binom{11}{4}$ et $\binom{14}{7}$.

Exercice 23. Le jeu de loto (celui de la Française des Jeux) consiste à cocher 6 numéros dans une grille qui en comporte 49. Combien y-a-t-il de façons de « faire son loto » ?

Exercice 24. Le but de cet exercice est de donner une preuve combinatoire de la formule $1 + 2 + \cdots + n = n(n+1)/2$. Pour cela, envisagez l'ensemble des parties à deux éléments de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n+1\}$.

a) Soit $k \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$. Combien y a t-il de parties dont le plus grand élément est k ?

b) Déduisez-en que $1 + 2 + \cdots + n = \binom{n+1}{2}$.

c) Concluez.

Formule de Pascal


Blaise Pascal (1623–1662)

Dans son *Traité du triangle arithmétique* publié en 1665, le mathématicien et philosophe Blaise Pascal, décrit une formule générale permettant de calculer la somme des puissances des n premiers termes d'une suite arithmétique [2] (*Postetatum numericarum summa* [8], p. 39).

Pour la somme des puissances des n premiers entiers strictement positifs (cas particulier d'une suite arithmétique de raison 1 et de premier terme 1), cette formule s'écrit

$$\mathrm{S}_k(n) = \frac{1}{k+1}\left((n+1)^{k+1} - 1 - \sum_{j=0}^{k-1}\binom{k+1}{j}\mathrm{S}_j(n)\right). \tag{12}$$

Cette formule exprime S_k en fonction $\mathrm{S}_0, \mathrm{S}_1, \ldots, \mathrm{S}_{k-1}$. Ainsi, pour calculer S_8, il faut au préalable calculer $\mathrm{S}_1, \mathrm{S}_2, \ldots, \mathrm{S}_7$.

À présent, appliquons la formule de Pascal au calcul de $\mathrm{S}_4(n)$. Pour $k = 4$, elle s'écrit

$$\mathrm{S}_4(n) = \frac{1}{5}\left((n+1)^5 - 1 - \sum_{j=0}^{3}\binom{5}{j}\mathrm{S}_j(n)\right).$$

Par commodité, multiplions les deux membres de l'égalité par 5 :

$$5\mathrm{S}_4(n) = (n+1)^5 - 1 - \binom{5}{0}\mathrm{S}_0(n) - \binom{5}{1}\mathrm{S}_1(n) - \binom{5}{2}\mathrm{S}_2(n) - \binom{5}{3}\mathrm{S}_3(n).$$

2. Une *suite arithmétique* est un ensemble ordonné de nombres $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ tels que $a_1 - a_0 = a_2 - a_1 = \cdots = a_n - a_{n-1} = \ldots$. La différence entre deux termes successives est appelée la *raison*. Par exemple, la suite des nombres impairs 1, 3, 5, 7, ... est une suite arithmétique de raison 2 car $3 - 1 = 5 - 3 = 7 - 5 = \cdots = 2$.

À l'aide des coefficients binomiaux calculés à l'exercice 17 page 11, nous obtenons

$$5S_4(n) = (n+1)^5 - 1 - S_0(n) - 5S_1(n) - 10S_2(n) - 10S_3(n).$$

Nous savons déjà que $S_0(n) = n$ (exercice 1), $S_1(n) = n(n+1)/2$ (exercice 3), $S_2(n) = n(n+1)(2n+1)/6$ (exercice 7) et $S_3(n) = n^2(n+1)^2/4$ (exercices 8 et 9). Après un petit calcul laborieux, mais sans grande difficulté, nous trouvons

$$S_4(n) = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n.$$

Exercice 25. À votre tour, calculez $S_5(n)$ et $S_6(n)$ à l'aide de la formule de Pascal.

Je vous propose de démontrer la formule de Pascal pour $k = 2$, c'est-à-dire

$$S_2(n) = \frac{1}{3}\left((n+1)^3 - 1 - S_0(n) - 3S_1(n)\right).$$

D'après la formule du binôme de Newton (4),

$$(m+1)^3 - m^3 = 3m^2 + 3m + 1.$$

Écrivons cette égalité, successivement pour $m = n, n-1, \ldots, 2, 1$:

$$\begin{aligned}
(n+1)^3 - n^3 &= 3n^2 + 3n + 1\\
n^3 - (n-1)^3 &= 3(n-1)^2 + 3(n-1) + 1\\
&\vdots\\
3^3 - 2^3 &= 3 \times 2^2 + 3 \times 2 + 1\\
2^3 - 1^3 &= 3 \times 1^2 + 3 \times 1 + 1.
\end{aligned}$$

Nous remarquons que le second terme du membre de gauche de chacune des $n-1$ premières égalités est répété avec un signe opposé dans le membre de gauche de l'égalité suivante, ainsi en sommant membre à membre ces égalités, nous obtenons

$$\begin{aligned}(n+1)^3 - 1^3 &= 3(n^2 + (n-1)^2 + \cdots + 2^2 + 1^2) \\ &\qquad + 3(n + (n-1) + \cdots + 2 + 1) + (1 + 1 + \cdots + 1 + 1),\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$(n+1)^3 - 1 = 3\mathrm{S}_2(n) + 3\mathrm{S}_1(n) + \mathrm{S}_0(n),$$

d'où

$$\mathrm{S}_2(n) = \frac{1}{3}\left((n+1)^3 - 1 - 3\mathrm{S}_1(n) - \mathrm{S}_0(n)\right).$$

Exercice 26. Démontrez la formule de Pascal pour $k = 3$ en imitant la démonstration que nous venons de faire.

Exercice 27. Démontrez la formule de Pascal dans le cas général.

Terminons avec une petite fonction en langage Python pour calculer les polynômes $(\mathrm{S}_p)_{p\geqslant 0}$ à l'aide de la formule de Pascal. Elle utilise la bibliothèque de calcul formel SymPy [11].

```python
from sympy import binomial, expand, Symbol, S

def sums_of_powers(p_max, n = Symbol('n')):
    '''À l'aide de l'algorithme de Pascal, engendre la liste des
    polynômes donnant la somme des puissances p-ième des n premiers
    entiers naturels non nuls pour 0 <= p <= p_max.'''

    polys = [n]
    for p in range(1, p_max + 1):
        poly = S.One/(p + 1) * ((n + 1)**(p + 1) - 1 -
            sum([binomial(p + 1, j) * polys[j] for j in range(p)]))
        polys.append(expand(poly))
    return polys
```

L'exécution de cette fonction avec `p_max = 12` donne les treize premiers polynômes :

$$
\begin{aligned}
S_0(n) &= n \\
S_1(n) &= \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} \\
S_2(n) &= \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} \\
S_3(n) &= \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4} \\
S_4(n) &= \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30} \\
S_5(n) &= \frac{n^6}{6} + \frac{n^5}{2} + \frac{5n^4}{12} - \frac{n^2}{12} \\
S_6(n) &= \frac{n^7}{7} + \frac{n^6}{2} + \frac{n^5}{2} - \frac{n^3}{6} + \frac{n}{42} \\
S_7(n) &= \frac{n^8}{8} + \frac{n^7}{2} + \frac{7n^6}{12} - \frac{7n^4}{24} + \frac{n^2}{12} \\
S_8(n) &= \frac{n^9}{9} + \frac{n^8}{2} + \frac{2n^7}{3} - \frac{7n^5}{15} + \frac{2n^3}{9} - \frac{n}{30} \\
S_9(n) &= \frac{n^{10}}{10} + \frac{n^9}{2} + \frac{3n^8}{4} - \frac{7n^6}{10} + \frac{n^4}{2} - \frac{3n^2}{20} \\
S_{10}(n) &= \frac{n^{11}}{11} + \frac{n^{10}}{2} + \frac{5n^9}{6} - n^7 + n^5 - \frac{n^3}{2} + \frac{5n}{66} \\
S_{11}(n) &= \frac{n^{12}}{12} + \frac{n^{11}}{2} + \frac{11n^{10}}{12} - \frac{11n^8}{8} + \frac{11n^6}{6} - \frac{11n^4}{8} + \frac{5n^2}{12} \\
S_{12}(n) &= \frac{n^{13}}{13} + \frac{n^{12}}{2} + n^{11} - \frac{11n^9}{6} + \frac{22n^7}{7} - \frac{33n^5}{10} + \frac{5n^3}{3} - \frac{691n}{2730}
\end{aligned}
$$

Solutions des exercices

Exercice 1. Pour tout entier $n \geqslant 1$, $S_0(n) = n$.

Exercice 2. La solution est dans le texte après l'énoncé de l'exercice.

Exercice 3. Il suffit d'écrire

$$\mathrm{S}_1(n) = 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n$$

et

$$\mathrm{S}_1(n) = n + (n-1) + \cdots + 2 + 1,$$

puis d'ajouter membre à membre les deux égalités :

$$2\mathrm{S}_1(n) = \underbrace{(n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1)}_{n \text{ termes}}$$

ce qui nous donne la formule

$$\mathrm{S}_1(n) = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{13}$$

Exercice 4. Si on suppose que chaque gâteau d'anniversaire de Jeanne Calment ait été décoré d'un nombre de bougies égal à son âge, alors le nombre de bougies soufflées par M^me^ Calment au cours de sa longue vie est égal à $\mathrm{N} = 1 + 2 + \cdots + 122$. À l'aide de la formule (13), nous trouvons

$$\mathrm{N} = \frac{122 \times 123}{2} = 7\,503.$$

Exercice 5. On a

$$\begin{aligned} 2 + 4 + 6 + \cdots + 2n &= 2(1 + 2 + 3 + \cdots + n) \\ &= n(n+1) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) &= (2-1) + (4-1) + (6-1) + \cdots + (2n-1) \\ &= (2 + 4 + 6 + \cdots + 2n) - n \\ &= n(n+1) - n \\ &= n^2. \end{aligned}$$

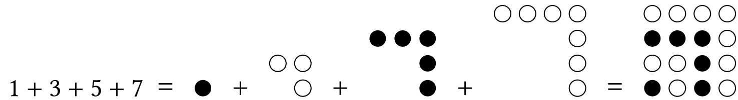

Figure 3 – Une preuve sans mots de l'identité $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$.

Exercice 6. Voir la figure 3.

Exercice 7. *a*) Soit $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ un polynôme de degré n. Alors

$$\begin{aligned} P(x-1) &= a_n(x-1)^n + a_{n-1}(x-1)^{n-1} + \cdots + a_1(x-1) + a_0 \\ &= a_n x^n + \left(a_{n-1} - a_n\binom{n}{n-1}\right)x^{n-1} + \text{termes de degré} \leqslant n-2, \end{aligned}$$

donc

$$P(x) - P(x-1) = na_n x^{n-1} + \text{termes de degré} \leqslant n-2$$

où $na_n \neq 0$. Nous avons montré que si $P(x)$ est un polynôme de degré n, alors $P(x) - P(x-1)$ est un polynôme de degré $n-1$. Par conséquent, pour que $P(x) - P(x-1) = x^2$ il faut que $P(x)$ soit un polynôme de degré 3.

b) Il est clair que si $P(x) - P(x-1) = x^2$, alors $\big(P(x) + \alpha\big) - \big(P(x-1) + \alpha\big) = x^2$.

c) Soit $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ un polynôme de degré 3. Alors $P(x) - P(x-1) = x^2$ équivaut à $3ax^2 + (2b-3a)x + a - b + c = x^2$. Par conséquent, (a, b, c) est solution du système

$$3a = 1 \tag{14}$$

$$-3a + 2b = 0 \tag{15}$$

$$a - b + c = 0 \tag{16}$$

L'équation (14) donne immédiatement $a = 1/3$. L'équation (15) s'écrit alors $-1 + 2b = 0$, d'où $b = 1/2$. Enfin, l'équation (16) donne $c = 1/6$. Nous avons trouvé

$$\mathrm{P}(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x.$$

d) Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $\mathrm{S}_2(n) = \mathrm{P}(n)$. Factorisons-le polynôme P :

$$\mathrm{P}(x) = \frac{1}{6}x(2x^2 + 3x + 1).$$

Pour factoriser $2x^2 + 3x + 1$, nous pouvons procéder ainsi :

$$\begin{aligned}
2x^2 + 3x + 1 &= 2\left(x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}\right) \\
&= 2\left(x^2 + 2 \times \frac{3}{4}x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{2}\right) \\
&= 2\left(\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}\right) \\
&= 2\left(x + \frac{3}{4} - \frac{1}{4}\right)\left(x + \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right) \\
&= 2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x + 1) \\
&= (2x + 1)(x + 1).
\end{aligned}$$

Finalement, $\mathrm{P}(x) = x(x + 1)(2x + 1)/6$, d'où

$$\mathrm{S}_2(n) = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}.$$

Exercice 8. Cherchons un polynôme de degré 4, $\mathrm{P}(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx$ tel que $\mathrm{P}(x) - \mathrm{P}(x - 1) = x^3$. Étant donné que

$$\mathrm{P}(x) - \mathrm{P}(x - 1) = 4ax^3 + (3b - 6a)x^2 + (4a - 3b + 2c)x - a + b - c + d,$$

le quadruplet (a, b, c, d) est solution du système

$$\begin{aligned}
4a \qquad\qquad &= 1 &(17)\\
-6a + 3b \qquad &= 0 &(18)\\
4a - 3b + 2c \quad &= 0 &(19)\\
-a + b - c + d &= 0. &(20)
\end{aligned}$$

L'équation (17) donne $a = 1/4$, l'équation (18) donne $b = 1/2$, l'équation (19) donne $c = 1/4$ et enfin l'équation (20) fournit $d = 0$, d'où

$$\mathrm{P}(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2 = \frac{x^2(x^2 + 2x + 1)}{4} = \frac{x^2(x + 1)^2}{4}.$$

Par conséquent,

$$\mathrm{S}_3(n) = \frac{n^2(n + 1)^2}{4}.$$

Remarquons que $\mathrm{S}_3(n) = \mathrm{S}_1(n)^2$, c'est-à-dire

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2.$$

Le lecteur curieux trouvera une preuve combinatoire de cette relation dans [12].

Exercice 9. Développez $m^2(m+1)^2 - m^2(m-1)$, réduisez et vous devriez trouver $4m^3$. Posons $p(x) = (x + 1)^2x^2$. L'identité démontrée peut donc s'écrire $4m^3 = p(m) - p(m - 1)$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}
4\mathrm{S}_3(n) &= \sum_{m=1}^{n} p(m) - p(m - 1)\\
&= p(1) - p(0) + p(2) - p(1) + p(3) - p(2) + \cdots + p(n) - p(n - 1)\\
&= p(n)\\
&= n^2(n + 1)^2.
\end{aligned}$$

Ce qui nous donne bien la formule attendue.

Exercice 10. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a

$$\frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} = \frac{(a+b)n + a}{n(n+1)}.$$

Par conséquent, le couple (a, b) doit vérifier l'égalité

$$(a+b)n + a = 1$$

pour tout entier $n \geqslant 1$, donc le système

$$a \qquad = 1 \tag{21}$$

$$a + b = 0. \tag{22}$$

On trouve rapidement $a = 1$ et $b = -1$, donc

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Nous en déduisons que

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j(j+1)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} - \frac{1}{j+1} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

Exercice 11. Multiplions le dénominateur et le numérateur de $1/(\sqrt{k} + \sqrt{k+1})$ par $\sqrt{k+1} - \sqrt{k}$. Il vient

$$\frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} = \sqrt{k+1} - \sqrt{k}.$$

Il s'ensuit que

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k} - \sqrt{k+1}} = \sqrt{n+1}.$$

Exercice 12. *a*) On a

$$\begin{aligned}(1-x)&(1+x+x^2+\cdots+x^n)\\ &=(1+x+x^2+\cdots+x^n)-(x+x^2+x^3+\cdots+x^{n+1})\\ &=1-x^{n+1}.\end{aligned}$$

Nous en déduisons que

$$1+x+x^2+\cdots+x^n=\begin{cases}\dfrac{1-x^{n+1}}{1-x} & \text{si } x\neq 1,\\ n+1 & \text{si } x=1.\end{cases}$$

b) Le nombre de grains de blé déposés sur l'échiquier est égal à

$$1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{63}=\frac{1-2^{64}}{1-2}=2^{64}-1.$$

Ils représentent un poids entre $2^{64}\times 30\times 10^{-9}$ tonnes et $2^{64}\times 50\times 10^{-9}$ tonnes, soit entre 760 et 1265 fois la production mondiale en 2014 !

Exercice 13.

$$\begin{aligned}(a+b)^3&=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,\\ (a+b)^4&=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4,\\ (a+b)^5&=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5.\end{aligned}$$

Exercice 14.

$$\begin{aligned}(a+b)(c+d+e)&=ac+ad+ae+bc+bd+be,\\ (a+b)(c+d)(e+f+g)&=ace+acf+acg+ade+adf+adg+\\ &\quad+bce+bcf+bcg+bde+bdf+bdg.\end{aligned}$$

Exercice 15. La figure 4 page 30 montre comment l'on peut lister les parties d'un ensemble à l'aide d'un arbre de choix. Nous trouvons

$$\binom{4}{0} = 1, \quad \binom{4}{1} = 4, \quad \binom{4}{2} = 6, \quad \binom{4}{3} = 4 \quad \text{et} \quad \binom{4}{4} = 1.$$

À l'aide de la formule du binôme de Newton, nous obtenons

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

Exercice 16. En procédant comme à l'exercice précédent, nous obtenons

$$\binom{5}{0} = 1, \quad \binom{5}{1} = 5, \quad \binom{5}{2} = 10, \quad \binom{5}{3} = 10, \quad \binom{5}{4} = 5 \quad \text{et} \quad \binom{5}{5} = 1,$$

d'où

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

Exercice 17. Voir la table 1 page suivante.

Exercice 18. Le lecteur peut soit emporter la chemise hawaïenne, ce qu'il peut faire de $\binom{n-1}{j-1}$ façons, soit ne pas l'emporter, ce qu'il peut faire de $\binom{n-1}{j}$ façons, d'où la propriété de récurrence :

$$\binom{n}{j} = \binom{n-1}{j-1} + \binom{n-1}{j}.$$

Exercice 19. À partir de la formule du binôme de Newton et du triangle de Pascal de la table 1 page suivante, nous obtenons

$$\begin{aligned}(a+b)^{10} &= a^{10} + 10a^9b + 45a^8b^2 + 120a^7b^3 + 210a^6b^4 \\ &\quad + 252a^5b^5 + 210a^4b^6 + 120a^3b^7 + 45a^2b^8 + 10ab^9 + b^{10}.\end{aligned}$$

n	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	$\binom{n}{5}$	$\binom{n}{6}$	$\binom{n}{7}$	$\binom{n}{8}$	$\binom{n}{9}$	$\binom{n}{10}$
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0	0	0	0	0	0
4	1	4	6	4	1	0	0	0	0	0	0
5	1	5	10	10	5	1	0	0	0	0	0
6	1	6	15	20	15	6	1	0	0	0	0
7	1	7	21	35	35	21	7	1	0	0	0
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	0	0
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	0
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Table 1 – Triangle de Pascal

Exercice 20. L'observation du triangle de Pascal (table 1) permet de conjecturer les identités suivantes :

$$\binom{0}{k} + \binom{1}{k} + \cdots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}, \qquad (k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}, n \leqslant k), \tag{23}$$

$$\binom{k}{0} + \binom{k+1}{1} + \cdots + \binom{k+n}{n} = \binom{k+n+1}{n}, \qquad (n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}). \tag{24}$$

Étant donné que $\binom{j}{k} = 0$ si $j < k$, l'identité (23) s'écrit souvent

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \cdots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Exercice 21. Appliquons la formule du binôme de Newton :

$$\sum_{j=0} \binom{n}{j} = \sum_{j=0} \binom{n}{j} 1^j \times 1^{n-j} = (1+1)^n = 2^n.$$

Nous savons que pour tout $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$, $\binom{n}{j}$ est le nombre de parties à j éléments d'un ensemble de n éléments, par conséquent la somme $\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}$ est le nombre de parties d'un ensemble de n éléments. L'identité démontrée permet donc de conclure qu'un ensemble à n éléments a 2^n parties.

L'utilisation d'un arbre de choix pour dénombrer les parties d'un ensemble permet de retrouver le résultat (voir la figure 4 page 30).

Exercice 22.

$$\binom{8}{3} = \frac{8 \times 7 \times \cancel{6}}{\cancel{3!}} = 8 \times 7 = 56,$$

$$\binom{11}{4} = \frac{11 \times 10 \times (3 \times \cancel{3}) \times (\cancel{2} \times \cancel{4})}{\cancel{2} \times \cancel{3} \times \cancel{4}} = 11 \times 10 \times 3 = 330,$$

$$\binom{14}{7} = \frac{(2 \times \cancel{7}) \times 13 \times (2 \times \cancel{6}) \times 11 \times (2 \times \cancel{5}) \times (3 \times \cancel{3}) \times (\cancel{2} \times \cancel{4})}{\cancel{2} \times \cancel{3} \times \cancel{4} \times \cancel{5} \times \cancel{6} \times \cancel{7}} = 3\,432.$$

Exercice 23. Le nombre de grilles de loto est égal à $\binom{49}{6}$, soit

$$\frac{49 \times 48 \times 47 \times 46 \times 45 \times 44}{6!} = 13\,983\,816.$$

Exercice 24. *a*) Soit un entier $1 \leqslant k \leqslant n+1$. Les parties à deux éléments de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n+1\}$ dont le plus grand élément est k sont $\{i, k\}$ avec $1 \leqslant i < k$; il y en a $k - 1$.

b) Regroupons les parties de $\mathcal{P}_{n+1}$ selon leur plus grand élément. Le nombre de parties de $\mathcal{P}_{n+1}$ est alors, d'après la question précédente, égal à $1 + 2 + \dots + n$. Mais, par définition, ce nombre est aussi égal à $\binom{n+1}{2}$, donc

$$1 + 2 + \cdots + n = \binom{n+1}{2}.$$

c) En appliquant la formule (10), l'égalité précédente devient

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Exercice 25. D'après la formule de Pascal, nous avons

$$6\mathrm{S}_5(n) = (n+1)^6 - 1 - \mathrm{S}_0(n) - 6\mathrm{S}_1(n) - 15\mathrm{S}_2(n) - 20\mathrm{S}_3(n) - 15\mathrm{S}_4(n).$$

Organisons la calcul à l'aide d'un tableau (voir la table 2 page suivante. Nous trouvons

	n^6	n^5	n^4	n^3	n^2	n
$(n+1)^6-1$	1	6	15	20	15	6
$-S_0(n)$						-1
$-6S_1(n)$					-3	-3
$-15S_2(n)$				-5	$-15/2$	$-5/2$
$-20S_3(n)$			-5	-10	-5	0
$-15S_4(n)$		-3	$-15/2$	-5	0	$1/2$
$6S_5(n)$	1	3	$5/2$	0	$-1/2$	0

Table 2 – Calcul de S_5 à l'aide de la formule de Pascal

$$S_5(n) = \frac{1}{6}n^6 + \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 - \frac{1}{12}n^2.$$

De la même manière, nous obtenons

$$S_6(n) = \frac{1}{7}n^7 + \frac{1}{2}n^5 + \frac{1}{2}n^5 - \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{42}n.$$

Exercice 26. Il suffit d'adapter la démonstration pour $k = 2$ de la page page 16.

Exercice 27. Soient deux entiers $n \geqslant 1$ et $k \geqslant 1$. Pour tout entier $l \in \{1, \dots, n\}$, nous avons l'égalité

$$(l+1)^{k+1} - l^{k+1} = 1 + \binom{k+1}{1} l + \binom{k+1}{2} l^2 + \dots + \binom{k+1}{k-1} l^{k-1} + \binom{k+1}{k} l^k.$$

Effectuons la somme membre à membre pour $l \in \{1, \dots, n\}$. Il vient

$$(n+1)^{k+1} - 1 = S_0(n) + \binom{k+1}{1} S_1(n) + \binom{k+2}{2} S_2(n) + \dots \\ + \binom{k+1}{k-1} S_{k-1}(n) + \binom{k+1}{k} S_k(n).$$

Sachant que $\binom{k+1}{k} = \binom{k+1}{1} = k + 1$, la formule précédente s'écrit aussi

$$(n+1)^{k+1} - 1 = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k+1}{j} \mathrm{S}_j(n) + (k+1)\mathrm{S}_k(n),$$

d'où nous déduisons la formule de Pascal

$$\mathrm{S}_k(n) = \frac{1}{k+1}\left((n+1)^{k+1} - 1 - \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k+1}{j} \mathrm{S}_j(n)\right).$$

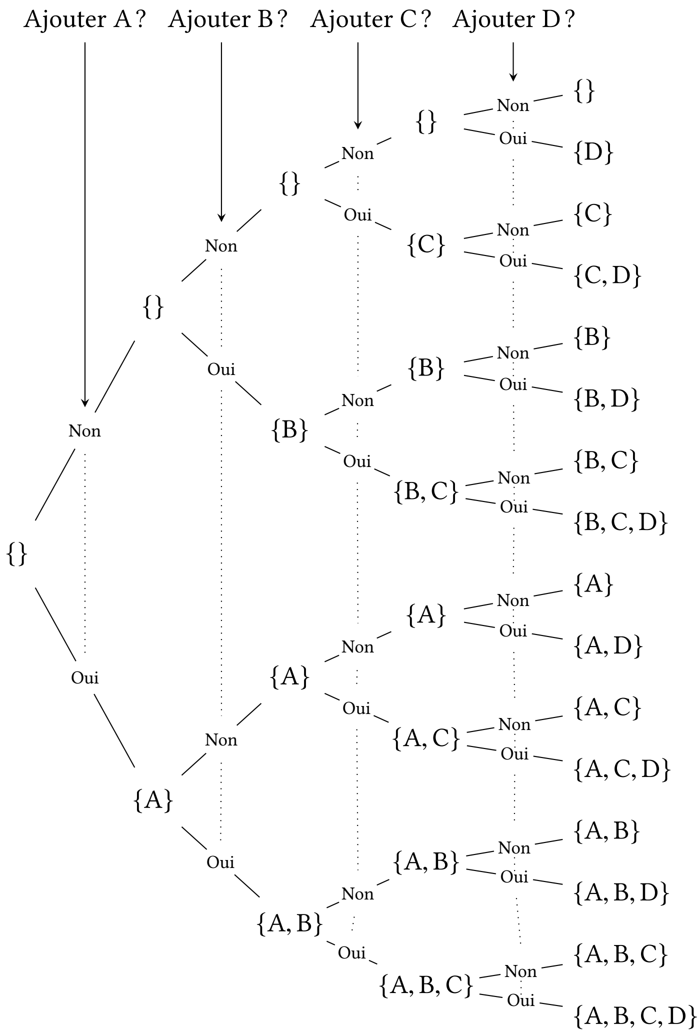

Figure 4 – Les parties de l'ensemble {A, B, C, D}

Références

[1] R. Dontot, « Sur les sommes des puissances semblables des *n* premiers nombres entiers », *Revue de mathématiques spéciales*, n° 1, p. 1–4, 1919.

[2] ——, « Sur les sommes des puissances semblables des *n* premiers nombres entiers », *Revue de mathématiques spéciales*, n° 2, p. 25–28, 1919.

[3] G. Mackiw, « A Combinatorial Approach to Sums of Integer Powers », *Mathematics Magazine*, t. 73, n° 1, p. 44–46, 2000. doi : 10.2307/2691490.

[4] R. B. Nelsen, *Proofs Without Words : Exercises in Visual Thinking*. Mathematical Association of America, 1993 (cf. p. 4).

[5] ——, *Proofs Without Words : More Exercises in Visual Thinking*. Mathematical Association of America, 2000 (cf. p. 4).

[6] ——, *Proofs Without Words : Further Exercises in Visual Thinking*. Mathematical Association of America, 2016 (cf. p. 4).

[7] I. Niven, *Mathematics of Choice or How to Count Without Counting*. Random House, 1965.

[8] B. Pascal, *Traité du triangle arithmétique*. chez Guillaume Desprez, 1665. adresse : http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/btv1b86262012.r=trait%C3%A9+du+triangle+arithm%C3%A9tique.langFR (cf. p. 15).

[9] J. L. Paul, « On the Sum of the kth Powers of the First n Integers », *The American Mathematical Monthly*, t. 78, n° 3, p. 271–272, 1971. doi : 10.2307/2317523.

[10] J. L. Paul, « Combinatorial Proof's of Pascal's Formula for Sums of Powers of the Integers », *The American Mathematical Monthly*, t. 92, n° 7, p. 499–501, 1985. doi : 10.2307/2322512.

[11] SymPy Development Team, *Sympy : Python library for symbolic mathematics*, 2016. adresse : http://www.sympy.org (cf. p. 17).

[12] B. Turner, « Point-and-Line Proof for the Sum of the Cubes », *The Two-Year College Mathematics Journal*, t. 12, nº 4, p. 270–271, 1981. doi : 10.2307/3027076 (cf. p. 22).